TD 4 B INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES 2011-2012

3-10-2010

Pour les non cubes je propose un mixte. Ex 2TD 4 A puis passage au B

Exercice 1 **Intégration d'une série. Permutation de $\sum$ et $\int$.**

p un élément de $\mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{(p-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t$.

On pourra remarquer que si t est un réel strictement positif $\dfrac{1}{1-e^{-t}}$ est la somme d'une série.

Exercice 2 f est une application de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f'(t)|\, \mathrm{d}t$ convergent.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on pose : $u_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) - \displaystyle\int_1^n f(t)\, \mathrm{d}t$.

Q1. Montrer que pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} (t-n) f'(t)\, \mathrm{d}t$. En déduire que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est absolument convergente.

Q2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge.

Q3. En déduire que la série de terme général $f(n)$ converge.

Q4. Application : déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{\sin\sqrt{n}}{n}$.

Exercice 3 ESCP 2002 (1.18) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction non identiquement nulle, continue et périodique de période $T > 0$. On note :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\, dt \quad \text{et} \quad M = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt$$

Q1. Étudier la convergence de la série de terme général $u_k = \displaystyle\int_{kT}^{(k+1)T} \frac{|f(t)|}{t}\, dt \quad (k \geqslant 1)$.

Q2. On suppose $M \neq 0$.

a) Montrer que $F(x) \underset{+\infty}{\sim} Mx$.

b) L'intégrale $I = \displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ est-elle convergente ?

Q3. On suppose $M = 0$. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ est convergente mais non absolument convergente.

Exercice 4 n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^n)\, \mathrm{d}t$.

On se propose de montrer que I_n est convergente et d'en trouver un équivalent.

Q0. Montrer que si t est un réel strictement positif : $0 \leqslant 1 - \cos t \leqslant 2$ et $0 \leqslant 1 - \cos t \leqslant \dfrac{t^2}{2}$.

Q1. a) Montrer que $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\cos t)\, t^{\frac{1}{n}-2}\, \mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\cos t)\, t^{-2}\, \mathrm{d}t$ convergent.

b) Montrer que $|J - J_n| \leqslant \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^1 (1 - t^{1/n})\, \mathrm{d}t + 2 \int_1^{+\infty} (t^{\frac{1}{n}-2} - t^{-2})\, \mathrm{d}t$

Montrer que $J = \dfrac{\pi}{2}$ en utilisant une intégration par parties et la valeur de l'intégrale de Dirichlet.

En déduire un équivalent de J_n.

Q2. Montrer que : $J_n = \dfrac{n}{n-1} \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{(1/n)-1} \sin u \, \mathrm{d}u$.

Q3. Conclure l'exercice.

Exercice 5 ESCP 2000 (1-7) Q1. On pose : $\forall x \in [0,1,\ h(x) = \ln(1-x)$.

a) Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$ et calculer $h^{(p)}$ pour tout p dans $\mathbb{N}^*$.

b) Soit x un élément de $]0,1[$. On pose : $\forall t \in [0,x],\ \varphi_x(t) = \dfrac{t-x}{t-1}\cdot$ Étudier les variations de φ_x sur l'intervalle $[0,x]$.

c) p appartient à $\mathbb{N}^*$ et x est un réel de l'intervalle $[0,1[$.

Montrer que : $\left| h(x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k} \right| \leqslant x^p \, |\ln(1-x)|$.

Q2. Montrer que la fonction $x \mapsto g(x) = \ln(x^2)\ \ln(1-x^2)$ est bornée sur l'intervalle $]0,1[$.

Q3. a) Justifier la convergence de l'intégrale : $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(t^2\right)\ \ln\left(1-t^2\right)}{t^2} \, \mathrm{d}t$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, après en avoir justifié la convergence, calculer : $I_n = -\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n}\ \ln\left(t^2\right)}{n+1} \, \mathrm{d}t$.

c) Montrer que : $J = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)\,(2n+1)^2}$.

Q4. A-t-on : $\forall x \in [0,1[,\ \ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$?

Exercice 6 n appartient à $\mathbb{N}^*$ et $u_n = \sqrt{2n} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} \, \mathrm{d}t$

Q0. Montrer que u_n existe.

Q1. Montrer que $f_n : x \to x - n\ln(1+x/n)$ et $g_n : x \to n\ln(1+x/n) - \ln(1+x)$ sont monotones de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

Q2. Montrer que $u_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\ln(1+t^2/(2n))} \, \mathrm{d}t$.

Montrer que si x est positif :

$$0 \leqslant e^{-n\ln(1+x^2/(2n))} - e^{-x^2/2} \leqslant e^{-n\ln(1+x^2/(2n))} f_n(x^2/2)$$

Q4. A est réel positif.

a) Montrer que $u_n - \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t \leqslant 2 \int_A^{+\infty} e^{-n\ln(1+t^2/(2n))} \, \mathrm{d}t + f_n(A^2/2) \int_{-A}^{A} e^{-n\ln(1+t^2/(2n))} \, \mathrm{d}t$

b) En déduire que $u_n - \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t \leqslant 2 \int_A^{+\infty} \frac{1}{1+t^2/2} \, \mathrm{d}t + 2Af_n(A^2/2)$.

Q5. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} \, \mathrm{d}t \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$
