TD 7 A - RÉDUCTION 2011-2012

Lundi 7 novembre 2011.

Exercice 1 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. f et g sont les endomorphismes de E ayant respectivement pour matrices dans la base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Q1. a) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de g.

b) Calculer $(A - I_3)^2$; f est-il diagonalisable ? Montrer que les vecteurs propres de g sont des vecteurs propres de f.

Q2. Trouver une base de E par rapport à laquelle les matrices de f et g sont triangulaires. Déterminer les matrices de f et g dans cette base.

Exercice 2 E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n. f et g sont deux automorphismes de E.

On rappelle qu'un automorphisme "conserve la dimension".

Q1. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

Q2. Soit λ une valeur propre de $f \circ g$ et $g \circ f$. On pose $F_\lambda = \text{Ker}(f \circ g - \lambda Id_E)$ et $G_\lambda = \text{Ker}(g \circ f - \lambda Id_E)$.

Montrer que : $g(F_\lambda) \subset G_\lambda$ et $f(G_\lambda) \subset F_\lambda$. En déduire que F_λ et G_λ ont même dimension.

Q3. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont simultanément diagonalisables.

Exercice 3 **Racines $n^{\text{ème}}$ d'une matrice**.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. (E_1, E_2, E_3) est la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Q1. Donner les valeurs propres et les sous espaces de A. A est-elle diagonalisable ?

Q2. n est un élément de $\mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des éléments B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^n = A$.

a) Soit B un élément de $\mathcal{R}$. Montrer que B commute avec A.

En déduire que les vecteurs propres de A sont des vecteurs propres de B. Que dire de BE_2 et BE_3. Montrer qu'il existe trois réels a, b et f tels que : $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

b) Déterminer $\mathcal{R}$.

Exercice 4 n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout P dans E on pose

$$f(P) = (X^2 - 1)P' - nXP.$$

Q1. Prouver que f est un endomorphisme de E (la linéarité est claire).

Q2. Soit λ un réel et P un élément non nul de E tels que : $f(P) = \lambda P$.

a) Montrer que P est de degré n (on pourra noter r le degré de P et a_r le coefficient du terme de plus haut degré de P).

b) Soit α un zéro de P dans $\mathbb{C}$ d'ordre de multiplicité k. Que dire pour P' ? Montrer alors que nécessairement α vaut 1 ou -1.

En déduire qu'il existe c dans $\mathbb{R}^*$ et p dans $[\![0,n]\!]$ tels que : $P = c\,(X-1)^p(X+1)^{n-p}$.

Préciser la dimension de SEP (f,λ). Exprimer λ en fonction de p et de n. Donner une base de SEP (f,λ).

c) Conclure cette première phase.

Q3. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Exercice 5 **Endomorphismes vérifiant $\mathbf{f\circ g - g\circ f = g}$**

E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$. f et g sont deux endomorphismes de E tel que : $f\circ g - g\circ f = g$.

Q1. Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}$: $f\circ g^k - g^k\circ f = kg^k$.

Q2. Pour tout u dans $\mathcal{L}(E)$ on pose : $\varphi(u) = f\circ u - u\circ f$.

a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

b) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que g est nilpotent (c'est à dire qu'il existe r dans $\mathbb{N}$ tel que $g^r = 0_{\mathcal{L}(E)}$).

Exercice 6 $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

u est l'endomorphisme de E de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

Q2. Pour tout f dans $\mathcal{L}(E)$, on pose : $\varphi(f) = u\circ f$.

Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$. Trouver ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

Exercice 7 **ESCP 2005 2.14** **Réduction.**

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie $n \geqslant 1$.

On considère un endomorphisme u de E et on note φ l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même définie par :

$\forall\, v \in \mathcal{L}(E), \varphi(v) = u\circ v$.

Q1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

Q2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

a) Montrer que si λ est une valeur propre de φ, alors λ est une valeur propre de u.

b) Etablir la réciproque (on pourra faire intervenir un projecteur).

Q3. a) Notons $E(\lambda,\varphi)$ le sous-espace propre de φ associé à la valeur propre λ et $E(\lambda,u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ.

Montrer que $E(\lambda,\varphi) = \mathcal{L}(E, E(\lambda,u))$.

b) En déduire que φ est diagonalisable si et seulement si u est diagonalisable.
