TD 8 A, B et C- RÉDUCTION 2010-2011

Samedi 12 novembre 2011.

A : 1, 2, 3, 4, 5 **B : 1, 2, 6, 7, 9.** **C : 6, 7, 9, 8.**

Exercice 1 Edhec 2011 ex1

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, notée n ($n \in N^*$) et u un endomorphisme de E.

On note Id_E l'identité de E.

Si $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_p X^p$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$, on rappelle qu'on désigne par $P(u)$ l'endomorphisme suivant :

$P(u) = a_0 \ \mathrm{Id}_E + a_1 \, u + ... + a_p \, u^p$ où u^k est la composée $\underbrace{u \circ u \ldots \circ u}_{k \text{ fois}}$ ($u^0 = \mathrm{Id}_E$ par convention).

Dans toute la suite Q est un polynôme qui admet 1 pour racine simple et tel que $Q(u) = 0$.

Ainsi on peut écrire $Q(X) = (X-1)\,Q_1(X)$ avec $Q_1(1) \neq 0$.

Q1. Montrer que l'image de $(u - \mathrm{Id}_E)$ est contenue dans $\mathrm{Ker}(Q_1(u))$.

Q2. On note $E_1 = Ker(u - \mathrm{Id}_E)$.

a) Montrer que si $x \in E_1$ alors $Q_1(u)(x) = Q_1(1)\,x$.

b) En déduire que $E_1 \cap \mathrm{Ker}(Q_1(u)) = \{0_E\}$.

c) En déduire l'aide du théorème du rang que $E = E_1 \oplus \mathrm{Ker}(Q_1(u))$.

Q3. Montrer que $Q_1(u) = 0$ si, et seulement si, 1 n'est pas valeur propre de u.

Q4. On suppose dans cette question que $Q(X) = (X-1)(X+1)^2$, que E est de dimension 3 et que 1 est valeur propre de u ; on note E_1 l'espace propre associé à la valeur propre 1.

Montrer que si la dimension de E_1 est supérieure ou égale à 2, l'endomorphisme u est diagonalisable (on pourra distinguer deux cas, suivant que la dimension de E_1 est égale 2 ou égale 3).

Exercice 2 Ecricome 2004 ex1

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ($n \geqslant 1$) et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$. $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$!

On considère une matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ distinctes deux à deux.

L'objet de l'exercice est de montrer que, si k est un entier naturel impair et si une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commute avec S^k, alors elle commute avec S. Dans la dernière question on étudiera un contre-exemple.

Dans toute la suite k est un entier naturel impair fixé.

Q1 Justifier l'existence d'une matrice P inversible telle que la matrice $P^{-1}SP$ soit une matrice D diagonale (on expliquera la manière dont on construit P).

Q2 On considère l'application f de E dans $\mathbb{R}^n$ qui à tout polynôme T fait correspondre le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$f(T) = \big(T(\lambda_1^k), T(\lambda_2^k), \ldots, , T(\lambda_n^k)\big)$$

a) Montrer que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

b) En déduire l'existence d'un unique polynôme U de E tel que :

$$U(\lambda_1^k) = \lambda_1,\ U(\lambda_2^k) = \lambda_2, \ldots, U(\lambda_n^k) = \lambda_n$$

Q3 Prouver que le polynôme R, défini par $R(X) = U(X^k) - X$ est un polynôme annulateur de D puis de S.

JF Ainsi $S = U(S^k)$.

Q4 Soit une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AS^k = S^k A$.

a) Montrer que pour tout entier naturel p, $AS^{pk} = S^{pk} A$.

b) En déduire que les matrices A et S commutent, c'est-à-dire que : $AS = SA$.

Q5 On considère les deux matrices A et S de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad , \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que S possède deux valeurs propres distinctes.

b) Montrer que A commute avec toute puissance paire de S, mais ne commute pas avec S.

Exercice 3 EDHEC 2005 ex 1

Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par I la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q1 On note tr l'application linéaire qui à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

a) Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$.

b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.

c) Etablir que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I)$.

Q2 Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $f(M) = M + \mathrm{tr}(M)I$

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Utiliser la première question pour déterminer les valeurs propres de f.

En déduire que f est un automorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q3 Soit g l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $g(M) = M + \mathrm{tr}(M)J$, où J désigne une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle. On admet que g est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Etablir que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g.

b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.

c) g est-il diagonalisable ?

Exercice 4 EDHEC 2006 ex 1

Dans cet exercice, m désigne un entier naturel non nul. On note id (respectivement θ) l'endomorphisme identité (respectivement l'endomorphisme nul) du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^m$ et on considère un endomorphisme f de $\mathbb{C}^m$ vérifiant : $(f - \lambda_1\, id) \circ (f - \lambda_2\, id) = \theta$, où λ_1 et λ_2 sont deux complexes distincts.

Q1. a) Vérifier que $\dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\big((f - \lambda_1\, id) - (f - \lambda_2\, id)\big) = id$.

b) En déduire que : $\mathbb{C}^m = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id)$.

c) Conclure que f est diagonalisable et donner ses valeurs propres (on sera amené à étudier trois cas).

Dans la suite de l'exercice, on désigne par n un entier naturel et l'on se propose de montrer qu'il n'existe pas de matrice de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$, où I désigne la matrice diagonale de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux valent 1.

Q2. Trouver une matrice A de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = -I$.

Q3 Dans cette question, on suppose qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$.

a) Utiliser la première question pour montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ et que ses valeurs propres sont i et $-i$.

b) Pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, on note $\overline{M}$ la matrice $(\overline{m_{i,j}})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$.

On note E_i et E_{-i} les sous-espaces propres de A associés aux valeurs propres i et $-i$.

Montrer que $X \in E_i \iff \overline{X} \in E_{-i}$.

c) En déduire que, si $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une base de E_i, alors $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_p})$ est une famille libre de E_{-i}.

Conclure que $\dim E_i = \dim E_{-i}$.

d) Établir enfin le résultat demandé.

Exercice 5 **Ecricome 1999 ex 2**

Q1. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Montrer que les valeurs propres de M sont 1 et 2 et déterminer les sous-espaces propres associés.

b) M est-elle diagonalisable ?

On se propose de calculer M^n pour tout entier naturel n.

Q2. Soit H et H' deux matrices réelles carrées d'ordre 4 écrites sous forme de blocs :

$H = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C & A \end{pmatrix}$ avec $O = (\,0 \quad 0 \quad 0\,)$, $C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $A = (\,a_{i,j}\,)_{1\leqslant i\leqslant 3, 1\leqslant j\leqslant 3}$

$H' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C' & A' \end{pmatrix}$ avec $O = (\,0 \quad 0 \quad 0\,)$, $C' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, $A' = (\,a'_{i,j}\,)_{1\leqslant i\leqslant 3, 1\leqslant j\leqslant 3}$

Vérifier que le produit HH' s'écrit sous forme de blocs : $HH' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C'' & AA' \end{pmatrix}$ où $C'' = C + AC'$.

Q3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe une matrice colonne U_n à 3 lignes telle que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & O \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$ où V est la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q4. *Calcul de V^n*

On pose $W = V - 2I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.

Pour tout entier naturel n, calculer W^n et écrire explicitement la matrice V^n.

Q5. *Calcul de U_n.*

a) Soit X la matrice colonne représentant dans la base canonique l'unique vecteur propre de M associé à la valeur propre 1, dont la première composante vaut 1.

Calculer MX puis $M^n X$.

b) On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déduire du 5 a) les valeurs de a_n, b_n et c_n.

Exercice 6 **QNP-Oral** A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $(n \geqslant 2)$. On suppose que A est de rang 1.

Trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que A soit diagonalisable.

Exercice 7 HEC 97 A étant une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'application F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ F(M) = AM.$$

Q1. **Facultatif** Montrer que F est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q2. Montrer que F est bijective si et seulement si A est inversible.

Q3. a) Soit μ une valeur propre de A et $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ un vecteur propre associé. Soient $M = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix}$ et $N = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix}$. Montrer que ces matrices sont des vecteurs propres de F associés à μ.

b) Montrer que si μ est une valeur propre de F alors μ est une valeur propre de A.

Q4. Montrer que si A est diagonalisable alors F est diagonalisable.

Q5. Montrer que si F est diagonalisable alors A est diagonalisable.

Exercice 8 **ESCP 94 17** **Racines carrées d'une matrice non diagonalisable**.

f est l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ de matrice, dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f. f est-il diagonalisable ?
Q2. On suppose que g est un endomorphisme de E vérifiant : $g \circ g = f$.

a) Montrer que $g(e_2)$ et $g(e_3)$ sont des vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres 1 et 4.

En déduire que e_2 et e_3 sont des vecteurs propres de g. g est-il diagonalisable ?

b) Montrer que l'ensemble des valeurs propres de g est $\{1, 2\}$ ou $\{-1, -2\}$ ou $\{1, -2\}$ ou $\{-1, 2\}$.

c) Montrer qu'il existe deux réels δ et ε tels que :

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 1/(2\delta) & \delta & 0 \\ 1/(\delta + 2\varepsilon) & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}$$

Q3. Résoudre l'équation :

$$X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad X^2 = A$$

Exercice 9 **ESCP 2005 2.2** **Réduction.**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$ et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires dans E et non réduits au vecteur nul.

Soit $u_1 \in \mathcal{L}(E_1)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2)$ et $u_3 \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$.

On note u l'endomorphisme de E tel que : $\begin{cases} \forall x \in E_1, u(x) = u_1(x) \\ \forall x \in E_2, u(x) = u_2(x) + u_3(x) \end{cases}$.

Q1. Donner la forme de la matrice de u dans une base de E obtenue en mettant “bout à bout” une base de E_1 et une base de E_2.

Q2. a) Soit $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $x = x_1 + x_2$.

Montrer que : $u(x) = \lambda x \Longleftrightarrow \begin{cases} u_1(x_1) + u_3(x_2) = \lambda x_1 \\ u_2(x_2) = \lambda x_2 \end{cases}$.

b) Montrer que si que λ est valeur propre de u alors λ est valeur propre de u_1 ou de u_2.

Montrer que si λ est valeur propre de u_1 alors λ est valeur propre de u.

Montrer que si λ est valeur propre de u_2 sans être valeur propre de u_1 alors λ est valeur propre de u.

c) Soit λ un réel qui est valeur propre de u_1 mais pas de u_2. Comparer les sous-espaces propres de u et de u_1 associés à λ.

d) Soit λ un réel qui est valeur propre de u_2 mais pas de u_1. Comparer les dimensions des sous-espaces propres de u et de u_2 associés à λ.

Q3. On suppose dans cette question que u_1 et u_2 n'ont pas de valeur propre commune. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u_1 et u_2 le sont.
