TD 1 A INTÉGRATION 2011-2012

Exercice 1 **Intégration par parties**.

$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$. Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n pour tout n dans $\mathbb{N}$ (... $2(n+1)/(2n+5)$).

Exercice 2 **Somme de Riemann**.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1+\dfrac{n}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{n^2}}$. Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 3 **Intégration d'une série de fonctions. Inégalité de Taylor-Lagrange.** ESCP 94

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.

On considère l'application f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Q1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

Q2. Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Q3. On se propose de montrer que : $I = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

a) Établir que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \in [0,1],\ \left|\ln(1+u) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{u^k}{k}\right| \leqslant \frac{u^{n+1}}{n+1}$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \in [0,1],\ \left|f(u) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{u^{k-1}}{k}\right| \leqslant \frac{u^{n}}{n+1}$.

c) Conclure.

En plus ? Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,u_n = I$.

Exercice 4 **Changement de variable**.

Q1. t est dans $\mathbb{R}$ exprimer $\sin(2t)$ et $\cos(2t)$ en fonction de $\sin t$ et $\cos t$.

Q2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\,\sin^3 t}{1+\cos^2(2t)}\,\mathrm{d}t$ $(u = \cos(2t))$ $\quad \frac{\pi}{16}$

Exercice 5 **Endomorphisme défini par des intégrales**. ESCP 98

E est l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. F est l'espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. A tout élément f de E on associe la fonction $T(f)$ définie par :

$$\forall t \in [0,1],\ T(f)(t) = \int_0^t \int_v^1 f(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Q1. Soit f un élément de E. Montrer que $T(f)$ appartient à F et calculer : $T(f)(0)$, $\big(T(f)\big)'(1)$, $\big(T(f)\big)''$.

Q2. Montrer que T est une application linéaire injective de E dans F.

Q3. $\mathcal{S} = \{h \in F \mid h(0) = h'(1) = 0\}$.

a) Montrer que $\operatorname{Im} T \subset \mathcal{S}$.

b) Soit h un élément de $\mathcal{S}$. On pose $f = -h''$. Montrer que f est un élément de E et que $T(f) = h$ (remarquer que $\big(T(f)\big)'' = h''$). Conclure.

Exercice 6 On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}\cdot$

Q1 a) Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. On note $F(x)$ sa somme.

b) Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

Q2 Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n'(x)$ est convergente. On note $G(x)$ sa somme.

Q3 *Étude de la dérivabilité de F.*

a) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\quad \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \varphi(t) = \dfrac{1}{t}\cdot$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que :

$$\forall (x, x_0) \in [n, +\infty[^2, \quad |\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leqslant \frac{(x - x_0)^2}{n^3}\cdot$$

b) En déduire, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}^+$, la nature de la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)|$.

c) Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}^+$,

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leqslant K|h|$$

d) En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que $F' = G$.

Q4 *Recherche d'un équivalent en $+\infty$.* Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

a) Justifier que, pour $k \in \mathbb{N}^*$: $f_{k+1}(x) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) \mathrm{d}t \leqslant f_k(x)$

b) En déduire que, pour $n \geqslant 2$: $\displaystyle\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \int_1^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) \mathrm{d}t.$

c) En déduire que : $\quad \ln(1+x) \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{x}{x+1} + \ln(1+x).$

d) Déterminer un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 7 ESCP 98 On pose $D =]0, +\infty[$ et $\forall x \in D, \ F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t+x} \,\mathrm{d}t$.

Q1. Justifier la définition de F.

Q2. Etudier le sens de variation de F.

Q3. A l'aide d'un changement de variable, montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et vérifier que :

$$\forall x \in D, \ F'(x) + F(x) = \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x}$$

Q4. Montrer que $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e-1}{x}\cdot$

Q5. Déterminer les limites de F aux bornes de son domaine.

Q6. **Facultatif** Trouver un équivalent de F en 0.
