TD-COURS 7 ALGÈBRE BILINÉAIRE 2011-2012

Première partie : Généralités.

LE COURS

- Définition et caractérisations d'un produit scalaire.
- Exemples de produits scalaires.
- Les produits scalaires canoniques usuels.
- Propriétés usuelles.
- Cauchy-Schwarz. Le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz.
- Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ et au niveau des intégrales de fonctions continues.
- Norme associée à un produit scalaire. Identités remarquables. Identités de polarisation.

SAVOIR FAIRE

- Montrer qu'une application est un produit scalaire.
- Développer des produits scalaires.
- Utiliser les identités remarquables.
- Utiliser Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité.
- Exprimer le produit scalaire en fonction de la norme.

Dans ce qui suit à priori E est un espace vectoriel.

Exercice 1 **Produits scalaires canoniques.**

Q1. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

On pose : $\forall u = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k \in E,\ \forall v = \sum_{k=1}^{n} y_k\, e_k \in E,\ < u, v >= \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k.$

Montrer que $< ., . >$ est un produit scalaire sur E.

Q2. Préciser ce produit scalaire dans les cas suivants.

a) $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. b) $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

c) $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. d) $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2 ★★ **Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{\mathbf{n,p}}(\mathbb{R})$.**

$E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. $\forall (A, B) \in E^2,\ < A, B >= \mathrm{tr}({}^t AB)$. Montrer que $< ., . >$ est un produit scalaire sur E.

Examiner le cas $p = 1$.

Exercice 3 ★★ **Encore un exemple de produit scalaire**.

$E = \mathbb{R}[X]$. Si P et Q sont deux éléments de E on pose :

$$< P, Q >= \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$$

Montrer que $< ., . >$ est un produit scalaire sur E.

► **Contrôle 1**. E est l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que la série de terme général u_n^2 converge.

Q1. Montrer que E est un espace vectoriel réel ($(a+b)^2 \leqslant 2a^2+2b^2$).

Q2. Si $u=(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $v=(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux éléments de E, on pose :

$$< u, v >= \sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k.$$

Justifier la définition de $< ., . >$ et montrer que c'est un produit scalaire sur E.

► $\boxed{\bigstar}$ **Contrôle 2**. E est l'espace vectoriel des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose $\forall (f,g)\in E^2,\ < f, g >= \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $< ., . >$ est un produit scalaire sur E.

► $\boxed{\bigstar\bigstar}$ **Contrôle 3**. $E=\mathbb{R}[X]$. On pose $\forall (P,Q)\in E^2,\ < P, Q >= \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $< ., . >$ est un produit scalaire sur E.

Exercice 4 **Cauchy-Schwarz**.

$< ., . >$ est un produit scalaire sur E. On pose $\forall x\in E,\ \|x\| = \sqrt{< x, x >}$.

Q1. Montrer que : $\forall (x,y)\in E^2,\ | < x, y > | \leqslant \sqrt{< x, x >}\ \sqrt{< y, y >}$ ou $\boxed{\forall (x,y)\in E^2,\ | < x, y > | \leqslant \|x\|\,\|y\|}$.

Q2. Montrer que si x et y sont deux éléments de E : $| < x, y > | = \sqrt{< x, x >}\ \sqrt{< y, y >} \Longleftrightarrow (x,y)$ liée

ou $\boxed{| < x, y > | = \|x\|\,\|y\| \Longleftrightarrow (x,y) \text{ liée}}$.

Q3. Donner deux applications classiques.

Exercice 5 **La norme euclidienne et les identités remarquables**.

$< ., . >$ est un produit scalaire sur E. On pose $\forall x\in E,\ \|x\| = \sqrt{< x, x >}$.

Q1. Montrer que $x \to \|x\|$ est une norme sur E.

Q2. Soient x et y deux éléments de E.

a) **Les identités remarquables.** Développer $\|x+y\|^2$, $\|x-y\|^2$ et $< x+y, x-y >$.

b) **Les identités de polarisation.** Donner des expressions de $< x, y >$ n'utilisant que $\|.\|$.

c) **L' identité du parallélogramme.** Montrer que : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

d) x_1, x_2, ..., x_p sont p éléments de E. Développer $\|x_1+x_2+\cdots+x_p\|^2$.

Partie II : Orthogonalité.

LE COURS

- Orthogonalité.
- Bases orthogonales et bases orthonormale ou orthonormée.
- Orthogonale d'un sous-espace vectoriel.

SAVOIR FAIRE

- Utiliser Pythagore.
- Utiliser $E^\perp = \{0_E\}$ pour montrer qu'un vecteur est nul ou que deux vecteurs sont égaux.
- Calculer des produits scalaires et des normes lorsque l'on travaille dans une base orthonormée.
- Passer d'une base orthonormée à une autre base orthonormée.
- Trouver l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel ; en particulier d'une droite et d'un hyperplan.

Dans ce qui suit à piori E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $< .,. >$ est un produit scalaire sur E et $\|.\|$ est la norme associée.

Exercice 6 **Pythagore**. Deux éléments x et y de E sont orthogonaux si et seulement si

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Exercice 7 **Orthogonale d'un sous-espace vectoriel**.

F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.

Q1. a) Montrer que : $F^\perp$ est un sous espace vectoriel de E.

b) Montrer que : $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.

c) Montrer que : $F \subset F^{\perp\perp}$.

Q2. Montrer que : $E^\perp = \{0_E\}$ et que $\{0_E\}^\perp = E$.

Q3. Montrer que si F et G sont orthogonaux : $F \cap G = \{0_E\}$

Q4. Montrer que : $F \subset G$ entraîne $G^\perp \subset F^\perp$.

Exercice 8 **Orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Le point de vue pratique**.

$F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ et $G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_q)$.

Q1. Montrer que $F^\perp = \{u \in E \mid \forall i \in [\![1,p]\!],\ < u, u_i >= 0\}$.

Q2. Montrer que F et G sont orthogonaux si et seulement si : $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \forall j \in [\![1,q]\!],\ < u_i, v_j >= 0$.

Exercice 9 **Expression du produit scalaire dans une base quelconque.**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base quelconque d'un espace vectoriel euclidien E.

x et y sont deux éléments de E de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dans $\mathcal{B}$.

Q1. Calculer $< x, y >$ et $\|x\|$.

Q2. On considère la matrice $A = (< e_i, e_j >)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose $X = M_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = M_{\mathcal{B}}(y)$.

a) Montrer que A est une matrice symétrique à coefficients réels.

A est la matrice du produit scalaire $< .,. >$ dans la base $\mathcal{B}$.

b) Montrer que $< x, y >= {}^tXAY = {}^tYAX =< X, AY >=< Y, AX >$ et que $\|x\| = \sqrt{{}^tXAX}$.

▶ **Contrôle**. Les hypothèses sont celles de l'exercice précédent.

Q1. $\mathcal{B}'$ est une seconde base de E, A' est la matrice du produit scalaire dans $\mathcal{B}'$ et P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}$. Montrer que $A' = {}^tPAP$.

Q2. Montrer que les valeurs propres de A sont strictement positives.

Réciproquement on peut montrer que toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives est la matrice d'un produit scalaire.

Exercice 10 ★ **Un peu de pratique**

Q1. $E = \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique.

Trouver l'orthogonale du sous-espace vectoriel $F = \left\{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid x + 2y - z = 0 \text{ et } x - y + z + t = 0\right\}$.

Q2. a) On considère les sous-espaces vectoriels $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(-1) = 0\}$ de $E = \mathbb{R}_3[X]$.

Trouver l'orthogonal de F (resp. de G) lorsque $E = \mathbb{R}_3[X]$ est muni du produit scalaire canonique.

b) Trouver l'orthogonal de $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'' = 0_E\}$ lorsque $E = \mathbb{R}_3[X]$ est muni du produit scalaire défini par :

$\forall (P, Q) \in E,\ < P, Q >= \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$.

Exercice 11 **De la liberté d'une famille orthogonale (resp. orthonormale ou orthonormée)**.

Q1. **C** $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est une famille orthogonale de E constituée de vecteurs **non nuls**. Montrer que cette famille est libre.

Q2. **C** Montrer qu'une famille orthonormée d'éléments de E est libre.

Exercice 12 **Base orthonormale ou orthonormée**.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E. $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$ sont deux éléments de E de matrices X et Y dans la base $\mathcal{B}$.

Q1. **C** Montrer que $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k$.

Q2. **C** Montrer que : $< x, y >= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = {}^tXY = {}^tYX =< X, Y >$.

Q3. **C** Montrer que : $\|x\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \sqrt{{}^tXX} = \|X\|$.

Q4. Montrer que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthormée pour le produit scalaire canonique. Même chose dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$.

► **Contrôle**. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Montrer qu'il existe un produit scalaire $< ., . >$ et un seul sur E qui rend orthonormée la base $\mathcal{B}$ et qu'il est défini par :

$$\forall x = \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k \in E,\ \forall y = \sum_{k=1}^{n} y_k\, e_k \in E,\ < x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k.$$

Exercice 13 **C** **Matrice orthogonale**.

Une matrice P de $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R})$ est orthogonale si elle vérifie ${}^{\mathbf{t}}\mathbf{PP} = \mathbf{P}^{\mathbf{t}}\mathbf{P} = \mathbf{I_n}$.

Q0. P est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Observer (!) que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) P est orthogonale.

ii) P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$.

iii) ${}^tPP = I_n$.

iv) $P^tP = I_n$.

Q1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien E.

$(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ est une famille déléments de E de cardinal n et P est la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base orthnormée $\mathcal{B}$.

Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de E si et seulement si P est une matrice orthogonale.

On retiendra que la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée est une matrice orthogonale.

Q2. P est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) P est orthogonale.

v) Les colonnes de P constituent une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

► **Contrôle**.
P est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) P est orthogonale.

vi) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|PX\| = \|X\|$.

Exercice 14 **Existence de bases orthonormés en dimension finie et conséquences**.

Exercice assez théorique dont le but est de montrer que tout espace vectoriel euclidien de dimension non nulle possède une base orthonormé et un peu plus...

Q1. Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ une famille orthonormée d'un espace préhilbertien E. On pose $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p)$.

Montrer que F et $F^\perp$ sont supplémentaires.

Q2. Montrer par récurrence sur n que dans un espace vectoriel euclidien de dimension n non nulle toute famille orthonormée peut être compléter en une base orthonormée de E (... avec la convention d'usage).

Q3. Montrer que tout espace vectoriel euclidien de dimension non nulle possède une base orthonormée.

Q4. Déduire de Q1 et Q3 que, si F est un sous-espace vectoriel $\boxed{\text{de dimension finie}}$ d'un espace préhilbertien E, F et $F^\perp$ sont supplémentaires.

Exercice 15 **Supplémentaire orthogonal.**

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E.

Q1 Montrer que F et $F^\perp$ sont supplémentaires et que $F^\perp$ est le seul supplémentaire de F orthogonal à F.

Q2 Montrer que : $F^{\perp\perp} = F$.

Q3 Montrer que si $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de F et $\mathcal{B}''$ est une base orthonormée de $F^\perp$ alors $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ est une base orthonormée de E.

Q4. Comment construire l'orthogonal de F ?

Exercice 16 **Orthogonal de la somme de deux sous-espaces.**

F et G sont deux sous-espaces d'un espace préhilbertien E.

Q1. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ (double inclusion ; on rappelle que F et G sont contenus dans $F+G$).

Q2. On suppose ici que E est de dimension finie. Utiliser Q1 pour montrer que : $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 17 ★ **Un classique**

$E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\forall (A,B) \in E^2,\ < A, B >= \mathrm{tr}({}^tAB)$. On rappelle que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E.

$\mathcal{S}_n$ (resp. $\mathcal{A}_n$) est l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\mathcal{A}_n$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{S}_n$.

Exercice 18 **Un contre-exemple important.**

E est l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. $\forall (f,g) \in E^2,\ < f, g >= \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

On considère $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

Q1. Montrer rapidement que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E et que F est un sous-espace vectoriel de E.

Q2. Soit g un élément de $F^\perp$. On pose $\forall t \in [0,1],\ g_1(t) = \begin{cases} 2tg(t) & \text{si } t \in [0,1/2] \\ g(t) & \text{si } t \in]1/2,1] \end{cases}$

Montrer que g_1 est dans F et en déduire que g est nulle. En déduire que F et $F^\perp$ ne sont pas supplémentaires.

Q3. Que dire de $F^{\perp\perp}$?

Exercice 19 **Orthogonal d'une droite vectorielle (resp. d'un hyperplan.**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base **orthonormée** de E. $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est un élément non nul de $\mathbb{R}^n$.

Q1. Montrer que l'orthogonal de la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n)$ est l'hyperplan d'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ dans la base $\mathcal{B}$.

Q2. Montrer que l'orthogonale de l'hyperplan d'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ dans la base $\mathcal{B}$ est la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n)$.

Partie III : Endomorphismes symétriques. Matrices symétriques.

LE COURS

- Endomorphisme symétrique et matrice symétrique : définition, caractérisations, propriétés, exemples.
- Réduction d'un endomorphisme symétrique ou d'une matrice symétrique.
- Caractérisations des matrices symétriques à valeurs propres positives (resp. strictement positives).
- Écriture une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme combinaison linéaire de n matrices de rang 1.

SAVOIR FAIRE

- Diagonaliser un endomorphisme symétrique ou une matrice symétrique.
- Construire une base orthonormée de vecteurs propres pour un endomorphisme (resp. une matrice) symétrique.
- Montrer qu'une matrice symétrique est positive (resp. définie positive) c'est à dire que ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).
- Écrire une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme combinaison linéaire de n matrices de rang 1.

Dans ce qui suit à piori E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $< .,. >$ est un produit scalaire sur E et $\|.\|$ est la norme associée.

Exercice 20 **Une caractérisation des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que A est symétrique si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ < AX, Y >=< X, AY >$

Exercice 21 **Caractérisation des endomorphismes symétriques.**

Un endomorphisme f de E est **symétrique si :** $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), y >=< x, f(y) >$.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base **orthonormée** de E. f est un endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$.

Montrer que f est symétrique si et seulement si A est symétrique.

Exercice 22 ★ **Deux exemples d'endomorphismes symétriques.**

Q1. Soit p une projection de l'espace vectoriel euclidien E.

Montrer que p est un endomorphisme symétrique si et seulement si p est une projection orthogonale.

Q2. **facultatif** Même chose pour une symétrie orthogonale.

Q3. $E = \mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire $< .,. >$ définit par : $\forall (P,Q) \in E^2,\ < P, Q >= \displaystyle\int_{-1}^{0} P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t$. On pose :

$$\forall P \in E,\ f(P) = (X^2 + X)P'' + (2X + 1)P'$$

Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.

Exercice 23 **Quelques propriétés des endomorphismes symétriques.**

f est un endomorphisme symétrique de E.

Q1. Montrer que si f est bijectif, f^{-1} est un endomorphisme symétrique.

Q2. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f alors il en est de même de $F^{\perp}$.

Q3. Montrer que :

- $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont orthogonaux.
- $\boxed{(\operatorname{Im} f)^{\perp} = \operatorname{Ker} f}$ et $\operatorname{Im} f \subset (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$ (avec égalité si E est de dimension finie).

Exercice 24 **Orthogonalité des sous-espaces propres d'endomorphisme symétrique.**

f est un endomorphisme symétrique de E.

Montrer que si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de f, SEP (f, λ) et SEP (f, μ) sont orthogonaux.

Exercice 25 **Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont réelles.**

A est une matrice carrée symétrique **réelle** d'ordre n.

Q1. Montrer que les valeurs propres de A sont réelles c'est à dire que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

Q2. Montrer que si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de A, SEP (A, λ) et SEP (A, μ) sont orthogonaux.

Exercice 26 **Existence de valeurs propres pour une matrice.**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\boxed{\mathbb{C}})$. Montrer que A possède au moins une valeur propre.

Qu'en déduire pour une matrice symétrique réelle ? pour un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien de dimension non nulle.

Exercice 27 **Réduction d'un endomorphisme symétrique. Le résultat théorique.**

Montrer par récurrence sur n que si f est un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n non nulle, $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$ et il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f.

Exercice 28 **Réduction d'une matrice symétrique. Le résultat théorique.**

A est une matrice carrée réelle et symétrique d'ordre n. Montrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

En déduire qu'il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telle que $D = {}^tPAP$.

Exercice 29 ★★ **Pratique de la réduction d'un endomorphisme symétrique.**

Q1. f est un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n non nulle.

Montrer que l'on obtient une base **orthonormée** de E constituée de vecteurs propres de f en concatenant une base **orthonormée** de chacun des sous-espaces propres de f.

Q2. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée de E.

f est l'endomorphisme de E de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

a) Montrer que f est diagonalisable.

b) Construire une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f.

Exercice 30 ★★ **Pratique de la réduction d'une matrice symétrique**.

Q1. Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que l'on obtient une base **orthonormée** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A en concatenant une base **orthonormée** de chacun des sous-espaces propres de A.

b) Soit $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n et soit P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$. Montrer que :

i) P est une matrice orthogonale.

ii) ${}^tPAP = P^{-1}AP$ est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Q2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A. Trouver une matrice inversible P telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

Exercice 31 **Décomposition d'une matrice symétrique comme combinaison linéaire de matrices de rang 1**

Attention ce résultat est un résultat de cours... que l'on utilise pas très souvent.

Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n. Montrer que :

$$\boxed{A = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, X_k \, {}^tX_k}$$

Exercice 32 ★★★ **Première caractérisation des matrices symétriques positives (resp. définies positives)**.

S est une matrice **symétrique** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0$.

ii) Les valeurs propres de S sont positives.

Si S vérifie l'une de ces propriétés on dit que S est une matrice symétrique **positive**.

Q2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0 \Rightarrow {}^tXSX > 0$.

ii) Les valeurs propres de S sont strictement positives.

Si S vérifie l'une de ces propriétés on dit que S est une matrice symétrique **définie positive**.

Exercice 33 ★ **Seconde caractérisation des matrices symétriques positives (resp. définies positives)**.

S est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) S est une matrice symétrique positive.

ii) Il existe une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $S = {}^tMM$.

Q2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) S est une matrice symétrique définie positive.

ii) Il existe une matrice inversible M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $S = {}^tMM$.

Exercice 34 ★★ **Encadrement de Rayleigh**.

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note λ (resp. μ) la plus petite (resp. plus grande) valeur propre de A.

Q1. Montrer que $\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \lambda\,\|X\|^2 \ \leqslant < AX, X >= {}^tXAX \leqslant \ \mu\|X\|^2.}$

Q2 a) Montrer que : $\mathrm{Min}\left\{\dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} \mid X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } X \neq 0\right\} = \mathrm{Min}\,\mathrm{Sp}(A)$ ou $\displaystyle\mathop{\mathrm{Min}}_{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})-\{0\}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \mathrm{Min}\,\mathrm{Sp}(A)$.

b) Montrer que : $\mathrm{Max}\left\{\dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} \mid X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } X \neq 0\right\} = \mathrm{Max}\,\mathrm{Sp}(A)$ ou $\displaystyle\mathop{\mathrm{Max}}_{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})-\{0\}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \mathrm{Max}\,\mathrm{Sp}(A)$.

Exercice 35 ★★ **Adjoint d'un endomorphisme**.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien E et f est un endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$. On note f^* l'endomorphisme de E de matrice ${}^tA$ dans $\mathcal{B}$.

Q1. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2,\ < f(x), y >=< x, f^*(y) >$.

Q2. Soit h un second endomorphisme de E vérifiant : $\forall (x, y) \in E^2,\ < f(x), y >=< x, h(y) >$. Montrer que $h = f^*$.

Q3. g est un endomorphisme de E. Exprimer $(\lambda f)^*$, $(f+g)^*$ et $(f \circ g)^*$ en fonction de f^* et g^* (utiliser les matrices). Que vaut $(f^*)^* = f^{**}$?

Q4. **Facultatif** a) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f^* = (\mathrm{Im}\, f)^\perp$ et $\mathrm{Im}\, f^* = (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$.

"Retrouver" $\mathrm{rg}\,{}^tA = \mathrm{rg}\, A$. Montrer que $\mathrm{Sp}\, f^* = \mathrm{Sp}\, f$ et "retrouver" $\mathrm{Sp}\,{}^tA = \mathrm{Sp}\, A$.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f^* \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}(f \circ f^*) = \mathrm{Im}\, f$.

Q5. Montrer que $f \circ f^*$ est un endomorphisme symétrique dont les valeurs propres sont positives.

Exercice 36 L appartient à $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ et $M = {}^tLL$.

Q1. Montrer que M est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

Q2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur L pour que les valeurs propres de M soient strictement positives.

Exercice 37 ★★ **Racine carrée symétrique définie positive d'une matrice symétrique définie positive**

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives. On se propose de montrer qu'il existe une unique matrice symétriques B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à valeurs propres strictement positives, telle que $B^2 = A$.

Q1. Montrer l'existence d'une telle matrice (on se ramènera à une matrice diagonale).

Q2. Soient B et C deux matrices solutions du problème.

a) Montrer qu'il existe deux matrices orthogonales R et S et deux matrices diagonales U et V telle que $B = RU{}^tR$ et $C = SV{}^tS$.

b) Montrer que $RU^{2t}R = SV^{2t}S$. En déduire l'existence d'une matrice T telle que $TU^2 = V^2T$. Montrer que $TU = VT$ et que $B = C$.

Partie IV : Projection orthogonale.

LE Cours

- Projection orthogonale.
- Expression de la projection orthogonale dans une base orthonormée.
- Le théorème de meilleure approximation.
- Méthode des moindres carrés.

SAVOIR FAIRE

- Construire la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel muni d'une base orthonormée.
- Construire la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel muni d'une base quelconque.
- Définir analytiquement une projection orthogonale.
- Utiliser une projection orthogonale pour traiter un problème d'optimisation.
- • Utiliser la méthode des moindres carrés.
-

Exercice 38 **Projections orthogonales. Un résultat fondamental.**

E est un espace vectoriel préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E tel que $F^\perp$ soit un supplémentaire de F. p_F est la projection orthogonale de E sur F.

x et y sont deux éléments de E. Montrer que :

$$y = p_F(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^\perp \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ \forall z \in F,\ < x - y, z >= 0 \end{cases}$$

On retiendra de ce résultat qu'il n'est pas nécessaire de connaître $F^\perp$ pour trouver la projection orthogoanle de x sur F.

Exercice 39 **Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel dont on a une base orthonormée.**

E est un espace préhilbertien.

Q1. On suppose que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une base orthonormée de F. p_F est la projection orthogonale sur F. Montrer que :

$$\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} < x, u_k >\ u_k$$

Q2. **Application** a) D est une droite vectorielle de E engendrée par u et p_D est la projection orthogonale sur D.

Montrer que : $\forall x \in E,\ p_D(x) = \dfrac{< u, x >}{\|u\|^2}\ u.$

b) H est un hyperplan de E. u est un vecteur non nul orthogonal à H. p_H est la projection orthogonale sur H.

Montrer que : $\forall x \in E,\ p_H(x) = x - \dfrac{< u, x >}{\|u\|^2}\ u.$

c) Que dire de, l'application de E dans E, $x \to x - 2\,\dfrac{< u, x >}{\|u\|^2}\ u$?

Exercice 40 **Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel dont on a une base quelconque.**

E est un espace préhilbertien.

F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie p et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est une **base quelconque** de F. p_F est la projection orthogonale sur F et x est un élément de E.

Q1. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ sont les coordonnées de $p_F(x)$ dans $\mathcal{B}$. Montrer que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ est la solution d'un système de Cramer dont on précisera la matrice.

Q2. Donner alors un "algorithme" pour trouver $p_F(x)$.

Exercice 41 ★ **Détermination d'une projection orthogonale 1**.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée de E. F est le plan d'équation $x + 2y - z = 0$ dans $\mathcal{B}$. p est la projection orthogonale sur F. Montrer que :

$$M_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

On donnera trois méthodes.

Exercice 42 ★ **Détermination d'une projection orthogonale 2**.

$E = \mathbb{R}_3[X]$ est muni du produit scalaire canonique et F est le sous-espace vectoriel de E constitué des éléments de E admettant 0 et 1 pour racines.

Trouver la projection orthogonale de $X + 1$ sur F.

Exercice 43 **Distance d'un vecteur à une partie non vide dans un préhilbertien**.

E est un espace vectoriel préhilbertien, A est une partie non vide de E et x est un élément de E.

Q1. Montrer que $\{\|x - a\|;\ a \in A\}$ possède une borne inférieure. Cette borne inférieure est **la distance de x à A** que l'on note $d(x, A)$.

On écrit le plus souvent $d(x, A) = \operatorname*{Inf}_{a \in A} \|x - a\|$

Q2. ★ $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique et $\|.\|$ est la norme associée. M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer qu'il existe un élément p_0 de $\mathbb{N}^*$ tel que pour tout p dans $[\![p_0, +\infty[\![$, $M - \dfrac{1}{p} I_n$ est inversible.

b) En déduire que $d\big(M, GL_n(\mathbb{R})\big) = 0$.

c) On suppose que M n'est pas inversible. Montrer qu'il n'existe pas d'élément P de $GL_n(\mathbb{R})$ tel que $\|M - P\| = d\big(M, GL_n(\mathbb{R})\big)$

Exercice 44 **Meilleure approximation**.

Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace préhilbertien E tel que $F^\perp$ soit un supplémentaire de F.

Soit p_F la projection orthogonale sur F. Soit x un élément de E.

Q1. Montrer que

a) $\forall z \in F,\ \|x - p_F(x)\| \leqslant \|x - z\|$.

b) Si t est un élément de F tel que : $\forall z \in F,\ \|x - t\| \leqslant \|x - z\|$ alors $t = p_F(x)$.

Ainsi l'ensemble $\{\|x - z\| \mid z \in F\}$ possède un minimum qui vaut $\|x - p_F(x)\|$ et $p_F(x)$ est l'unique élément de F qui réalise ce minimum.

On écrit souvent : $\|x - p_F(x)\| = \operatorname*{Min}_{z \in F} \|x - z\|$.

La projection orthogonale de x sur F est **la meilleure approximation** de x par un élément de F.

Q2. Montrer que : $d^2(x,F) = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - < x, p_F(x) >$.

▶ **Contrôle**. E est un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E. x est un élément de E et y un élément de F.

a) Montrer qu'il existe au plus un élément de y de F tel que : $\|x-y\| = \underset{z\in F}{\text{Min}} \|x-z\|$

b) Soit y un élément de F. Montrer que : $\|x-y\| = \underset{z\in F}{\text{Min}} \|x-z\|$ si et seulement si $x-y$ est orthogonale à F.

Exercice 45 ★ **Un calcul de distance** D'après Ecricome 2001.

$E = \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique ($\forall (A,B) \in E^2 < A, B >= \text{tr}({}^tAB)$).

$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \text{Vect}(I_4, U, U^2, U^3)$.

Q0. $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux éléments de E. Rappeler la valeur de $< A, B >$.

Q1. Montrer que (I_4, U, U^2, U^3) est une base orthogonale de F.

Q2. Soit V l'élément de E dont la première ligne est constituée de 1 et les autres uniquement de 0.

Trouver la meilleure approximation W de V par un élément de F et calculer la distance de V à F.

Exercice 46 ★ **Utilisation d'une projection orthogonale dans un problème d'optimisation**.

Existence et valeur de : $\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}} \int_0^\pi (a\cos t + b\sin t - t)^2 \, \mathrm{d}t$

(munir l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $[0,\pi]$ d'un bon produit scalaire et se ramener à un problème de projection orthogonale).

▶ ★ **Contrôle 1** . Existence et valeur de $\underset{(x,y)\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}} \Big((x+y-2)^2 + (x-1)^2 + (2x+y-1)^2 \Big)$

▶ **Contrôle 2**. $f : (a,b) \to \int_0^1 t^2 (\ln t - at - b)^2 \, \mathrm{d}t$. Montrer que f possède un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et le calculer.

Exercice 47 **Facultatif. Les projections orthogonales sont les projections contractantes.**

F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertine E. p_F est la projection orthogonale sur F.

Q1. Montrer que : $\forall x \in E,\ \|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$.

Q2. Réciproquement montrer que si p est **une projection de E** telle que $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$ alors p est une projection orthogonale.

Partie V : Construction de bases orthonormées. Orthonormalisation de Schmidt.

Exercice 48 ★★ **Orthonormalisation de Schmidt : exemple 1.**

$E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\forall (P,Q) \in E^2,\ < P, Q >= \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. On rappelle que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E.

Construire à partir de la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de E une base orthonormée de E.

Exercice 49 **Orthonormalisation de Schmidt : exemple 2.**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormée de E. F est l'hyperplan d'équation $x + 2y - z + t = 0$ dans $\mathcal{B}$.

Q1. On pose : $u_1 = e_1 + e_3$, $u_2 = e_2 - 2e_4$ et $u_3 = e_3 + e_4$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de F.

Q2. Construire une base orthonormée de F.

Exercice 50 **Généralisation de l'algorithme utilisé dans les deux exemples précédents.**

E est un espace vectoriel euclidien de dimension n non nulle et $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base quelconque de E.

Dans les exemples précédents, pour construire une base orthonormée de E à partir de la base la base $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ on a commencé par construire une base orthogonale $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ et en multipliant les vecteurs par l'inverse de leur norme on a obtenu base orthonormée $(w_1, w_2, \dots, w_n)$.

Q1. **L'aspect pratique de la construction de** $(v_1, v_2, \dots, v_n)$**.**

La construction de la base orthogonale $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ à partir de $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ s'appuie sur la récurrence suivante.

• On pose $v_1 = u_1$.

• k appartient à $[\![2, n]\!]$. Supposons que l'on ait construit $(v_1, v_2, \dots, v_{k-1})$ famille orthogonale de vecteurs non nuls de E.

On construit alors v_k. Pour cela on pose $v_k = u_k + \lambda_1\, v_1 + \lambda_2\, v_2 + \cdots + \lambda_{k-1}\, v_{k-1}$.

En écrivant que v_k est orthogonal à v_i on calcule λ_i pour tout i dans $[\![1, k-1]\!]$.

Montrer que : $v_k = u_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \frac{< u_k, v_i >}{< v_i, v_i >}\, v_i$.

Q2. **L'aspect théorique de la construction de** $(v_1, v_2, \dots, v_n)$**.**

Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ la famille d'éléments de E définie par la récurrence suivante :

$$v_1 = u_1 \text{ et } \forall k \in [\![2, n]\!],\ v_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{< u_k, v_i >}{< v_i, v_i >}\, v_i.$$

a) Montrer que pour tout éléments k dans $[\![1, n]\!]$, $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ est une base orthogonale de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$.

b) En déduire que $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une base orthogonale de E telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_k) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$$

Q3. **Construction et qualité de la base orthonormée** $(w_1, w_2, \dots, w_n)$**.**

a) On pose $\forall k \in [\![1, n]\!],\ w_k = \dfrac{1}{\|v_k\|}\, v_k$. Montrer que : $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ est une base orthonormée de E telle que :

1. $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{Vect}(w_1, w_2, \dots, w_k) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$.

2. Pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, $< w_k, u_k >$ est strictement positif.

b) Montrer que $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ est l'unique base orthonormée de E qui vérifie 1. et 2.

Pour conclure retenons que :

$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une base de l'espace vectoriel euclidien E. Il existe une base orthonormée de E et une seule $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ telle que pour tout k appartenant à $[\![1,n]\!]$:

1. $\text{Vect}(w_1, w_2, \ldots, w_k) = \text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$.
2. $< w_k, u_k >$ est strictement positif.

$(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ est **LA** base orthonormée déduite de la base $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ par le procédé d'orthonormalisation de **Schmidt**.

Exercice 51 ★★ **Construction d'une base orthogonale. Distance**.

$E = \mathbb{R}_3[X]$ est muni du produit scalaire canonique.

Q1. Montrer que $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$ est un sous espace vectoriel de E et que $\mathcal{B} = \Big(X-1, X(X-1), X^2(X-1)\Big)$ en est une base (les deux en 1 ou presque).

Q2. Construire à partir de $\mathcal{B}$ une base orthonormée de F. Calculer $d(X, F)$.

Frise $\frac{1}{\sqrt{2}}(X-1)$, $\sqrt{\frac{2}{3}}(X^2 - (1/2)X - (1/2))$ et $\sqrt{\frac{3}{4}}(X^3 - (1/3)X^2 - (1/3)X - (1/3))$.

Exercice 52 ★★ **Réduction d'une matrice symétrique, again**

Diagonaliser A ; plus précisément trouver une matrice orthogonale P telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 53 **Méthode des moindres carrés.**.

A est un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et B un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On suppose que $\boxed{\text{le rang de } A \text{ est } p}$.

$\|.\|$ est la norme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire

Montrer que :

- $\underset{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}{\text{Min}} \|AX - B\|$ existe.
- Il existe un unique élément X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que : $\|AX_0 - B\| = \underset{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}{\text{Min}} \|AX - B\|$.
- ${}^tAAX_0 = {}^tAB$.
- ${}^tAA$ est inversible et $X_0 = ({}^tAA)^{-1}\,{}^tAB$.

★★ **Application** . Existence et valeur de $\underset{(x,y) \in \mathbb{R}^2}{\text{Min}} \Big((x+y-2)^2 + (x-1)^2 + (2x+y-1)^2\Big)$

Exercice 54 ★★ **L'incontournable des incontournables.**

a et b sont deux réels tels que $a < b$. p est une application continue et strictement positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout élément n de $\mathbb{N}$: $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

Si P et Q sont deux éléments de $E = \mathbb{R}[X]$ on pose :

$$< P, Q >= \int_a^b P(t)\, Q(t)\, p(t)\, \mathrm{d}t$$

Q1. Montrer que $< ., . >$ est un produit scalaire sur E (faire uniquement les deux derniers points).

Q2. k est élément de $\mathbb{N}^*$. D_k est l'ensemble de éléments de E_k orthogonaux à E_{k-1}.

a) Montrer que D_k est une droite vectorielle et que les éléments non nul de D_k sont de degré k.

b) Montrer que D_k contient un polynôme P_k normalisé (ou unitaire) et un seul.

Q3. On pose $P_0 = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ Q_k = \dfrac{1}{\|P_k\|}\, P_k$.

a) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de E_n.

b) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est la base orthonormée de E_n déduite de la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$, de E_n, par le procédé d'orthormalisation de Schmidt.

Q4. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. a) Montrer qu'il existe un élément $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1})$ de $\mathbb{R}^{n+2}$ tel que : $XP_n = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \gamma_k P_k$.

Montrer que $\gamma_i = 0$ si i appartient à $[\![0, n-2]\!]$ $(< XP_n, P_i >=< P_n, XP_i >)$

b) Montrer $\gamma_{n+1} = 1$ et qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que : $P_{n+1} = (X + a_n)P_n + b_n P_{n-1}$.

Montrer que $a_n = -\dfrac{< XP_n, P_n >}{\|P_n\|^2}$ et $b_n = -\dfrac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2}$.

Q5. n est élément de $\mathbb{N}^*$. a) Montrer que $\forall Q \in E_{n-1},\ < Q, P_n >= 0$.

b) Si P_n n'a pas de racine d'ordre impair dans $]a, b[$ on pose $D = 1$. Si P_n a, dans $]a, b[$, r racines d'ordre impair, y_1, y_2, ..., y_r, on pose $D = (X - y_1)(X - y_2) \ldots (X - y_r)$.

Que dire du signe de DP_n sur $[a, b]$? En déduire en raisonnant par l'absurde que $r = n$. Que dire alors pour P_n ?