TD 3 A INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES 2011-2012

01-10-2011

Exercice 1 **Convergence 1** Nature de : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^3 t}{t^{\frac{2}{3}}}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{\frac{4}{3}}}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^3\, t^{1/2}}$

Exercice 2 **Changement de variable**.

Q1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Q2. α est un réel. Etudier la nature de $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}\,\mathrm{d}t$ (faire très simple).

Q3. α est un réel tel que J converge. Montrer que $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{(1+u^2)(1+u^\alpha)}\,\mathrm{d}u$ existe et vaut J.

En déduire la valeur de J (calculer $2J$! !).

Exercice 3 **Convergence 2.** Nature de $\displaystyle\int_0^1 (-\ln t)^\alpha\,(1-t)^\beta\,\mathrm{d}t$

Exercice 4 **Moments d'une variable gaussienne**.

On pose, pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$.

Q1. Montrer que I_n existe pour tout élément n de $\mathbb{N}$.

Q2. Montrer que si n est impair, I_n est nulle.

Q3 a) p est élément de $\mathbb{N}$. Exprimer I_{2p+2} en fonction de I_{2p}.

b) En déduire la valeur de I_{2p} pour tout élement p de $\mathbb{N}$ (on rappelle que $I_0 = \sqrt{2\pi}$).

Exercice 5 **Convergence 3.** Trouver le domaine de définition de $x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6 **Changement de variable. Intégration par parties**.

Q1. Montrer que $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.

Q2. Montrer que $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ est de même nature que $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.

Q3. Montrer la convergence de K, J et I.

Q4. Montrer que $t \to \cos(t^2)$ n'a pas de limite en $+\infty$ (construire deux suites qui tendent vers $+\infty$ dont les images par f n'ont pas la même limite).

Exercice 7 **Intégration d'une série. Permutation de $\sum$ et $\int$.**

Q1. Montrer que la fonction $g : x \to \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$ est prolongeable en une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

Montrer, en utilisant des inégalités classiques que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Q2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$ converge.

Q3. p est dans $\mathbb{N}$. Montrer l'existence et calculer $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(p+1)t}\sin t\,\mathrm{d}t$... $\frac{1}{1+(p+1)^2}$

Q4. Prouver que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ (donner une forme intégrale aux sommes partielles et passer à la limite en utilisant Q1.).

Exercice 8 **Convergence et calcul**

α et β sont deux réels strictement positifs. Eudier la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha} \ln\left(1 + \frac{1}{t^{\beta}}\right)\mathrm{d}t$.

Calculer I lorsque $\beta = 2(1+\alpha)$... $(\frac{\pi}{\alpha+1})$.
