TD-COURS 11 CONVERGENCE ET APPROXIMATION 2011-2012

- Convergence en probabilité.
- Loi faible des grands nombres.
- La convergence en loi.
- La convergence en probabilité donne la convergence en loi. La réciproque est fausse.
- La convergence en loi pour les variables aléatoires discrètes.
- Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binômiale.
- Approximation d'une loi binômiale par une loi de Poisson.
- Théorème de la limite centrée.
- Approximation d'une loi binômiale par une loi de normale.

Exercice 1 **Définitions équivalentes de la convergence en probabilité.**

Soit $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) La suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X.

i') $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \lim\limits_{n\to+\infty} P\{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\}) = 0$; ii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \lim\limits_{n\to+\infty} P\{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0$;

iii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \lim\limits_{n\to+\infty} P\{|X_n - X| \leqslant \varepsilon\}) = 1$; iv) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \lim\limits_{n\to+\infty} P\{|X_n - X| < \varepsilon\}) = 1$.

Exercice 2 ★ **Un premier exemple de convergence en probabilité.**

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi uniforme sur $[a, b]$. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M_n = \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\mathrm{Max}}\ X_k$.

Montrer que la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine b.

► **Contrôle.** Et $\big(\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\mathrm{Min}}\ X_k\big)_{n\geqslant 1}$?

Exercice 3 ★★ **Une condition suffisante pour avoir convergence en probabilité.**

Soit $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Q1. Un cas très particulier mais usuel.

On suppose que $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ E(X_n - X) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V(X_n - X) = 0$.

Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X.

Q2. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n - X) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V(X_n - X) = 0$.

Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X.

Exercice 4 **Un second exemple de convergence en probabilité utilisant le résultat précédent**

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ et $Y_n = e^{F_n}$. Montrer que $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à e^p.

Exercice 5 **Un troisième exemple de convergence en probabilité illustrant le fait que cette condition n'est pas nécessaire**.

Pour tout élement n de $\mathbb{N}^*$, X_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que :

$$X_n(\Omega) = \left\{\frac{1}{n}, n\right\},\ p\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1} \text{ et } P(\{X_n = n\}) = \frac{1}{n+1}\cdot$$

Q1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine X égale à 0.

Q2. Etudier $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n - X)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V(X_n - X)$.

Exercice 6 **Un quatrième exemple de convergence en probablilité. Loi faible des grands nombres**

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles ayant même espérance m et même variance σ^2. On suppose que les variables aléatoires réelles de cette suite sont indépendantes.

Q1. Montrer que $p\left(\left|\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$

Q2. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire réelle certaine égale à m.

Exercice 7 **Un premier exemple de convergence en loi**.

a et b sont deux réels tels que $a < b$. n est un élémentde $\mathbb{N}^*$.

Pour tout k dans $[\![0, n]\!]$ on pose $x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$. On choisit au hasard un élément de l'ensemble $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

X_n est la variable aléatoire réelle égale au point choisit.

Q1. Trouver la loi de X_n, son espérance et sa fonction de répartition.

Q2. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $[a, b]$.

▶ **Contrôle.** X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Y_n = \dfrac{\text{Ent}\,(nX)}{n}\cdot$ Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi.

Exercice 8 ★ **Un second exemple de convergence en loi**.

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variable aléatoires indépendantes qui suivent une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Montrer que la suite de terme général $Z_n = n\,\text{Min}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ converge en loi.

▶ **Contrôle.** λ est un réel strictement positif et n_0 un entier strictement plus grand que λ.

Pour tout élément n de $[\![n_0, +\infty[\![$, X_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}$.

Montrer que la suite de terme général $\dfrac{X_n}{n}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité Z dont on précisera la loi.

Exercice 9 ★★ **Un troisième exemple de convergence en loi**.

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variable aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi exponentielle de paramètre 2.

Montrer que la suite de terme général $Z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{Max}(e^{X_1}, e^{X_2}, \dots, e^{X_n})$ converge en loi.

► **Contrôles.** Q1. Reprendre l'exercice précédent en remplaçant 2 par λ ($\lambda > 0$) et $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ par $\dfrac{1}{n^{\frac{1}{\lambda}}}$·

Q2. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variable aléatoires indépendantes qui suivent une loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$ on pose : $Z_n = \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\mathrm{Max}}\,(X_k) - \ln n$. Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi.

Exercice 10 ★ **Un quatrième exemple de convergence en loi**.

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et qu'il existe un réel λ_n tel que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(\{X_n = k\}) = \lambda_n k$.

Q1. n est élément de $\mathbb{N}^*$. Calculer λ_n et déterminer la fonction de répartition de $Y_n = X_n/n$.

Q2. Montrer que la suite de terme général Y_n converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on précisera une densité.

► **Contrôle.** On tire deux fois de suite avec remise dans une urne contenant n boules ($n \in [\![2, +\infty[\![$) numérotées de 1 à n.

X_n (resp. Y_n) est la variable aléatoire égale au numéro tiré lors du premier (resp. second) tirage.

Montrer que la suite de terme général $S_n = \dfrac{X_n + Y_n}{n}$ converge en loi.

Exercice 11 **La convergence en probabilité donne la convergence en loi**.

$(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X et on se propose de montrer que cette suite converge en loi vers X.

On note F la fonction de répartition de X et pour tout n dans $[\![n_0, +\infty[\![$, F_n la fonction de répartition de X_n.

Soit x un réel où F est continue. On se propose donc de montrer que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists r \in [\![n_0, +\infty[\![,\ \forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ n \geqslant r \Rightarrow |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon.$$

Soit ε un réel strictement positif.

Q1. Montrer que l'on peut trouver un réel α strictement positif tel que : $|F(x-\alpha) - F(x)| < \varepsilon/2$ et $|F(x+\alpha) - F(x)| < \varepsilon/2$.

Q2. Soit n un élément de $[\![n_0, +\infty[\![$. Montrer que $\{X_n \leqslant x\} \subset \{X \leqslant x + \alpha\} \cup \{|X - X_n| \geqslant \alpha\}$ (prendre ω dans Ω tel que $X_n(\omega) \leqslant x$ et distinguer deux cas : $X(\omega) \leqslant x + \alpha$ et $X(\omega) > x + \alpha$).

En déduire que : $F_n(x) - F(x) \leqslant \varepsilon/2 + P(|X_n - X| \geqslant \alpha)$.

Montrer que $F_n(x) - F(x) \geqslant -\varepsilon/2 - P(|X_n - X| \geqslant \alpha)$. Conclure.

Exercice 12 **La convergence en loi ne donne pas la convergence en probabilité**.

Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi normale centrée réduite. On pose : $X = -Y$. Pour tout élément n de $\mathbb{N}$, on pose encore : $X_n = Y$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge en loi vers X sans converger en probabilité vers X.

► **Contrôle** $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi uniforme sur $[\![1, r]\!]$ ($r \in [\![2, +\infty[\![$) et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la même loi.

a) Montrer que converge $(X_n)_{n\geqslant 0}$ en loi vers X.

b) Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas en probabilité vers X

(on pourra montrer que $1 - \dfrac{1}{r} = P(|X_p - X_q| \geqslant 1) \leqslant P(|X_p - X| \geqslant \dfrac{1}{2}) + P(|X_q - X| \geqslant \dfrac{1}{2})$ et raisonner par l'absurde).

Exercice 13 **La convergence en loi pour les variables aléatoires discrètes**.

$(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

r est un élément de $\mathbb{Z}$. On suppose que, pour tout n dans $[\![n_0, +\infty[\![$, $X_n(\Omega) \subset [\![r, +\infty[\![$ et que $X(\Omega) \subset [\![r, +\infty[\![$.

Montrer que $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en loi vers X si et seulement si pour tout élément k de $[\![r, +\infty[\![$:

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k).$$

Exercice 14 ★★ **La convergence en loi pour les variables aléatoires discrètes : deux exemples**.

Pour p entier naturel non nul, on considère p urnes notées $U_1, U_2, \ldots, U_p$. Dans chaque urne il y a p boules ; pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, l'urne numéro i, contient i boules blanches, les autres boules étant noires.

Q1. On choisit une urne au hasard et dans l'urne choisie, on effectue n tirages avec remise d'une boule ($n \in \mathbb{N}^*$). On note N_p la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches ainsi obtenues.

a) Trouver la loi de N_p et déterminer l'espérance $E(N_p)$ de N_p.

b) Montrer que la suite de terme général N_p converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Q2. On choisit une urne au hasard et dans l'urne choisie, on effectue des tirages avec remise d'une boule jusqu'à obtenir une boule blanche. On note G_p la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

a) Trouver la loi de G_p et déterminer son espérance.

b) Montrer que la suite de terme général G_p converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

► **Contrôle**

r est un élément de $\mathbb{N}^*$, U_r est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi uniforme sur $[\![1, r]\!]$ et $V_r = \dfrac{U_r}{r}$.

Q1. n est un élément de $\mathbb{N}^*$. Y_r est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que, pour tout k dans $[\![1, r]\!]$, la loi conditionnelle de Y_r sachant que $\{V_r = \dfrac{k}{r}\}$ est binômiale de paramètres n et $\frac{k}{r}$. On suppose également que Y_r prend ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$.

Trouver la loi de Y_r. Montrer que Y_r converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Q2. X_r est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que, pour tout k dans $[\![1, r]\!]$, la loi conditionnelle de X_r sachant que $\{V_r = \dfrac{k}{r}\}$ est géométrique de paramètre $\frac{k}{r}$. On suppose également que X_r prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Trouver la loi de X_r. Montrer que X_r converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Q3. Trouver $E(Y_r)$ et $\lim_{r\to+\infty} E(Y_r)$. Même chose avec X_r.

Exercice 15 **Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binômiale**.

p est un élément de $]0,1[$, n est un élément de $\mathbb{N}^*$ et $(N_m)_{m\geqslant 0}$ est une suite d'éléments de $[\![n,+\infty[\![$ telle que :

$$\lim_{m\to+\infty} N_m = +\infty \quad \text{et} \quad \forall m\in\mathbb{N},\ N_m p\in\mathbb{N}.$$

On considère une suite $(X_m)_{m\geqslant 0}$ de variables aléatoires réelles sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ telle que pour tout m appartenant à $\mathbb{N}$, $X_m \hookrightarrow \mathcal{H}(N_m,n,p)$.

Montrer que $(X_m)_{m\geqslant 0}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle suivant une loi binômiale de paramètres n et p.

Autrement dit pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$: $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} P(\{X_m=k\}) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$.

PP Ce résultat théorique conduit dans la pratique à approximer une variable aléatoire réelle X suivant une loi hypergéométrique de paramètres N, n et p, par une variable aléatoire réelle suivant une loi binômiale de paramètres n et p lorsque $\boxed{N \text{ est sensiblement supérieur à } 10n}$.

Si k est un élément de $X(\Omega)$, on prend $\displaystyle\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$ comme valeur approchée de $P(\{X=k\}) = \dfrac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

Ceci a en outre comme avantage de faire passer de trois paramètres à deux.

Exercice 16 **Approximation d'une loi binômiale par une loi de Poisson**.

Q1. n et a sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$. na clients passent une commande à l'un des n fournisseurs F_1, F_2, ..., F_n. X_n est la variable aléatoire égale au nombre de commandes obtenues par F_1.

Préciser la loi de X_n. Montrer que la suite de terme général X_n converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi classique.

Q2. Pour tout élément n de $\mathbb{N}$, p_n est un élément de $[0,1]$ et X_n une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ qui suit une loi binômiale de paramètres n et p_n.

On suppose de plus que la suite $(np_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers un réel strictement positif λ.

Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Autrement dit pour tout élément k de $\mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to+\infty} P(\{X_n=k\}) = \frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda}.$$

Q3. **Le résultat du programme** λ est un réel strictement positif. Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, X_n est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ qui suit une loi binômiale de paramètres n et $\dfrac{\lambda}{n}$.

Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

PP Ce résultat théorique conduit dans la pratique à approximer une variable aléatoire réelle X suivant une loi binômiale de paramètres n et p par une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre np lorsque $n\geqslant 30$, $p\leqslant 0,1$ et $np\leqslant 15$ (attention il y a autant de conditions que d'auteurs, mais voir plus bas...)

Si k est un élément de $X(\Omega)$, on prend $\dfrac{(np)^k}{k!}\,e^{-np}$ comme valeur approchée de $P(\{X=k\})$.

Ceci a, en outre, comme avantage de faire passer de deux paramètres à un.

★★ Le programme dit que : "toutes indications devront être fournies aux candidats quant à la justification des approximations"

Exercice 17 ★ **Approximation : exemple 1**.

Un livre de 1000 pages contient 1500 erreurs réparties au hasard. On ouvre le livre à une page quelconque. X est la variable aléatoire réelle égale au nombre d'erreurs rencontrées dans cette page. Trouver la loi de X. Estimer $P(X \leqslant 3)$.

► **Contrôle.** Un fabricant produit des transistors dont 1% sont défectueux. Il les ensache par paquets de 100 et les garantit à 98%.

Trouver la probabilité pour que cette garantie tombe en défaut ($1/e$ vaut sensiblement : 0,3679).

Exercice 18 ★★ **Le premier exercice sur le théorème de la limite centrée**.

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes ayant même loi.

$X_1(\Omega) = [\![-1, +\infty[\![$ et $\forall k \in [\![-1, +\infty[\![$, $P(X_1 = k) = \dfrac{e^{-1}}{(k+1)!}$

Q1. Etudier la loi de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_i$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Q2. Utiliser le théorème de la limite centrée pour prouver que : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n \leqslant 0) = \dfrac{1}{2}$.

Q3. Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour prouver que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!}\int_0^n e^{-t}t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

★

► **Contrôle 1** **Le second exercice sur le théorème de la limite centrée**.

$(B_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre $1/3$.

Q1. Etudier $S_n = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$ pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$.

Q2. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^n}\sum\limits_{k=0}^{E(n/3)} \dbinom{n}{k} 2^{n-k} = \dfrac{1}{2}$.

► **Contrôle 2** Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{2n^2}{n^2+k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^{2n^2}}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ (on rappelle que $n! \sim \sqrt{2\pi\, n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Exercice 19 **Sensibilisation à l'approximation d'une loi binômiale par une loi normale**.

Q0. rappeler le théorème de la limite centrée.

Q1. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles de bernoulli de paramètre p ($p \in]0,1[$) **indépendantes**. $q = 1-p$.

On pose pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

a) n appartient à $\mathbb{N}^*$. Que dire de S_n ?

b) Montrer que la suite de terme général $S_n^* = \dfrac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle suivant une loi normale centrée réduite. Ainsi, pour tout réel x :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant x\right) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Q2. p est un élément de $]0,1[$. $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, T_n suit une loi binômiale de paramètres n et p.

Montrer que la suite de terme général $T_n^* = \dfrac{T_n - np}{\sqrt{npq}}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle suivant une loi normale centrée réduite. Ainsi, pour tout réel x :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{T_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant x\right) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t.$$

Q3. "Justifier" grossièrement l'approximation d'une loi binômiale de paramères n et p par une loi normale de paramètres np et $\sqrt{npq}$.

PP Ce résultat théorique conduit dans la pratique à approximer une variable aléatoire réelle X suivant une loi binômiale de paramètres n et p par une variable aléatoire réelle Y suivant une loi normale d'espérance np et d'écart-type $\sqrt{npq}$ ($q = 1 - p$) lorsque $n \geqslant 20$ ou 30, p pas trop petit (!), $np \geqslant 10$ et $nq \geqslant 10$.

Dans ces conditions

- Pour tout réel x, on approxime $P(X \leqslant x)$ par $P(Y \leqslant x) = F_Y(x)$; donc

$$\boxed{P(X \leqslant x) \simeq \Phi\Big(\frac{x - np}{\sqrt{npq}}\Big)}$$

- Pour k dans $[\![0, n]\!]$, on approxime $P(X = k)$ par $P(k - 1/2 < Y \leqslant k + 1/2) = F_Y(k+1/2) - F_Y(k-1/2)$; donc

$$\boxed{P(X = k) \simeq \Phi\Big(\frac{k + 1/2 - np}{\sqrt{npq}}\Big) - \Phi\Big(\frac{k - 1/2 - np}{\sqrt{npq}}\Big)}$$

Exercice 20 ★ **Approximation : exemple 2**.

Estimer la probabilité d'obtenir au jeu de pile ou face autant de piles que de faces en 100 lancers.

Exercice 21 ★ **Approximation : exemple 3**. 20000 personnes sont rassemblées dans un stade. La probabilité qu'une personne quelconque boive un coca est $0,4$.

De combien de coca doit-on disposer pour que la probabilité qu'on vienne à en manquer soit inférieure à $0,1$?

► **Contrôle Approximation : exemple 4**.

Une firme emploie 300 personnes. Chaque personne téléphone en moyenne 3 minutes par heure. Estimer le nombre de lignes téléphoniques nécessaires, pour qu'à un instant t, la probabilité pour que le nombre de lignes soit insuffisant soit inférieure à $0,025$.

Exercice 22 **Sensibilisation à l'approximation d'une loi de Poisson par une loi normale**.

Q1. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles **indépendantes**. On suppose que pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, X_n suit une loi de Poisson de paramètre μ ($\mu > 0$)

a) n appartient à $\mathbb{N}^*$. Que dire de $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$?

b) Montrer que la suite de terme général $S_n^* = \dfrac{S_n - n\,\mu}{\sqrt{n\,\mu}}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle suivant une loi normale centrée réduite. Ainsi, pour tout réel x :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n - n\,\mu}{\sqrt{n\,\mu}} \leqslant x\right) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t.$$

Q2. μ est un élément de $]0, +\infty[$. $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, T_n suit une loi de Poisson de paramètre $n\,\mu$.

Montrer que la suite de terme général $T_n^* = \dfrac{T_n - n\,\mu}{\sqrt{n\,\mu}}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle suivant une loi normale centrée réduite. Ainsi, pour tout réel x :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{T_n - n\,\mu}{\sqrt{n\,\mu}} \leqslant x\right) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Q3. “Justifier” grossièrement l'approximation d'une loi de Poisson de paramère λ par une loi normale d'espérance λ et d'écart-type $\sqrt{\lambda}$.

PP Ce résultat théorique conduit dans la pratique à approximer une variable aléatoire réelle X suivant une loi de Poisson de paramètre λ par une variable aléatoire réelle Y suivant une loi normale d'espérance λ et d'écart-type$\sqrt{\lambda}$ lorsque $\lambda > 10$.

Dans ces conditions

• Pour tout réel x, on approxime $P(X \leqslant x)$ par $P(Y \leqslant x) = F_Y(x)$; donc

$$\boxed{P(X \leqslant x) \simeq \Phi\Big(\frac{x-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\Big)}$$

• Pour tout élément k de $\mathbb{N}$, on approxime $P(X = k)$ par $P(k-1/2 \leqslant Y \leqslant k+1/2) = F_Y(k+1/2) - F_Y(k-1/2)$; donc

$$\boxed{P(X = k) \simeq \Phi\Big(\frac{k+1/2-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\Big) - \Phi\Big(\frac{k-1/2-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\Big)}$$

Exercice 23 ★ **Approximation : exemple 5**.

Le nombre de clients d'un magasin d'un jour ouvrable quelconque de l'année suit une loi de Poisson de paramètre 12. On admet que les variables aléatoires correspondantes à des jours différents sont indépendantes. Estimer la probabilité d'avoir au moins 250 clients au cours d'un mois comportant 22 jours ouvrables.

Exercice 24 ★ **Approximation : exemple 6.**

Un éleveur possède 100 vaches qui se répartissent au hasard dans deux étables contenant chacune N places.

Estimer N pour que la probabilité pour que chaque vache trouve une place soit supérieure ou égale à $0,95$.

Exercice 25 ★★ **Un peu de tout. D'après ESCP 2010 3.4**

Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, i.i.d. (c'est-à-dire indépendantes et identiquement distribuées) de densité : $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Q1. Donner la fonction de répartition, l'espérance et la variance de X_0.

Q2. Soit a un réel de $]0,1[$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose, sous réserve d'existence : $S_a(\omega) = \mathrm{Min}\{i \in \mathbb{N} \ / \ X_i(\omega) \geqslant \sqrt{a}\}$.

Donner sa loi.

Q3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que $0 < a_n < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

Déterminer la convergence en loi de la suite $((1-a_n)S_{a_n})_n$.

Q4. Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} P\big(\sum\limits_{i=0}^{n-1} X_i \geqslant \frac{2n}{3} + \varepsilon n\big)$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} P\big(\sum\limits_{i=0}^{n-1} X_i \leqslant \frac{2n}{3} + \sqrt{n}\big)$.

Q5. Soit α un réel. On pose $R_n = \mathrm{Inf}(n^\alpha X_0, n^\alpha X_1, \ldots, n^\alpha X_{n-1})$. Étudier en fonction de α la convergence en loi de la suite (R_n).

Exercice 26 ★ **Convergence en probabilité**

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ayant même loi et mutuellement indépendantes. F est la fonction de répartition des variables de cette suite.

On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty}(x(1-F(x)) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(xF(-x)) = 0$.

On pose pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$: $M_n = \dfrac{1}{n}\ \mathrm{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $m_n = \dfrac{1}{n}\ \mathrm{Min}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Montrer que $(M_n)_{n\geqslant 1}$ (resp.$(m_n)_{n\geqslant 1}$) converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine nulle.

Exercice 27 ★ **Convergence en Loi. QSP HEC 2011**

$(U_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent toutes la loi uniforme sur $[0, \theta]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = \mathrm{Max}(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

Q1. Montrer que $\big(n\,(\theta - X_n)\big)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Q2. **Facultatif** Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à θ.

En plus

Exercice 28 Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n^2}{n^2+k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ (on rappelle que $n! \sim \sqrt{2\pi\, n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.