TD 4A INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES 2011-2012

03-10-2011

Exercice 1 **Etude d'une fonction définie par une intégrale.** $\boxed{\bigstar}$

Q1. a) Étudier la nature des $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$. En déduire deux limites (oui je sais c'est un peu vague, mais bon !).

b) Trouver le domaine de définition de $F : x \to \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Q2. $\boxed{\bigstar\bigstar\bigstar}$ Montrer que F est dérivable sur son domaine et calculer F'.

Q3. Étudier F aux bornes de son domaine de définition.

Q4. a) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xF(x) = 0$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $1 - F(0)$ (intégrer par parties entre 0 et A).

Exercice 2 **Ecricome 2009 Ex 2**

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par la formule suivante :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}dt.$$

1. Domaine de définition de f :

   (a) Justifier que pour tout réel $a > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}dt$ est convergente et donner sa valeur.

   (b) Soit x un réel fixé. Etablir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}dt.$

   Par conséquent, f est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est clairement paire. On va donc l'étudier sur $[0, +\infty[$.

2. Branche infinie de la courbe représentative de f :

   (a) Vérifier l'encadrement suivant, pour tout réel x strictement positif et pour tout réel t positif ou nul :
   $$xe^t \leqslant \sqrt{1+x^2e^{2t}} \leqslant xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}.$$

   (b) Prouver que, pour tout réel x strictement positif, on a :
   $$x \leqslant f(x) \leqslant x + \frac{1}{6x}.$$

   (c) Préciser alors la nature de la branche infinie de la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

3. Dérivabilité et monotonie de f :

   (a) A l'aide du changement de variable $u = xe^t$, que l'on justifiera, prouver la formule suivante lorsque x est un réel strictement positif :
   $$f(x) = x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}du.$$

(b) Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée est donnée, pour tout réel x strictement positif, par :

$$f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

(c) Justifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité suivante :

$$2f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}.$$

En déduire que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

4. Etude locale de f et f' en 0 :

(a) Justifier que la formule suivante est valable pour tout réel x strictement positif :

$$\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} du$$

et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} du$ est convergente.

(b) A l'aide des questions précédentes, démontrer alors que l'on a :

$$f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln(x) \quad \text{et} \quad f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln(x)}{2}.$$

(c) En déduire que f est une fonction de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et préciser la valeur de $f'(0)$.

Exercice 3 **Intégration d'une série. Permutation de $\sum$ et $\int$.**

Q1. Montrer que la fonction $g : x \to \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$ est prolongeable en une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

Montrer, en utilisant des inégalités classiques que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Q2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\, dt$ converge.

Q3. p est dans $\mathbb{N}$. Montrer l'existence et calculer $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(p+1)t} \sin t\, dt$... $\frac{1}{1+(p+1)^2}$

Q4. Prouver que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ (donner une forme intégrale aux sommes partielles et passer à la limite en utilisant Q1.).

Exercice 4 **Dérivation sous le signe somme.**

Q1. Montrer que $F : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\, dt$ et $G : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} t\, e^{-t^2} \sin(xt)\, dt$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

Q2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \dfrac{1}{2}\, x\, F(x)$.

Q3. Soit a un élément de $\mathbb{R}$.

Montrer que $\forall h \in \mathbb{R}^*$, $\left|\dfrac{F(a+h) - F(a)}{h} + G(a)\right| \leqslant \dfrac{|h|}{2} \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\, dt$ (on pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange).

En déduire que F est dérivable en a et que $F'(a) = -G(a)$. Déterminer F (on rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).
