TD-COURS 3 INTÉGRALES SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE 2011-2012

- Les définitions.
- Les propriétés usuelles.
- Les références.
- Intégration par parties.
- Changement de variable.
- Le cas des fonctions positives.
- La convergence absolue.
- La fonction Gamma.
- Séries et intégrales sur un intervalle quelconque.

Exercice 1 **Les problèmes simples**.

Existence et calcul éventuel de : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan t\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 **Les faux problèmes**.

Q1. $\boxed{a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}}$ f est une application continue de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que si f admet une limite finie à gauche en b (autrement dit si f est prolongeable par continuité sur $[a,b]$) : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\int_a^b \widehat{f}(t)\,\mathrm{d}t$ où $\widehat{f}$ est le prolongement par continuité de f à $[a,b]$.

Q2. Montrer la convergence de : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t-1}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 **Réfŕences. Intégrales de Riemann**. **Ce sont des résultats de cours.**

Q1. α est un réel. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$. Et pour $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{|t|^\alpha}\,\mathrm{d}t$?

Q2. a, h et α sont trois réels. On suppose que h est strictement positif.

Montrer que $\displaystyle\int_a^{a+h} \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Donner le résultat sans démonstration pour $\displaystyle\int_{a-h}^{a} \frac{1}{(a-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ (ou $\displaystyle\int_{a-h}^{a} \frac{1}{|t-a|^\alpha}\,\mathrm{d}t$) ?

Q3. Que dire de la nature de $\displaystyle\int_0^{c} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ (avec $c>0$) et $\displaystyle\int_c^{0} \frac{1}{|t|^\alpha}\,\mathrm{d}t$ (avec $c<0$) ?

Exercice 4 **Faire un points sur les propriétés importantes des intégrales généralisées**.

Tout est dans le titre.

Exercice 5 **De la pseudo linéarité**.

Q1. Etudier la convergence des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(-\arctan\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

Q2. Etudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t}-\arctan\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$

Exercice 6 **Reste**

$-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f est une application de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continue. On suppose que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que :

$$\lim_{x \to b^-} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 7 **Le théorème fondamental sur les intégrales généralisées de fonctions positives.**

$-\infty < a < b \leqslant +\infty$. Soit f une application de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{positive}}$ et continue.

Q1. Montrer que

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente si et seulement si } x \to \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ est majorée sur } [a, b[}$$

Q2. Montrer que si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge : $\forall x \in [a, b[,\ 0 \leqslant \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Q3. Montrer que si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors : $\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$

Exercice 8 **Critère de comparaison 1. Majoration ou minoration**

Q1. $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f et g sont deux applications de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a, b[$.

On suppose qu'il existe un élément c de $[a, b[$ tel que : $\boxed{\forall t \in [c, b[,\ \boxed{0} \leqslant f(t) \leqslant g(t)}$ (★★)

Montrer que si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Q2. Etudier la nature des intégrales suivantes : 1. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$; 2. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t\,(1+t)}\,\mathrm{d}t$; 3. $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\ln t}}$.

Exercice 9 **Critère de comparaison 2. Les équivalents**

Q1. $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f et g sont deux applications de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a, b[$.

On suppose que :

1. Il existe un réel c tel que $\boxed{\text{l'une des deux fonctions soit positive sur } [c, b[}$ (★★)
2. $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$.

Montrer que les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

$\boxed{★}$ Q2. Etudier la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta}\,\mathrm{d}t$; 2. $\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t^\beta}\,\mathrm{d}t$; 3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$; 4. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^3-1}\,\mathrm{d}t$ 5. $\int_0^{+\infty} \left(1 - t \arctan \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 10 **Critère de comparaison 3. La négligeabilité**

Q1. $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f et g sont deux applications de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a, b[$.

On suppose que :

1. il existe un réel c tel que : $\boxed{\forall t \in [c, b[,\ f(t) \geqslant 0 \ \boxed{\text{et}}\ g(t) \geqslant 0}$ (★★)

$\boxed{\bigstar}$ 2. $f = \mathrm{o}(g)$ au voisinage de b.

Montrer que si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Q2. Etudier la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$; 2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$; 3. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\,\ln t}$; 4. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$; 5. $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$; 6. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\,\ln t}$.

Exercice 11 **La convergence absolue**

Q1. f est une application de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ continue.

On suppose que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Q2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t(1+\sqrt{t})}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 12 **La pratique 1**

Etudier la nature des intégrales suivantes. $\boxed{\bigstar}$

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha\,\ln\left(1+\frac{1}{t^\beta}\right)\mathrm{d}t$ ($\alpha>0$ et $\beta>0$) ; 2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t\;e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$; 3. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\,\ln t}$; 4. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$;

5. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2-4}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 13 **Intégration par parties. Le résultat théorique**.

$-\infty < a < b \leqslant +\infty$. u et v sont deux applications de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b[$.

($\bigstar$) On suppose que $\boxed{uv \text{ admet une limite finie à gauche en } b}$.

Montrer que $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

En cas de convergence, montrer que :

$$\boxed{\int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-}[u(x)\,v(x)] - u(a)\,v(a) - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Exercice 14 **Intégration par parties. La pratique**. $\boxed{\bigstar}$

Q1. p et q sont dans $\mathbb{N}$. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 t^p\,(\ln t)^q\,\mathrm{d}t$.

Q2. Existence et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

► **En plus ?** Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t$ existe et l'écrire comme somme d'une série (utiliser Q1).

► **En plus ?** Pour n dans $\mathbb{N}$, existence et calcul de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ (R. $I_n = n!$; pour l'existence procéder par récurrence).

Exercice 15 **La fonction gamma**.

Les trois résultats qui suivent sont des résultats de cours.

Q1. Montrer que la fonction $\Gamma : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ admet pour domaine de définition $]0,+\infty[$.

Q2. Montrer que, pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Q3. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Exercice 16 **La pratique 2**

Etudier la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{t^3-t^2}}\,\mathrm{d}t$; 2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-e^{\frac{-1}{t^2}})\,\mathrm{d}t$; 3. $\displaystyle\int_0^1 \ln(t^2+\sin t)\,\mathrm{d}t$; 4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$; 5. $\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 17 **Changement de variable. Le résultat du programme...=daube**.

$-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$.

f est une application continue de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$.

φ est une bijection strictement croissante de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta \varphi'(t)\,f\big(\varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

En cas de convergence, montrer que : $\displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta \varphi'(t)\,f\big(\varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t$.

Et si φ est décroisssante ?

Exercice 18 **Pratique du changement de variable**. ★

La meilleure pratique est de ne pas pratiquer... de changement de variable sur une IG.

Existence et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-t}}$ $(u = \frac{1}{t})$.

► **En plus ?** Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ $(u = \sqrt{1-t})$.

► **En plus ?** Existence et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^3\ln t}{(1+t^4)^3}\,\mathrm{d}t$ $(u = t^4)$.

Exercice 19 **Changement de variable again**. ★

Q1. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Q2. x est un élément de $]0,1[$. Montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\ln t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \ln 2$. En déduire I.

► **En plus ?** Montrer que $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > -1$ et qu'en cas d'existence elle vaut $\ln(1+\alpha)$.

Exercice 20 **Séries et intégrales sur un intervalle quelconque** ★

a est un entier et f une fonction **continue** (ou continue par morceaux), **décroissante** et **positive** sur $[a, +\infty[$.

On se propose de montrer de manière standard que : la série de terme général $u_n = f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Q1. On pose, pour tout n dans $[\![a, +\infty[\![$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=a}^{n} u_k$. Montrer que si n appartient à $[\![a, +\infty[\![$:

$$\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(a).$$

Prouver le résultat.

Q2. Application. β est un réel. Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^\beta}$.

▶ **En plus ?** Les hypothèses sont celles de l'exercice précédent.

Q1. Montrer que les suites de termes généraux $S_n - \displaystyle\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$ et $S_n - \displaystyle\int_a^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes et retrouver le théorème fondamental.

Q2. En suppose que la série de terme général $f(n)$ diverge. Montrer que pour tout élément n de $[\![a, +\infty[\![$:

$$S_n \sim \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

C'EST FINI. LE RESTE C'EST DU PLUS !

Exercice 21 **La pratique 3**

★ Etudier la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$; 2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\,\mathrm{d}t$; 3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$; 4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$; 5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\sin\left(\frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 22 **L'intégrale de Dirichlet** ★

Q1. Montrer que si a est un réel non nul et si b est un réel, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(a\,t+b)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(a\,t+b)}{t}\,\mathrm{d}t$ convergent.

Q2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente (on pourra remarquer que $|\sin t| \geqslant \sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$).

Q3. α est un réel strictement positif. Etudier la nature de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

▶ **En plus** Retrouver le résultat de Q2 en remarquant que $\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{(k\pi)} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{k}$.

▶ **En plus** Reprendre Q3. avec α négatif.

Exercice 23 **La pratique 4. Vers des produits scalaires usuels** ★

Q1. Soit f une application continue de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge.

Q2. R appartient à $\mathbb{R}[X]$. Montrer que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} R(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} R(t)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ convergent.

▶ **En plus ?** E est l'espace vectoriel des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose $\forall (f,g)\in E^2,\ <f,g>=\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $<.,.>$ est un produit scalaire sur E.

▶ **En plus ?** $E=\mathbb{R}[X]$. On pose $\forall (P,Q)\in E^2,\ <P,Q>=\displaystyle\int_{0}^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $<.,.>$ est un produit scalaire sur E.

▶ **En plus ?** $E=\mathbb{R}[X]$. On pose $\forall (P,Q)\in E^2,\ <P,Q>=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $<.,.>$ est un produit scalaire sur E.

Exercice 24 **Dirichlet (suite)** ★

On rappelle que $I=\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

On rappelle également que si f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$: $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{a}^{b} f(t)\sin(\alpha t)\,\mathrm{d}t=0$.

Q1. Montrer que pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $I_n=\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que la suite de terme général I_n est constante.

Q2. Montrer que pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $J_n=\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(I_n-J_n)=0$.

En déduire que

$$\boxed{\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}}$$

Exercice 25 **La pratique 5. Intégrales de Bertrand** ★

Etudier la nature de $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\,(\ln t)^\beta}$ et $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\,(|\ln t|)^\beta}$.

Exercice 26 **Intégration par parties.**

n est dans $\mathbb{N}$. Existence et calcul de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-(n+1)\,t}\,\sin t\,\mathrm{d}t$.

▶ **En plus ? Intégration d'une série. Permutation de $\sum$ et $\int$.**

Q1. Montrer que la fonction $g : x\to \dfrac{\sin x}{e^x-1}$ est prolongeable en une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

Montrer, en utilisant des inégalités classiques que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Q2. Montrer que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t-1}\,\mathrm{d}t$ converge.

Q3. p est dans $\mathbb{N}$. Montrer l'existence et calculer $I_p=\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-(p+1)t}\sin t\,\mathrm{d}t$... $\frac{1}{1+(p+1)^2}$

Q4. Prouver que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ (donner une forme intégrale aux sommes partielles et passer à la limite en utilisant Q1.).

Exercice 27 **Changement de variable. Intégration par parties**.

Q1. Montrer que $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.

Q2. Montrer que $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ est de même nature que $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.

Q3. Montrer la convergence de K, J et I.

Q4. Montrer que $t \to \sin(t^2)$ n'a pas de limite en $+\infty$ (construire deux suites qui tendent vers $+\infty$ dont les images par f n'ont pas la même limite).

Exercice 28 **Changement de variable.**.

Q1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+\,*},\ \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-\alpha\, t}\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ (on se ramènera à Γ).

Q2. Montrer que pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$, $I_k = \displaystyle\int_0^1 t^k (\ln t)^k\,\mathrm{d}t$ converge et vaut : $\dfrac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}}$ (on pourra penser à poser $u = -\ln t$).

En plus ? Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^k}$.

Exercice 29 **Bertrand for ever**.

Trouver le domaine de définition de $f : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^3\, t^x\, e^{-2t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 30 **Pour se mettre à jour ?**

Étudier la convergence de : $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(x^2\right)\, \ln\left(1 - x^2\right)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 31 **Etude d'une fonction définie par une intégrale**. ★

Q1. Trouver le domaine de définition de $F : x \to \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Q2. Montrer que F est dérivable sur son domaine et calculer F'.

Q3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xF(x) = 0$.

Q4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $1 - F(0)$ (intégrer par parties entre 0 et A).

SAVOIR FAIRE PAR COEUR

• Convergence de :

$\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\, e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} t^n\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t \text{ avec } n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t \text{ avec } P\in\mathbb{R}[X]}$

$\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t}\, \mathrm{d}t \text{ avec } n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t \text{ avec } P\in\mathbb{R}[X]}$

$\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t}$ $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t \text{ avec } \alpha\in]0,+\infty[}$

• n appartient à $\mathbb{N}$ et α est un réel strictement positif. Existence et calcul de :

$\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-\alpha\, t}\, \mathrm{d}t}$ $\boxed{\displaystyle\int_0^{1} \ln t\, \mathrm{d}t}$ $\boxed{\displaystyle\int_0^{1} t^n\, \ln t\, \mathrm{d}t}$ $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)\, t}\, \sin t\, \mathrm{d}t}$ $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)\, t}\, \cos t\, \mathrm{d}t}$

• α et β sont deux réels. Nature de :

$\boxed{\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\, (\ln t)^\beta}}$ $\boxed{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\, (|\ln t|)^\beta}}$ $\boxed{\displaystyle\int_0^{1} t^{\alpha-1}\, (1-t)^{\beta-1}\, \mathrm{d}t}$ $\boxed{\displaystyle\int_0^{1} (-\ln t)^\alpha\, (1-t)^\beta\, \mathrm{d}t}$

$\boxed{\displaystyle\int_0^{1} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta}\, \mathrm{d}t}$ $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta}\, \mathrm{d}t}$ $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^x\, t^y\, e^{-t}\, \mathrm{d}t}$

POUR FINIR LA FEUILLE...

Exercice 32 ESCP 2002 (1.18) *Texte ESCP ! !*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction non identiquement nulle, continue et périodique de période $T > 0$. On note :

$$\forall\, x\in\mathbb{R}_+,\quad F(x) = \int_0^x f(t)\, dt \quad \text{et} \quad M = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt$$

Q1. Étudier la convergence de la série de terme général $u_k = \displaystyle\int_{kT}^{(k+1)T} \frac{|f(t)|}{t}\, dt \quad (k \geqslant 1)$.

Q2. On suppose $M \neq 0$. a) Montrer que $F(x) \underset{+\infty}{\sim} Mx$. b) L'intégrale $I = \displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ est-elle convergente ?

Q3. On suppose $M = 0$. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ est convergente mais non absolument convergente.

Exercice 33 Q1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t\, \mathrm{d}t$ converge. On note ℓ sa valeur.

Q2. Soit x un réel strictement positif. Montrer que : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t = -\ln x + \ell + \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t$ (on commencera par justifier l'existence des intégrales).

En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t + \ln x\right)$.

Q3 Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, \mathrm{d}t$ existe et la calculer (utiliser Q2).