TD 3 B INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES 2010-2011

27-09-2010

Exercice 1 **Limite de l'intégrale et intégrale de la limite...** $f : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Q1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ (on pourra intégrer par parties). Montrer que f est impaire sur $\mathbb{R}$.

Q2. On rappelle que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}$. Soit x un réel strictement positif.

Montrer que : $|f(x) - I| = |x \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u(u+x)}\,\mathrm{d}u| \leqslant x \int_0^1 \frac{1}{u+x}\,\mathrm{d}u + x \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$.

En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}\cdot$ Morale ?

Exercice 2 Q1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t\,\mathrm{d}t$ converge. On note ℓ sa valeur.

Q2. Soit x un réel strictement positif. Montrer que : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = -\ln x + \ell + \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ (on commencera par justifier l'existence des intégrales).

En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \ln x \right)$.

Q3 Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$ existe et la calculer (utiliser Q2).

Q4. **Facultatif** a et b sont deux réels strictement positifs. f est continue sur $[0, +\infty[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $f(0) \ln \dfrac{b}{a}$.

Exercice 3 ESCP 97 **Prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.**

f est une fonction continue sur $[0, 1]$. Pour tout élément x de $]0, 1]$ on pose :

$$g(x) = \ln x \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 f(t) \ln t\,\mathrm{d}t$$

Q1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, 1]$.

Q2. Montrer que g se prolonge en une fonction $\widehat{g}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Préciser $\widehat{g}(0)$.

Q3. Ici : $\forall x \in [0, 1],\ f(x) = \sqrt{x}$. $\widehat{g}$ est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$?

Exercice 4 Étudier la fonction $x \to \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^5 - t + 1}$

Exercice 5 ESCP 2002 (1.18) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction non identiquement nulle, continue et périodique de période $T > 0$. On note :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{ et } \quad M = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\,dt$$

Q1. Étudier la convergence de la série de terme général $u_k = \displaystyle\int_{kT}^{(k+1)T} \frac{|f(t)|}{t}\,dt \quad (k \geqslant 1)$.

Q2. On suppose $M \neq 0$.

a) Montrer que $F(x) \underset{+\infty}{\sim} Mx$.

b) L'intégrale $I = \displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ est-elle convergente ?

Q3. On suppose $M = 0$. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ est convergente mais non absolument convergente.

Exercice 6 Q1. α est un réel. Etudier la convergence de $I_\alpha = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

Q2. $\alpha \in]-1, +\infty[$ et $x \in]0,1[$. Montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x^{\alpha+1}} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

Calculer $\displaystyle\int_x^{x^{\alpha+1}} \frac{1}{t \ln t}\,\mathrm{d}t$ et en déduire que $I_\alpha = \ln(\alpha + 1)$.

Exercice 7 ESCP 2000 (1-7) Q1. On pose : $\forall x \in [0, 1,\ h(x) = \ln(1 - x)$.

a) Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1[$ et calculer $h^{(p)}$ pour tout p dans $\mathbb{N}^*$.

b) Soit x un élément de $]0, 1[$. On pose : $\forall t \in [0, x],\ \varphi_x(t) = \dfrac{t - x}{t - 1}\cdot$ Étudier les variations de φ_x sur l'intervalle $[0, x]$.

c) p appartient à $\mathbb{N}^*$ et x est un réel de l'intervalle $[0, 1[$.

Montrer que : $\left| h(x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k} \right| \leqslant x^p\, |\ln(1 - x)|$.

Q2. Montrer que la fonction $x \mapsto g(x) = \ln(x^2)\, \ln(1 - x^2)$ est bornée sur l'intervalle $]0, 1[$.

Q3. a) Justifier la convergence de l'intégrale : $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(t^2\right)\, \ln\left(1 - t^2\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, après en avoir justifié la convergence, calculer : $I_n = -\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n}\, \ln\left(t^2\right)}{n+1}\,\mathrm{d}t$.

c) Montrer que : $J = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)\,(2n+1)^2}\cdot$

Q4. A-t-on : $\forall x \in [0, 1[,\ \ln(1 - x) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$?

Exercice 8 **Le continu n'est pas toujours très discret**.

f est continue et **positive (ou négative)** sur $[0, +\infty[$.

Q1. Montrer que si la suite de terme général $\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Q2. Montrer que ce résultat ne vaut plus si l'on ne fait pas l'hypothèse de signe $(t \to \sin(2\pi\, t))$.
