TD 7 B - RÉDUCTION 2011-2012

Lundi 7 novembre 2011.

Exercice 1 **Lien entre la réduction de u et celle de u^2**

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n non nulle.

u est un endomophisme de E tel que u^2 soit diagonalisable.

Q1. Montrer que si u est diagonalisable alors $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$.

Q2. On suppose que λ est une valeur propre non nulle de u^2 telle qu'il existe α dans $\mathbb{K}$ vérifiant $\alpha^2 = \lambda$.

Montrer que SEP $\big(u^2, \lambda\big) = \operatorname{Ker}(u - \alpha Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(u + \alpha Id_E)$.

En déduire qu'il exite une base de SEP $\big(u^2, \lambda\big)$ constituée de vecteurs propres de u.

Q3. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que si $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$ alors u est diagonalisable. Et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Exercice 2 **QNP-Oral**

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe p dans $\mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_n$.

Montrer que $A^2 = I_n$.

Exercice 3 **L'endomorphisme $\mathbf{M} \to \mathbf{AM} - \mathbf{MA}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**

Q1. $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

a) Montrer que la famille $(E_p{}^tE_q)_{(p,q)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ sont deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $(X_p{}^tY_q)_{(p,q)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$(on pourra montrer que cette famille génère ... les éléments de la famille précédente).

Q2. A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose : $\varphi(M) = AM - MA$.

a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que si X est un vecteur propre de A et Y un vecteur propre de ${}^tA$, $X{}^tY$ est un vecteur propre de φ.

Q3. On suppose A diagonalisable.

a) Montrer que A et ${}^tA$ ont même spectre. Montrer que ${}^tA$ est diagonalisable.

b) Utiliser ce qui précède pour prouver que φ est diagonalisable. Quel est le spectre de φ ?

Exercice 4 **QNP-Oral**

n est un élément de $\mathbb{N}^*$. $E = \mathbb{R}_n[X]$ et A est un élément non nul de E.

f est l'application qui à tout élément P de E associe la dérivée $n^{\text{ème}}$ de AP.

Montrer que f est un endomorphisme de E. f est-il diagonalisable ?

Exercice 5 **ESCP 2005 2.14** **Réduction.**

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie $n \geqslant 1$.

On considère un endomorphisme u de E et on note φ l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même définie par :

$\forall\, v \in \mathcal{L}(E), \varphi(v) = u \circ v$.

Q1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

Q2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

a) Montrer que si λ est une valeur propre de φ, alors λ est une valeur propre de u.

b) Etablir la réciproque (on pourra faire intervenir un projecteur).

Q3. a) Notons $E(\lambda, \varphi)$ le sous-espace propre de φ associé à la valeur propre λ et $E(\lambda, u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ.

Montrer que $E(\lambda, \varphi) = \mathcal{L}(E, E(\lambda, u))$.

b) En déduire que φ est diagonalisable si et seulement si u est diagonalisable.

Exercice 6 **QNP-Oral** A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geqslant 2$). On suppose que A est de rang 1.

Trouver des conditions nécessaires et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Exercice 7 HEC 97 A étant une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'application F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ F(M) = AM.$$

Q1. Montrer que F est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q2. Montrer que F est bijective si et seulement si A est inversible.

Q3. a) Soit μ une valeur propre de A et $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ un vecteur propre associé. Soient $M = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix}$ et $N = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix}$. Montrer que ces matrices sont des vecteurs propres de F associés à μ.

b) Montrer que si μ est une valeur propre de F alors μ est une valeur propre de A.

Q4. Montrer que si A est diagonalisable alors F est diagonalisable.

Q5. Montrer que si F est diagonalisable alors A est diagonalisable.

Exercice 8 **ESCP 94 17** **Racines carrées d'une matrice non diagonalisable**.

f est l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ de matrice, dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f. f est-il diagonalisable ?
Q2. On suppose que g est un endomorphisme de E vérifiant : $g \circ g = f$.

a) Montrer que $g(e_2)$ et $g(e_3)$ sont des vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres 1 et 4.

En déduire que e_2 et e_3 sont des vecteurs propres de g. g est-il diagonalisable ?

b) Montrer que l'ensemble des valeurs propres de g est $\{1, 2\}$ ou $\{-1, -2\}$ ou $\{1, -2\}$ ou $\{-1, 2\}$.

c) Montrer qu'il existe deux réels δ et ε tels que :

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 1/(2\delta) & \delta & 0 \\ 1/(\delta + 2\varepsilon) & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}$$

Q3. Résoudre l'équation :

$$X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad X^2 = A$$
