TD 6 C MATRICES ET RÉDUCTION

Lundi 17 octobre 2011

Exercice 1 Matrice nilpotente. QSP

a est un réel strictement positif. p est un élément de $\mathbb{N}^*$.

Q1. P est la partie régulière du développement limité en 0 à l'ordre p de $f : x \to \sqrt{a+x}$.

Montrer que $P^2 - a - X$ est un multiple de X^{p+1}.

Q2. M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^{p+1} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Montrer qu'il existe un élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^2 = a\, I_n + M$

Exercice 2 Pseudo-inverse d'une matrice ESCP 98

n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit A une matrice de E de rang p. On appelle pseudo-inverse de A tout élément X de E tel que :

$$AXA = A,\ XAX = X \text{ et } AX = XA$$

Q1. Ici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2. A admet-elle un pseudo-inverse ?

Q2. Même chose avec $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q3. On suppose A inversible. Déterminer l'ensemble des pseudo-inverses de A.

Q4. X et X' sont deux pseudo-inverses de A. En partant de $AXAX'$, montrer que $AX' = XA$, puis que $X = X'$. Conclusion ?

Q5. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$.

a) On suppose que X est un pseudo-inverse de A. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice X dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$.

Montrer que $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f$ et que $\mathbb{K}^n = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

b) Réciproquement on suppose que $\mathbb{K}^n = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$. Montrer que A possède un pseudo-inverse.

Exercice 3 Matrices inversibles. QSP

$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $n \neq p$. Montrer que AB et BA ne sont pas simultanément inversibles.

Exercice 4 Polynômes de matrices

A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que : $AB - BA = A$.

Q1. a) Exprimer de manière simple $A^kB - BA^k$ en fonction de A^k pour tout k dans $\mathbb{N}$.

b) Montrer que pour tout P dans $\mathbb{K}[X] : P(A)B - BP(A) = AP'(A)$.

Q2. On rappelle qu'il existe un polynôme non nul Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que : $Q(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

a) Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N} : A^kQ^{(k)}(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

b) En déduire qu'il existe un élément r de $\mathbb{N}$ tel que : $A^r = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Exercice 5 Formes linéaires. QSP

Trouver toutes les formes linéaires f sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $\forall (M,N) \in E^2,\ f(MN) = f(NM)$.

Exercice 6 **Formule d'inversion de Pascal**. HEC 1998

Q1. n est un élément de $\mathbb{N}$. a) Vérifier rapidement que l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P(X)) = P(X+1)$$

est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer φ^{-1}.

b) Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer M^{-1}.

Q2. n est un élément de $\mathbb{N}$. On suppose que $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ et $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ appartiennent à $\mathbb{R}^{n+1}$ et vérifient :

$$\forall j \in [\![0,n]\!],\ b_j = \sum_{k=0}^{j} \mathrm{C}_j^k\, a_k.$$

a) Trouver un lien entre les deux matrices lignes $(a_0, a_1, \dots, a_n)$, $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ et M.

b) En déduire, pour tout j dans $[\![0,n]\!]$, l'expression de a_j en fonction des nombres b_0, ..., b_j.

Q3. Retouver le nombre de surjections d'un ensemble de p éléments dans un ensemble de n éléments.

Exercice 7 **Formes linéaires sur $\mathcal{M}_\mathbf{n}(\mathbb{K})$**

Q1. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on pose : $f_A(M) = \mathrm{tr}(MA)$. Montrer que f_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q2. Envisager une réciproque.

Exercice 8 **Produit matricielle. SQP**

A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que : $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ ACB = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Montrer que A est nulle ou B est nulle.

Exercice 9 **Rang. HEC 2001**

n est un élément de $\mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si r est un élément de $[\![1,n]\!]$, on note J_r la matrice diagonale dont les r premiers éléments de la diagonale valent 1 et les suivants 0.

φ est une application **non constante** de E dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (A,B) \in E^2,\ \varphi(AB) = \varphi(A)\,\varphi(B)$.

Q1. Préciser $\varphi(0_E)$ et $\varphi(J_n)$. Que dire de $\varphi(A)$ si A est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Q2. Montrer que si A est une matrice inversible de E, $\varphi(A)$ est un réel non nul.

Q3. On se propose d'établir la réciproque du résultat précédent.

a) Soient f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et g un automorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que f, $g \circ f$ et $f \circ g$ ont même rang.

b) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de rang r non nul. Montrer qu'il existe deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ telles que la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ soit J_r.

c) Montrer que si A est une matrice de E de rang r non nul : $\varphi(A) = 0$ si et seulement si $\varphi(J_r) = 0$.

d) Montrer que si r est un élément de $[\![1,n-1]\!]$ alors $\varphi(J_r) = 0$. Conclure.
