TD 6 MATRICES ET RÉDUCTION

Lundi 17 octobre 2011

Deux TD en un. TD 6 A I+II TD 6 B II+III

Si n est un élément de $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{S}_n$ est l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est à dire l'ensemble des matrices $M = (m_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à coefficients **réels et positifs ou nuls** telles que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ m_{i1} + m_{i2} + \cdots + m_{in} = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$$

PARTIE I

Dans cette partie E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ en est une base.

a et b sont deux réels de l'intervalle $]0, 1[$ tels que $\boxed{a + b = 1}$.

f est l'endomorphisme de E de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. On pose $v_1 = e_1 + e_2 + e_3$.

Q0 Vérifier que M est stochastique !

Q1 a) Donner une base du noyau de $g = f - \mathrm{Id}_E$ (ne pas oublier que $a + b = 1$).

b) Montrer que (e_2, e_3) est une base de l'image de g.

c) Prouver que $\mathrm{Ker}\, g$ et $\mathrm{Im}\, g$ sont supplémentaires.

d) Soit p la projection sur $\mathrm{Ker}\, g$ parallèlement à $\mathrm{Im}\, g$. Déterminer $p(v_1)$, $p(e_2)$, $p(e_3)$ et $p(e_1)$.

Expliciter la matrice P de p dans la base $\mathcal{B}$.

Aux choix Q2 ou Q2'

Q2 Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres de f. f est-il un endomorphisme diagonalisable ?

Q2' λ est un réel distinct de 1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E)$. En déduire les valeurs propres de f et les sous-espaces propres de f. f est-il un endomorphisme diagonalisable ?

Q3 a) Vérifier que $\mathcal{B}' = (v_1, e_2, e_3)$ est une base de E (si cela n'a pas encore été fait...) et donner la matrice M' de f dans $\mathcal{B}'$.

b) Calculer M'^k pour tout élément k de $\mathbb{N}$.

c) Déterminer l'inverse de la matrice de passage C de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

d) Calculer M^k pour tout élément k de $\mathbb{N}$. Déterminer la limite de la suite de terme général M^k (c'est à dire la matrice dont les coefficients sont les limites des coefficients de M^k) et comparer à la matrice P.

PARTIE II

Dans cette partie E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n ($n \geqslant 3$) et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ en est une base.

f est l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{n-1} & \cdots & \dfrac{1}{n-1} \\ \dfrac{1}{n-1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dfrac{1}{n-1} \\ \dfrac{1}{n-1} & \cdots & \dfrac{1}{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

On pose encore $v_1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$.

Q0 Vérifier que M est stochastique.

Q1 a) Montrer que (v_1) est une base du noyau de $g = f - \mathrm{Id}_E$.

b) Calculer $f(e_1 - e_k)$ et $g(e_1 - e_k)$ pour tout élément k de $[\![2, n]\!]$. Montrer que $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, \ldots, e_1 - e_n)$ est une base de l'image de g.

c) Prouver que $\mathrm{Ker}\, g$ et $\mathrm{Im}\, g$ sont supplémentaires.

d) Soit p la projection sur $\mathrm{Ker}\, g$ parallèlement à $\mathrm{Im}\, g$. Déterminer $p(v_1)$ et montrer que $p(e_1) = p(e_2) = \cdots = p(e_n)$.

Expliciter la matrice P de p dans la base $\mathcal{B}$.

e) Expliciter la matrice Q dans la base $\mathcal{B}$, de la projection q sur $\mathrm{Im}\, g$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, g$.

Q2 Sans nouveau calcul, donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Q3 Vérifier que $M = P - \dfrac{1}{n-1}\, Q$. En déduire M^k pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} M^k$ en fonction de P et Q.

Montrer que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de P et Q (très peu de calculs).

PARTIE III

Dans cette partie n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$.

Q1 V_1 est l'élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont des 1.

a) Montrer qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à coefficients réels positifs ou nuls est stochastique si et seulement si $MV_1 = V_1$.

b) Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{S}_n$ est un élément de $\mathcal{S}_n$.

Dans toute la suite E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ en est une base.

Q2 On pose $\forall x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k \in E,\ \|x\| = \mathrm{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$.

a) Montrer que $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall x \in E,\ \|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\|$.

b) Montrer que $\forall (x, y) \in E^2,\ \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Q3 Soit f un endomorphisme de E dont la matrice $M = (m_{ij})$ est un élément de $\mathcal{S}_n$.

a) Montrer que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| \leqslant \|x\|$ (on commencera par exprimer les coordonnées de $f(x)$ en fonction de celles de x).

b) Montrer que les modules des valeurs propres de f sont inférieurs ou égaux à 1.

c) Vérifier que 1 est valeur propre de f.

Q4 a) Soit y un élément de $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) \cap \text{Im}(f - \text{Id}_E)$. Alors il existe un élément x de E tel que $y = f(x) - x$.

Exprimer $f^2(x)$ en fonction de x et de y. Plus généralement exprimer $f^k(x)$ en fonction de x et de y pour tout élément k de $\mathbb{N}$.

Déduire de tout ce qui précède que : $\forall k \in \mathbb{N},\ k\,\|y\| \leqslant 2\|x\|$. Prouver enfin que y est nul.

b) Montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Im}(f - \text{Id}_E)$ sont supplémentaires.

c) Montrer que $\text{Im}(f - \text{Id}_E)$. est stable par f. Etablir que tout sous-espace propre de f associé à une valeur propre autre que 1 est inclus dans $\text{Im}(f - \text{Id}_E)$.

On suppose désormais que f est diagonalisable et f distinct(e) de Id_E.

Q5 a) Montrer que la somme directe des sous-espaces propres de f associés aux valeurs propres autres que 1 est égale à $\text{Im}(f - \text{Id}_E)$.

b) On complète une base $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ de $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ en une base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de vecteurs propres de f telle que, si on note λ_1, λ_2, ..., λ_n les valeurs propres associées à v_1, v_2, ..., v_n, on ait :

$$1 = |\lambda_1| = \cdots = |\lambda_r| > |\lambda_{r+1}| \geqslant ... \geqslant |\lambda_n|.$$

J'ai respecté le texte ! Notons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_p = 1$ et qu'ainsi $r \geqslant p$. Si $r > p$, λ_{p+1}, ..., λ_r sont des valeurs propres de f de module 1 distinctes de 1.

Soit D la matrice de f dans $\mathcal{B}'$. Montrer que la suite (M^k) converge si et seulement si la suite (D^k) converge.

c) En déduire que la suite (M^k) converge si et seulement si 1 est la seule valeur propre de M de module 1.

d) Dans ces conditions, montrer que la limite de la suite (M^k) est la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la projection p sur $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Im}(f - \text{Id}_E)$.

Que permet de préciser le résultat établi dans la partie I ?