TD 5 A ESPACES VECTORIELS. APPLICATIONS LINÉAIRES 2011-2012

Dans ce qui suit E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (sauf mention particulière).

Exercice 1 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de E. $F = \{xe_1+ye_2+ze_3+te_4 \in E \mid x-y+t = 0 \text{ et } x+y-z+t = 0\}$.

Justifier rapidement que F est un sous-espace vectoriel de E ; en donner une base et un supplémentaire.

Exercice 2 f et g sont deux endomorphismes de E.

Q1. Montrer que : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(g \circ f) \iff \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$.

Q2. Montrer que : $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im}(g \circ f) \iff E = \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f$.

Exercice 3 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. P est le plan d'équation $x - y + z = 0$ dans la base $\mathcal{B}$ et D est la droite vectorielle de E engendrée par le vecteur $e_1 - e_2 + e_3$.

Q1. Vérifier que P et D sont supplémentaires dans E. Donner une base de P.

Q2. Donner la matrice de la symétrie vectorielle s par rapport à P parallèlement à D (on pourra s'intresser aux images par s des vecteurs d'une base de P et d'une base de D.)

Exercice 4 E est de dimension finie n et f est un endomorphisme de E.

Q1 Montrer que si f est une projection : $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker}(f - Id_E) = n$.

Q2. Montrer la réciproque.

Exercice 5 $E = \mathbb{K}[X]$. Pour tout P dans E on pose : $f(P) = (8 + 3X)P + (-5X + X^2)P' + (X^2 - X^3)P''$.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Q2. Soit P un élément de E de degré q strictement plus grand que 3. Préciser le degré de $f(P)$. Qu'en déduire pour $\operatorname{Ker} f$? Déterminer $\operatorname{Ker} f$.

Exercice 6 **Majoration de la dimension du noyau d'une composée d'endomorphismes.**

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension $n \geqslant 1$. Soit f_1 et f_2 deux endomorphismes de E.

Q1. En considérant la restriction de f_1 au noyau de $f_2 \circ f_1$, montrer que :

$$\dim \operatorname{Ker}(f_2 \circ f_1) \leqslant \dim \operatorname{Ker} f_1 + \dim \operatorname{Ker} f_2$$

Q2. Généraliser le résultat précédent à p endomorphismes de E, $f_1, \ldots, f_p$, avec $p \geqslant 2$.

Exercice 7 ESCP 98 E est l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. F est l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. A tout élément f de E on associe la fonction $T(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \int_0^x f(t) \sin(x - t)\, \mathrm{d}t$$

Q1. Montrer que T est une application linéaire de E dans F.

Q2. Montrer que si f est dans E, $T(f) + (T(f))'' = f$. En déduire $\operatorname{Ker} T$.

Q3. a) Montrer que $G = \{g \in F \mid g(0) = g'(0) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de F contenant l'image de T.

b) Soit g dans G. Calculer $T(g+g'')$. En déduire $\operatorname{Im} T$.

c) Montrer que T est un isomorphisme de E sur G et déterminer T^{-1}.

c) Calculer $T(\sin)$. Trouver un élément h de F tel que $h+h''=\sin$.

Exercice 8 **Endomorphisme nilpotent**.

♡ E est un espace vectoriel de dimension non nulle n sur $\mathbb{K}$. Un endomorphisme f de E est nilpotent s'il existe q dans $\mathbb{N}$ tel que : $f^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

f est un endomorphisme nilpotent de E. p est le plus petit élément de $\mathbb{N}$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Q1. Soit a un élément de E tel que $f^{p-1}(a) \neq 0_E$.

Montrer que la famille $\mathcal{B} = \big(a, f(a), f^2(a), \dots, f^{p-1}(a)\big)$ est libre. En déduire que : $p \leqslant n$.

Q2. Ici on suppose que $p=n$. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{G}$ des éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent avec f.

a) Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ qui contient : $\operatorname{Vect}(Id_E, f, f^2, ..., f^{n-1})$.

b) Réciproquement soit g un élément de $\mathcal{G}$. Montrer que $g(a)$ s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$;

Montrer que g s'écrit comme combinaison linéaire de la famille $(Id_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ (deux endomorphismes de E qui coïncident sur une base de E...). Conclure.

Exercice 9 **Transvection**.

n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$. E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$.

φ est une forme linéaire non nulle sur E $\big(\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})\big)$. H est son noyau. a est un élément non nul de H.

Pour tout élément x de E on pose :

$$f(x) = x + \varphi(x)a.$$

Q1. Montrer que f est un automorphisme de E. Déterminer f^{-1}.

Q2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E et un scalaire λ tels que : $f(e_i) = e_i$ pour tout i dans $[\![1, n-1]\!]$ et $f(e_n) = \lambda e_1 + e_n$.

Envisager une réciproque.

Q3. Montrer que les sous-espaces de E stables par f sont les sous-espaces de E contenant a ou contenu dans H.

Exercice 10 **Endomorphisme de rang 1. Projection**

E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($n \in [\![2, +\infty[\![$). f est un endomorphisme de E de rang 1.

Q1. Soit a un vecteur non nul de $\operatorname{Im} f$. Montrer qu'il existe λ dans $\mathbb{K}$ tel que $f(a) = \lambda\, a$. Montrer que $f \circ f = \lambda\, f$.

Q2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) Il existe c dans $\mathbb{K}^*$ tel que $c\, f$ soit un projecteur.

ii) $f \circ f$ n'est pas l'application linéaire nulle.

iii) $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.
