TD 5 B ESPACES VECTORIELS. APPLICATIONS LINÉAIRES 2011-2012

10-10

Dans ce qui suit E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (sauf mention particulière).

Exercice 1 **Caractérisation des homothéties vectorielles**.

f est un endomorphisme de E.

Q1. Montrer que si $f = \lambda Id_E$ ($\lambda \in \mathbb{K}$), alors f laisse stable les droites vectorielles de E.

Q2. Réciproquement on suppose que f laisse stable les droites vectorielles de E.

a) Montrer que : $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda_x x$.

b) Soit u un élément non nul de E. Soit λ un élément de $\mathbb{K}$ tel que : $f(u) = \lambda u$.

Montrer que si v est un élément de E colinéaire à u : $f(v) = \lambda v$.

Montrer que ceci vaut encore si v est un élément de E tel que (u, v) soit libre $\big($considérer $f(u + v)\big)$.

c) Conclure.

Exercice 2 p et q sont deux projections de E telle que $p \circ q = q \circ p$.

Montrer que $f = p \circ q$ est la projection sur $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$.

► *Au choix exercice 3 ou exercice 4*

Exercice 3 **Rang. QSP**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et u et v deux endomorphismes de E.

On suppose que $u \circ v = 0$ et que $u + v$ est un automorphisme de E. Montrer que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = n$.

Exercice 4 **Rang. QSP**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et u et v deux endomorphismes de E.

On suppose que $u \circ v = 0$ et que $u + v$ est un automorphisme de E.

Montrer que $\operatorname{rg} v \leqslant \dim \operatorname{Ker} u$. Montrer que $\operatorname{Im}(u + v) = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$.

En déduire que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = n$.

Exercice 5 **Endomorphisme nilpotent**.

♡ E est un espace vectoriel de dimension non nulle n sur $\mathbb{K}$. Un endomorphisme f de E est nilpotent s'il existe q dans $\mathbb{N}$ tel que : $f^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

f est un endomorphisme nilpotent de E. p est le plus petit élément de $\mathbb{N}$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Q1. Soit a un élément de E tel que $f^{p-1}(a) \neq 0_E$.

Montrer que la famille $\mathcal{B} = \big(a, f(a), f^2(a), \dots, f^{p-1}(a)\big)$ est libre. En déduire que : $p \leqslant n$.

Q2. Ici on suppose que $p = n$. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{G}$ des éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent avec f.

a) Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ qui contient : $\operatorname{Vect}(Id_E, f, f^2, ..., f^{n-1})$.

b) Réciproquement soit g un élément de $\mathcal{G}$. Montrer que $g(a)$ s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$;

Montrer que g s'écrit comme combinaison linéaire de la famille $(Id_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ (deux endomorphismes de E qui coïncident sur une base de E...). Conclure.

Exercice 6 **QSP**

f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout élément x de E, il existe un élément p de $\mathbb{N}^*$ tel que $f^p(x) = 0_E$.

Montrer qu'il existe un élément q de $\mathbb{N}^*$ tel que $f^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

On pourra considérere une base de E.

► *Au choix exercice 6 ou exercice 7*

Exercice 7 **Rang.** E est de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$). f est un endomorphisme de E de rang r.

$\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \varphi(u) = f \circ u$. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ et donner son rang en fonction de r et de n (considérer le noyau).

Exercice 8 **Rang.** E est de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$). f est un endomorphisme de E de rang r.

$\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \varphi(u) = f \circ u$.

Q1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

Q2. Soit u un endomorphisme de E. Montrer que u appartient au noyau de φ si et seulement si $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} f$.

Ainsi $\operatorname{Ker} \varphi = \mathcal{L}(E, \operatorname{Ker} f)$ ou presque... En déduire le rang de φ en fonction de r et n.

Exercice 9 **Automorphisme. Supplémentarité en dimension quelconque**

f et g sont deux endomorphismes de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $f \circ g$ est un automorphisme de E.

ii) f est surjective, g est injective et $E = \operatorname{Ker} f \bigoplus \operatorname{Im} g$.

Exercice 10 **Sous-espaces vectoriels stables**

E est de dimension 3. f est un endomorphisme non nul de E et $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-espaces de E stables par f.

On suppose $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et on se propose de trouver $\mathcal{S}$.

Q1. Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. Montrer que $\operatorname{Im} f$ est une droite vectorielle et $\operatorname{Ker} f$ un plan vectoriel.

Q2. a) Soit D une droite de E appartenant à $\mathcal{S}$. Soit x un élément non nul de D.

Montrer qu'il existe λ dans $\mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda\, x$. Montrer que $\lambda = 0$. En déduire que $D \subset \operatorname{Ker} f$.

b) Énoncer et démontrer une réciproque.

Q3. a) Soit P un plan de E appartenant à $\mathcal{S}$.

Montrer que $f(P) \subset \operatorname{Im} f$! En envisageant deux cas, montrer que : $\operatorname{Im} f \subset P$.

b) Énoncer et démontrer une réciproque.

Q4. Conclure l'exercice.
