TD-COURS 4 REVISIONS D'ALGÈBRE 1 2011-2012

ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINÉAIRES

LES NOTIONS

- Espaces vectoriels (définition, exemples, propriétés immédiates).
- Sous-espaces vectoriels (définitions, caractérisations, exemples, propriétés).
- Familles génératrices. Familles libres, familles liées (définition, caractérisation, propriétés).
- Bases.
- Espaces vectoriels de dimension finie.
- Somme directe de sous-espaces.
- Sous-espaces supplémentaires.

- Application linéaire (définition, vocabulaire, exemples, propriétés immédiates).
- Opérations sur les applications linéaires.
- Noyau et image d'une application linéaire.
- Application linéaire bijective (definition, propriétés et caractérisations).
- Théorème du rang.
- Projections et projecteurs.
- Formes linéaires et hyperplans.
- Détermination d'une application linéaire.

SAVOIR FAIRE

- Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel.
- Montrer qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.
- Montrer qu'un famille d'éléments d'un espace vectoriel est libre (resp. liée ; resp. génératrice).
- Simplifier le sous-espace vectoriel engendré par une famille. En donner une base.
- Montrer qu'un famille d'éléments d'un espace vectoriel est une base de cet espace.
- Trouver les coordonnées d'un vecteur dans une base.
- Trouver une base d'un espace vectoriel ou d'un sous-espace vectoriel.
- Trouver la dimension d'un espace vectoriel ou d'un sous-espace vectoriel.
- Utiliser la caractérisation des bases en dimension finie.
- Utiliser le théorème de la base incomplète.
- Extraire une base d'une famille génératrice.
- Montrer que deux ou p sous-espaces vectoriels sont en somme directe.
- Montrer que deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie sont supplémentaires.
- Montrer que deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension quelconque sont supplémentaires.
- Construire un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel.

- Montrer qu'une application est linéaire.
- Montrer qu'une application est un endomorphisme.
- Utiliser les propriétés des opérations sur les applications linéaires.
- Trouver l'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.
- Définir analytiquement une application linéaire.
- Trouver le noyau et l'image d'une application linéaire.
- Trouver le rang d'une application linéaire.
- Montrer qu'une application linéaire est injective, surjective, bijective.

- Déterminer la réciproque d'une application linéaire bijective.
- Montrer que deux espaces vectoriels sont isomorphes.
- Construire un isomorphisme pour trouver la dimension d'un espace vectoriel.
- Montrer qu'une application linéaire est une projection et trouver ses éléments.

Exercice 1 ★ **Espaces vectoriels isomorphes.**

Q0. Faire un rappel complet sur les suites définies par une relation de récurrence d'ordre 2.

Q1. F est l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N},\ 2u_{n+3}-3u_{n+2}-8u_{n+1}-3u_n=0$.

Montrer que F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Q2. Pour tout élément $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de F on pose $\varphi\big((u_n)_{n\geqslant 0}\big)=(u_0,u_1,u_2)$.

a) Montrer que φ est un isomorphisme de F sur $\mathbb{R}^3$. En déduire la dimension de F.

b) Trouver l'ensemble des réels non nuls q tels que $(q^n)_{n\geqslant 0}$ soit dans F. Donner une base de F.

Exercice 2 **Opérations sur les applications linéaires 1.**

p et q sont deux endomorphismes non nuls de E tels que $p+q=\mathrm{Id}_E$. a et b sont deux éléments distincts de $\mathbb{K}$.

f est un endomporphisme de E tel que $f=ap+bq$ et $f^2=a^2p+b^2q$.

Q1. Montrer que : $(f-a\ \mathrm{Id}_E)\circ(f-b\ \mathrm{Id}_E)=(f-b\ \mathrm{Id}_E)\circ(f-a\ \mathrm{Id}_E)=0_{\mathcal{L}(E)}$, $f-a\ \mathrm{Id}_E=(b-a)q$ et $f-b\ \mathrm{Id}_E=(a-b)p$.

Q2. Calculer $p\circ p$, $q\circ q$, $p\circ q$ et $q\circ p$. Calculer f^n en fonction de n, a, b, p et q pour tout élément n de $\mathbb{N}$.

Exercice 3 **Opérations sur les applications linéaires 2.**

Montrer que si f et g sont deux endomophismes nilpotents de E tels que $f\circ g=g\circ f$ alors $f+g$ et $f\circ g$ sont nilpotents.

► **Contrôle** $E=\mathbb{K}_n[X]$ ($n\in[\![2,+\infty[\![$). On considère l'endomorphisme f de E défini par $\forall P\in E,\ f(P)=P'$. $g=Id_E-f$.

Que dire de $(\mathrm{Id}_E)^{n+1}-f^{n+1}$? Montrer que g est un automorphisme de E et exprimer g^{-1} en fonction de f.

Exercice 4 ★ **Noyau et image d'une application linéaire 1. Supplémentarité en dimension finie.**

Q1. Faire un rappel sur la supplémentarité.

Q2. $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ est une base de E et f est l'endomorphisme de E de matrice $A=\begin{pmatrix}1&1&t\\0&1&-1\\-1&1&-2\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires.

Exercice 5 ★ **Supplémentarité en dimension finie again.**

$\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ est une base de E.

$F=\{xe_1+ye_2+ze_3+te_4\in E\mid x-y+z+t=0 \text{ et } 2y-z+t=0\}$ et $G=\mathrm{Vect}(e_1+e_2,e_1-e_3+2e_4)$.

Montrer que F est un sous espace de E et que G est un supplémentaire de F.

Exercice 6 $\boxed{\bigstar}$ **Noyau et image d'une application linéaire 2. Construction de bases.**

$E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. $\forall M \in E,\ f(M) = AM$.

Montrer que f est un endomorphisme de E. Donner une base de son noyau et une base de son image.

Exercice 7 $\boxed{\bigstar\bigstar}$ **Endomorphisme d'un espace vectoriel de polynômes. Noyau et image 3.**

$E = \mathbb{R}_3[X]$, $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$.

A tout P élément de E on associe le reste $f(P)$ dans la division de AP par B.

Q0. Rappeler avec précision le théorème de la division euclidienne.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E et trouver sa matrice dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$.

Q2. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Exercice 8 $\boxed{\bigstar}$ **Projections et projecteurs. Différence de deux projecteurs.**

Q1. Faire un rappel complet sur les projections.

Q2. p et q sont deux projections de E. $f = p - q$.

a) On suppose que f est une projection. Montrer que : $p \circ q + q \circ p = 2q$ et que : $p \circ q = q \circ p = q$.

b) Réciproquement on suppose que $p \circ q = q \circ p = q$. Montrer que f est une projection parallèlement à $\operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} q$.

Déterminer $\operatorname{Im} f$.

Exercice 9 **Symétrie vectorielle.**

Q1. F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E. s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Montrer que :

a) s est un endomorphisme de E.

b) $F = \{u \in E |\ s(u) = u\} = \operatorname{Ker}(s - Id_E)$ et $G = \{u \in E |\ s(u) = -u\} = \operatorname{Ker}(s + Id_E)$.

c) $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ et s est un automorphisme involutif de E.

Q2. Soit f une application de E dans E.

Montrer que $\boxed{f \text{ est une symétrie}}$ si et seulement si $\boxed{f \text{ est linéaire } \boxed{\text{et}}\ f \circ f = \mathrm{Id}_E}$.

Exercice 10 **Caractérisation des isomorphismes.**

Q1. φ est une application de X dans Y et ψ est une application de Y dans Z.

Q2. Montrer que si $\psi \circ \varphi$ est injective alors φ est injective et si $\psi \circ \varphi$ est surjective alors ψ est surjective.

f est une application linéaire de E dans E'. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est bijective.

ii) Il existe une application g de E' dans E telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ $\boxed{\textbf{et}}$ $f \circ g = \mathrm{Id}_{E'}$.

Exercice 11 **Polynôme d'endomorphisme**. f est un endomorphisme de E. Si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ est un élément $\mathbb{K}[X]$, on note $P(f)$ l'endomorphisme $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k f^k$.

Q1. λ appartient à $\mathbb{K}$. P et Q sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que :

$\boxed{(\lambda P + Q)(f) = \lambda P(f) + Q(f)}$ $\boxed{(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)}$.

Exercice 12 **Polynôme annulateur 1. Existence en dimension finie.**

f est un endomorphisme de dimension n. Montrer que f possèsse un polynôme annulateur non nul.

Exercice 13 **Polynôme annulateur 2. Polynôme minimal.** ★

E est un espace vectoriel de dimension n non nulle sur $\mathbb{K}$.

f est un endomorphisme de E et $\mathcal{S}$ est l'ensemble des polyômes annulateurs de f.

Ainsi $\mathcal{S} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$.

Q1. a) Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de

b) Montrer que si P appartient à $\mathcal{S}$ et si Q appartient à $\mathbb{K}[X]$, PQ appartient à $\mathcal{S}$.

Q2. a) Justifier l'existence d'un plus petit élément r pour $\{\deg P\,;\, P \in \mathcal{S} - \{0_{\mathbb{K}[X]}\}\}$. A est un polynôme de $\mathcal{S}$ de degré r.

b) En utilisant la division euclidienne montrer que tout élément P de $\mathcal{S}$ est divisible par A. En déduire que $\mathcal{S}$ est l'ensemble de multiples de A.

c) Montrer qu'il existe un polynôme unitaire B et un seul tel que $\mathcal{S}$ soit l'ensemble de multiples de B.

Exercice 14 **Polynôme annulateur 3. Polynôme annulateur et inversibilité.**

f est un endomorphisme de E et $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ est un polynôme annulateur de f.

Montrer que si $P(0) \neq 0$ (c'est à dire si $a_0 \neq 0$) alors f est un automorphisme de E et déterminer f^{-1}

Exercice 15 ★ **Noyau d'un endomorphisme. Supplémentarité en dimension quelconque.**

f est un endomorphisme de E. On suppose que $f^3 - f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Prouver que $\operatorname{Ker} f^2$ et $\operatorname{Ker}(f - Id_E)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 16 ★ **Application du résultat précédent 1. Interpolation de Lagrange.**

f est une application de I dans $\mathbb{R}$. x_0, x_1, ..., x_n sont $\boxed{n+1 \text{ points distincts}}$ de I.

On se propose de montrer qu'il existe un unique polynôme P, de degré au plus n, qui coïncide avec f en x_0, x_1, ..., x_n.

Q0. Faire le point sur la caractérisation des isomorphismes.

Q1. Version 1. On pose $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = \big(P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)\big)$. Montrer que φ est un isomorphisme. Conclure.

Q2. Version 2. Pour tout élément k de $[\![0, n]\!]$, U_k est le quotient de $U = \prod\limits_{i=0}^{n}(X - x_i)$ par $X - x_k$ et $L_k = \dfrac{1}{U_k(x_k)}\, U_k$.

Montrer que $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Trouver les coordonnées d'un élément P de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base. Retouver le résultat.

Exercice 17 **Application du résultat précédent 2. Endomorphisme symétrisable (ou inversible) à droite ou à gauche en dimension finie.**

f est un endomorphisme de E et E est de de **dimension finie**. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est bijectif.

ii) Il existe une application g' de E dans E telle que $g' \circ f = \mathrm{Id}_E$.

iii) Il existe une application g'' de E dans E telle que $f \circ g'' = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 18 **De l'importance des hypothèses dans le théorème précédent**

On considère l'endomorphisme Δ de $\mathbb{K}[X]$ défini par $\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \Delta P = P(X+1) - P(X)$.

Q1. Déterminer $\operatorname{Ker} \Delta$.

Q2. Déterminer $\Delta(\mathbb{K}_n[X])$ pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$.

Q3. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$, non injectif mais surjectif.

Exercice 19 **Supplémentaire. Noyau, image. Projection.**

F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

$\mathcal{S}$ est l'ensemble des endomorphismes f de E tels que : $\operatorname{Im} f = F$ et $\operatorname{Ker} f = G$.

Q1. Montrer que si f et g sont dans $\mathcal{S}$, $f \circ g$ aussi.

Q2. p est la projection sur F parallèlement à G. Montrer que p est dans $\mathcal{S}$ et que $\forall f \in \mathcal{S},\ f \circ p = p \circ f = f$.

En plus Montrer que si f est dans $\mathcal{S}$, il existe un élément f' de $\mathcal{S}$, et un seul, tel que : $f \circ f' = f' \circ f = p$.

Exercice 20 ★ **Tout supplémentaire du noyau est isomorphe à l'image. Théorème du rang.**

f est une application linéaire de E dans E'. G est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$. On note h l'application de G dans $\operatorname{Im} f$ qui a tout élément x de G associe $f(x)$.

Montrer que h est un isomorphisme de G dans $\operatorname{Im} f$. En déduire le théorème du rang.

Exercice 21 **Un peu de rang.**

f est une application linéaire de E dans E' et g est une application linéaire de E' dans E''. $\dim E' = n$.

Montrer que :

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - n \leqslant \operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{Min}(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$$

(on pourra considérer la restriction h de g à $\operatorname{Im} f$.)

Exercice 22 **Construction de base. Théorème de la base incomplète.**

$\dim_{\mathbb{K}} E = 3$. f est un endomorphisme de E tel que $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 23 **Définition analytique d'une projection.**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. f est l'endomorphisme de matrice $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Montrer que f est une projection et donner une base de chacun de ses éléments.

Exercice 24 ★ **Intersection de deux hyperplans.**

$n \in [\![2, +\infty[\![$. E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$.

Montrer que l'intersection de deux hyperplans distincts de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-2$.

Exercice 25 ★ **Formes linéaires et hyperplans.**

n est un élément de $\mathbb{N}^*$ et n est la dimension de E.

Q1. f est une forme linéaire **non nulle** sur E. Préciser son rang et la dimension de son noyau.

Q2. H est un hyperplan de E. Montrer que c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

Exercice 26 **Equation d'un hyperplan.**

n est un élément de $\mathbb{N}^*$. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E.

Q1. $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est un élément non nul de $\mathbb{K}^n$.

Montrer que $H = \{u = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n \in E \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ est un hyperplan de E.

Q2. Réciproquement soit H un hyperplan. Montrer qu'il existe un élément non nul $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $\mathbb{K}^n$ tel que

$H = \{u = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n \in E \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}$.

$\mathbf{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0}$ est alors une équation de H dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 27 ★ **Equation$\boxed{\text{s}}$ d'un hyperplan.**

n est un élément de $\mathbb{N}^*$. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E.

Q1. φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles sur E.

Montrer qu'il existe un élément non nul λ de $\mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda\,\varphi$ si et seulement si $\operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Ker}\varphi$.

Q2. $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ et $b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0$ sont deux équations d'un même hyperplan H de E dans la base $\mathcal{B}$.

Montrer qu'il existe un élément non nul λ de $\mathbb{K}^n$ tel que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ b_k = \lambda\, a_k$.

POUR FINIR LA PAGE

Exercice 28 **Encore du rang** E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$. f est un endomorphisme de E de rang r.

Q1. $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \varphi(u) = f \circ u$. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ et donner son rang en fonction de r (considérer le noyau).

Q2. Même chose en posant : $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \varphi(u) = u \circ f$.

Exercice 29 f est une application linéaire de E dans E' et g une application linéaire de E' dans E telles que $f \circ g = Id_{E'}$.

Q1. Préciser $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} f$.

Q2. Montrer que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$ et que $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f$.

Q3. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires.
