TD 2B SÉRIES 2010-2011

19-09

Exercice 1 a est un réel positif ou nul. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n!}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k+a)}$.

Q1. On suppose que a est élément de $[0,1]$. Montrer que la série de terme général u_n est divergente (minorer simplement).

Q2. On suppose que a est élément de $]1,+\infty[$.

a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} u_k = \frac{1}{a-1} - \frac{n+a}{a-1}\,u_n$.

b) Montrer que la série de terme général u_n converge.

En déduire que la suite de terme général $n\,u_n$ converge et, en raisonnant par l'absurde, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n\,u_n) = 0$.

Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 2 $\mathcal{L}$ est l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\exists K_f \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ |f(x)-f(y)| \leqslant K_f|x-y| \quad (1)$$

g est un élément de $\mathcal{L}$. a est un réel. λ est un réel de l'intervalle $]-1,1[$.

Q1. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |g(x)| \leqslant |g(y)| + K_g|x-y|$.

Montrer que $F : x \to \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n\, g(x+na)$ est un élément de $\mathcal{L}$.

Q2. Montrer que F est l'unique fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) - \lambda F(x+a) = g(x)$.

Exercice 3 **Critère d'Abel** $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite décroissante de réels positifs qui converge vers zéro.

$(v_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels. On pose pour tout n dans $[\![n_0,+\infty[\![$, $V_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} v_k$ et on suppose $(V_n)_{n\geqslant n_0}$ bornée.

Q1. Montrer que la série de terme général $t_n = V_n(u_n - u_{n+1})$ est de même nature que la série de terme général $w_n = u_n v_n$ (on pourra calculer : $\sum\limits_{k=n_0}^{n} t_k$)

Q2. Montrer que la série de terme général t_n est absolument convergente. Conclure pour la série de terme général w_n.

Q3. Application : étudier la nature de la série de terme général : $(-1)^n/n$ (resp. $\cos(\alpha n)/n$).

Exercice 4 a et b sont deux réels strictement positifs. $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est la suite réelle définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b}\,u_n.$$

Q1. Trouver un élément α de $\mathbb{R}$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)$ converge vers un réel ℓ strictement positif (on pourra s'intéresser à la convergence de la série de terme général $\ln v_{n+1} - \ln v_n$ où $v_n = n^\alpha u_n$...chercher un équivalent de ce terme général).

Q2. Utiliser ce qui précède pour étudier la nature de la série de terme général u_n.

Q3. Désormais on suppose que cette série est convergente. Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n$.

Déterminer $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (sommer la relation $(n+b)u_{n+1} = (n+a)u_n$).

Exercice 5 $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite **décroissante** de réels **positifs ou nuls**.

On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^n\, u_{2^n}$. On pose encore $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.

Q1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{2}\, v_{k+1} \leqslant S_{2^{k+1}} - S_{2^k} \leqslant v_k$.

Montrer que la série de terme général u_n est de même nature que la série de terme général v_n.

Q2. Application. β est un réel. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n\,(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

Exercice 6 ESCP 96 E est l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

f est un élémént de E. Pour tout n élément de $\mathbb{N}$, on pose : $I_n(f) = \displaystyle\int_0^1 t^n\, f(t)\,\mathrm{d}t$.

Q1. Montrer que la suite de terme général $I_n(f)$ converge ver 0.

Q2. a) Montrer que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k(f) = \int_0^1 \frac{1+(-1)^n t^{n+1}}{1+t}\, f(t)\,\mathrm{d}t$$

En déduire que la série de terme général $(-1)^n I_n(f)$ converge et écrire sa somme sous forme intégrale.

b) Qu'obtient-on si : $\forall x \in [0,1],\ f(x) = 1$?

c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ en posant : $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \sqrt{x}$

Q3. Ici on s'intéresse à la convergence de la suite de terme général $nI_n(f)$.

a) Soit α un élément de $]0,1[$. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \int_0^\alpha t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

b) Ici $f(1) = 0$. On se donne un réel ε strictement positif. Montrer que l'on peut trouver α dans $]0,1[$ tel que :

$$\left| n \int_\alpha^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n(f)$

c) Etudier le cas général en se ramenant au cas particulier précédent.

Q4. Ici $\forall x \in [0,1],\ f(x) = e^{-x}$.

Calculer $I_n(f)$ pour tout élément n de $\mathbb{N}$. Trouver un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$

Exercice 7 **Autour du produit de Cauchy**

Q0. a) Rappeler les résultats obtenus dans le cours sur le produit de Cauchy.

b) Rappeler les résultats obtenus dans le cours sur les séries alternées.

Q1. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ et $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$.

a) Justifier rapidement que les séries de terme généraux u_n et v_n convergent

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0,n]\!],\ (k+1)(n-k+1) \leqslant \left(\dfrac{n+2}{2}\right)^2$.

c) Montrer alors que la suite de terme général $|w_n|$ ne converge pas vers 0. Conclure.

Q2. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ et $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$.

a) Justifier rapidement que les séries de terme généraux u_n et v_n convergent.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = (-1)^n \dfrac{2}{n+2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k}$.

c) Montrer alors que la suite $\left(\dfrac{2}{n+2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k} \right)_{n \geqslant 0}$ est décroissante.

En utilisant un équivalent classique montrer que cette suite converge vers 0. Conclure.
