TD-COURS 1 REVISIONS D'ANALYSE 1 (INTÉGRATION) 2011-2012

- Intégrale d'une fonction en escalier.
- Intégrale d'une fonction continue.
- Propriétés de l'intégrale.
- Primitives et intégrales.
- Intégration par parties.
- Changement de variable.
- Formule de Taylor avec reste intégral. Formule de Taylor-Lagrange. Inégalité de Taylor-Lagrange. Formule de Taylor-Young.
- L'équation différentielle $f'(x) = a(x)\, f(x)$ ou $y' = a\, y$.
- Prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$.
- Méthode des rectangles. Sommes de Riemann.
- Intégrale d'une fonction continue par morceaux.

Les "gros théorèmes" : **Th des valeurs intermédiaires. Th de la bijection. Image d'un segment par une fonction continue. Th de la bijection. Th de la limite monotone. Dérivabilité et dérivée d'une réciproque. Th de Rolle. Th des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis. Formule de Leïbniz. Sommes de Riemann. Formule s de Taylor. Inégalité de Taylor-Lagrange.**

Dans la suite, sauf mention du contraire, les fonctions considérées sont des fonctions numériques de la variable réelle, les intervalles sont des intervalles de $\mathbb{R}$ le plus souvent non triviaux, ...

Il est urgent de revoir les formules de trigonométrie pour calculer des intégrales faisant intervenir les fonctions circulaires.

SAVOIR FAIRE

- Calculer des intégrales simples.
- Majorer, minorer, encadrer une intégrale.
- Utiliser les variations d'une fonction pour encadrer son intégrale.
- Faire une intégration par parties.
- Faire un changement de variable.
- Etudier la dérivabilité et calculer la dérivée de $x \to \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Montrer et utiliser Cauchy-Schwarz. Etudier le cas d'égalité pour des fonctions continues.
- Utiliser des sommes de Riemann pour calculer des limites de suites.
- Utiliser les différentes formules de Taylor et l'inégalité de Taylor-Lagrange.
- Utiliser le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$.
- Majorer l'erreur dans une méthode de calcul approché d'une intégrale.
- Etudier une fonction définie par une intégrale.
- Dériver sous le signe somme.
- Permuter une somme infinie et une intégrale.

- Montrer et utiliser que, lorque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\alpha t)\,\mathrm{d}t = 0$.
- Montrer et utiliser que, lorque f est continue (ou bornée) sur $[0,1]$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t)\,t^n\,\mathrm{d}t = 0$.
- Montrer qu'une fonction est continue par morceaux et calculer son intégrale sur un segment.
- Etudier un endomorphisme défini à l'aide d'une intégrale.
- Encadrer une somme (finie ou infinie) en utilisant des intégrales.
- Maitriser la technique de linéarisation pour calculer des intégrales faisant intervenir des fonctions circulaires.

LES EXERCICES À REFAIRE : $\boxed{\bigstar}$

Exercice 1 **Intégrale fonction de ses bornes**

Q0. **Un résultat fondamental**. f est une application d'un **intervalle** I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a appartient à I.

Que dire de $h : x \to \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$?

Q1. u et v sont deux applications dérivables de J dans $\mathbb{R}$ et f est une application continue de I dans $\mathbb{R}$. On suppose encore que $u(J) \subset I$ et $v(J) \subset I$.

Montrer que $h : x \to \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur J et calculer h'.

Q2. $\boxed{\bigstar}$ Étudier les variations de $x \to \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}\,\mathrm{d}t$.

▶ **En plus ?** Montrer que h est impaire sur $\mathbb{R}$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

▶ **En plus ? O HEC 2005** Etudier $x \to \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2+(\sin t)^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 2 **Encore une dérivation d'une fonction définie par une intégrale.** $\boxed{\bigstar}$

f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Dérivabilité et dérivée de $h : x \to \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$

▶ **En plus ?** Montrer que h est deux fois dérivable sur h et que $h + h'' = f$.

▶ **Contrôle** g est une fonction continue sur $[0,1]$. Montrer que $F\ x \to \displaystyle\int_0^1 |x-t|\,g(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ de dérivée seconde égale à $2\,g$.

Exercice 3 **Encadrement 1**. $\boxed{\bigstar}$

α est un réel de l'intervalle $]0,1[$. Trouver un équivalent de la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$.

▶ **Contrôle** α appartient à $]1,+\infty[$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Exercice 4 **Encadrement 2**.

$h : x \to \displaystyle\int_x^{2x}\frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$. Étudier h au voisinage de $+\infty$.

▶ **En plus ?** Étudier h au voisinage de 0, 1/2 et 1.

Exercice 5 **Majoration de la valeur absolue d'une intégrale 1**.

f est une fonction continue sur $[0,1]$. Montrer que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0.}$$

Exercice 6 **Récréation 1** Montrer que $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{t+n}\,\mathrm{d}t \sim \frac{2}{n}$.

Exercice 7 **Majoration de la valeur absolue d'une intégrale 2 : un classique (Edhec 2000)**. $\boxed{\bigstar}$

Montrer que pour tout élément x de $[-1,1[$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

► **En plus ?** Application Une urne contient au départ une boule blanche.

Un joueur lance une pièce de monnaie qui donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1-p$.

S'il obtient face il ajoute une boule rouge dans l'urne et relance la pièce ; s'il obtient pile il tire une boule de l'urne et il a gagné si la boule est blanche, perdu si la boule est rouge (le jeu s'arrête alors).

Trouver la probabilité pour que le joueur gagne (on pourra faire intervenir le rang ou le joueur gagne).

Exercice 8 **Au sujet d'une erreur fréquente**.

$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[0,1],\ f_n(t) = \dfrac{2^n\,t}{1+n2^n\,t^2}$.

Comparer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9 **Etude d'une fonction définie par une intégrale. Théorème de la bijection.**

Q1. Montrer que pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$ il existe un élément u_n de $]0,+\infty[$ et un seul tel que : $\displaystyle\int_{u_n}^1 \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t = n$.

Q2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

Q3. Etudier la nature de la série de terme général u_n (on pourra considérer le prolongement par continuité de $t \to \frac{e^t-1}{t}$ et chercher un équivalent de u_n).

Exercice 10 **Fonction continue de signe constant et d'intégrale nulle**.

f est une application **continue** de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments **distincts** de I.

Q1. On suppose que **f garde un signe constant** sur le segment d'extrémités a et b et que $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(t)}\,\mathbf{dt} = \mathbf{0}}$.

Montrer que f est nulle sur ce segment.

Notons que 4 hypothèses importantes interviennent dans ce résultat.

Q2. On suppose que $a < b$. Donner deux conditions suffisantes pour que : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

► **En plus ?** Application. f est une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ $(a < b)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 11 **Une application très classique du résultat précédent.** ★

a et b sont deux réels tels que $a < b$. n appartient à $\mathbb{N}^*$.

P est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ de degré n tel que $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \displaystyle\int_a^b t^k\, P(t)\, \mathrm{d}t = 0.$

Rappel : Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ne change de signe qu'au voisinage d'une de ses racines d'ordre impair.

Q1. Montrer que P admet au moins une racine d'ordre impaire dans $]a, b[$.

Q2 . On suppose que P admet exactement r racines d'ordre impair dans $]a, b[$: y_1, y_2, ..., y_r. Nécessairement $1 \leqslant r \leqslant n$.

On pose $Q = (X - y_1)(X - y_2)\cdots(X - y_r)\, P$.

Montrer que $\displaystyle\int_a^b Q(t)\, \mathrm{d}t$ ne peut pas être nul. En déduire que $r = n$.

Ainsi P est scindé, à racines simples toutes contenues dans $]a, b[$.

Exercice 12 **Linéarité de l'intégrale**. ★

E est l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. A tout élément f de E on associe $\hat{f} = T(f)$ définie par :

$$\hat{f}(0) = f(0) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*,\ \hat{f}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Montrer que T est un endomorphisme injectif et non surjectif de E.

▶ **En plus ?** Montrer que $\operatorname{Im} T$ est l'ensemble des éléments g de E de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et tels que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\, g'(x) = 0$.

Exercice 13 **Majoration de la valeur absolue d'une intégrale 3 : Riemann-Lebesgue**. ★

f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Montrer que :

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\alpha t)\, \mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(\alpha t)\, \mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 14 **Formules de Taylor. Inégalité de Taylor-Lagrange. Application**.

Q1. Énoncer les différentes formules de Taylor et l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Q2. Application a) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. a est un élément de I.
On suppose qu'il existe un réel M qui majore TOU(TE)S les $|f^{(n)}|$ sur I $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f^{(n)}(x)| \leqslant M)$.
Montrer que :

$$\boxed{\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)}$$

b) Application. Montrer que : $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R},\ \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}.$

▶ **En plus ?** Même chose pour cos et pour $x \to e^x$.

Exercice 15 **Dérivation sous le signe somme.** ★

Q1. Montrer que $\forall u \in \mathbb{R},\ |e^u - 1 - u| \leqslant \dfrac{u^2}{2}\, e^{\mathrm{Max}(0,u)} \leqslant \dfrac{u^2}{2}\, e^{|u|}$. Généraliser.

Q2. Montrer que $f : x \to \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \sin t}\, \mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.

Exercice 16 **Intégration par parties 1.**

Trouver une primitive de $t \to e^t \cos t$.

Exercice 17 **Intégrations par parties 2. Wallis.** ★

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n\, \mathrm{d}t$.

Q1. Calculer I_0 et I_1. Montrer que pour n dans $[\![2, +\infty[\![: I_n = \dfrac{n-1}{n}\, I_{n-2}$. En déduire pour p dans $\mathbb{N}$, I_{2p} et I_{2p+1} en fonction de p.
Q2. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $I_n I_{n-1} = \dfrac{\pi}{2n}\cdot$
Q3. Montrer que $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décoissante. En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$.
Q4. Montrer que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}\cdot$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$. Retrouver ce résultat à la main.

Exercice 18 **Changement de variable.**

Q1. Trouver une primitive de $f : x \to \dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ $(u = \sqrt{1+e^t})$.

Q2. Calculer a) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos\theta}{3 + 2\cos 2\theta}\, \mathrm{d}\theta$; b) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{2 + \sin(2\theta)}\, \mathrm{d}\theta$; c) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{2 + \cos\theta}\, \mathrm{d}\theta$.

Exercice 19 **Somme de Riemann 1**

a) Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}\cdot$

b) **O HEC 2005** Trouver un équivalent de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Big(k\, \ln(n^2+k^2)\Big) - n^2 \ln n$.

► **En plus ?** Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1+\frac{n}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{n^2}}$.

Exercice 20 **Somme de Riemann 2. Intégrale de Poisson.** ★

x est un élément de $\mathbb{R}$ distinct de -1 et de 1. $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)\, \mathrm{d}t$.

Q1. Montrer que I existe.

Q2. Montrer que si n appartient à $[\![2, +\infty[\![: X^{2n} - 1 = (X-1)(X+1) \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} [(X - e^{ik\frac{\pi}{n}})(X - e^{-ik\frac{\pi}{n}})]$

Q3. Montrer que si n est dans $[\![2, +\infty[\![$, $\dfrac{\pi}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln(x^2 - 2x\cos(k\pi/n) + 1) = \dfrac{\pi}{n}\, \ln\left(\dfrac{(x^{2n}-1)(x-1)}{x+1}\right)$.

Utiliser ce qui précède pour calculer I (distinguer deux cas $|x|<1$ et $|x|>1$).

Exercice 21 **Inégalité des accroissements finis. Somme de Riemann 3.**

Q1. Montrer que : $\forall (s,t)\in[0,1]^2,\ |\ln^2(1+t)-\ln^2(1+s)|\leqslant 2|t-s|$.

Dans la suite de cet exercice, g est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique de période 1.

Q2. On pose pour tout $t\in[0,1]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n(t)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\Big[\ln^2\big(1+\frac{k+t}{n}\big)-\ln^2\big(1+\frac{k}{n}\big)\Big]$.

Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 u_n(t)g(t)\,dt=0$. En déduire que la suite $\Big(\displaystyle\int_0^1 g(nt)\ln^2(1+t)\,dt\Big)_n$ converge et donner sa limite en fonction de $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \ln^2(1+t)\,dt$.

Exercice 22 **Récréation 2**

$\forall n\in\mathbb{N},\ I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$. Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n$ et montrer que $1-I_n\sim\dfrac{\ln 2}{n}\cdot$

Exercice 23 **Prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^p$**

Q1. f est une application de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b[$. On suppose que f' admet une limite finie en b.

Montrer que f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

Q2. $p\in\mathbb{N}$. f est une application de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a,b[$. On suppose que $f^{(p)}$ admet une limite finie en b.

Montrer que f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a,b]$.

Q3. Et encore ? ?

Exercice 24 **Application du prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.** ★

$\forall x\in\Big[\dfrac12,1\Big[,\ f(x)=\dfrac{x(x-1)}{\ln x}\cdot$ Montrer que f se prolonge en une fonction de $\mathcal{C}^1$ sur $\Big[\dfrac12,1\Big]$.

Exercice 25 **D'après ESCP 2000 (1-26)** **Taylor-Lagrange, Leïbniz, prolongement d'une fonction de classe $\mathcal{C}^p$; la totale quoi !** ★

Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(0)=0$.

On définit alors la fonction g sur $\mathbb{R}^*$ par : $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ g(x)=\dfrac{f(x)}{x}\cdot$

Q1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

Q2. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}^*,\ g^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n\,n!}{x^{n+1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-x)^k}{k!}\,f^{(k)}(x)$.

Q3. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ \displaystyle\lim_{x\to0}g^{(n)}(x)=\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}\cdot$

Q4. En déduire que g se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 26 **Une conséquence intéressante mais hors programme**

Soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que :

H1 f est continue sur le segment $[a, b]$;

H2 f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$;

H3 f' admet une limite finie ℓ à gauche en b.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et $f'(b) = \ell$.

Application ? ? ? $\boxed{\bigstar}$ $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \begin{cases} (x^2 - x)\dfrac{\cos x}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Montrer que f est de $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (on proposera trois versions).

Exercice 27 **Rolle. Majoration de l'erreur dans la méthode des trapèzes**

Q1. h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et trois fois dérivable sur l'intérieur de I. α et β sont deux éléments de I tels que $\alpha < \beta$.

On se propose de montrer qu'il existe un élément c de $]\alpha, \beta[$ tel que :

$$h(\beta) = h(\alpha) + \frac{\beta - \alpha}{2}\big(h'(\alpha) + h'(\beta)\big) - \frac{(\beta - \alpha)^3}{12}\, h'''(c).$$

a) Trouver le réel A tel que $\varphi : x \to h(x) - h(\alpha) - \dfrac{x - \alpha}{2}\big(h'(\alpha) + h'(x)\big) - \dfrac{(x - \alpha)^3}{12} A$ s'annule en β. Dans la suite A a cette valeur.

b) Montrer alors que φ'' s'annule au moins une fois sur $]\alpha, \beta[$. Conclure.

c) Montrer que si h est de classe $\mathcal{C}^3$ sur I alors : $\left| h(\beta) - h(\alpha) - \dfrac{\beta - \alpha}{2}\big(h'(\alpha) + h'(\beta)\big) \right| \leqslant \dfrac{(\beta - \alpha)^3}{12} \operatorname*{Max}_{t \in [\alpha, \beta]} |h'''(t)|$.

Q2. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[\alpha, \beta]$. g est la fonction affine qui coïncide avec f en α et β. Ici $I = \displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\, \mathrm{d}t$!

Calculer $J = \displaystyle\int_\alpha^\beta g(t)\, \mathrm{d}t$ et montrer que : $|I - J| \leqslant \dfrac{(\beta - \alpha)^3}{12} \operatorname*{Max}_{t \in [\alpha, \beta]} |f''(t)|$.

Q3. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ et $M_2 = \operatorname*{Max}_{t \in [a, b]} |f''(t)|$.

n est un élément de $\mathbb{N}^*$ et $T_n = \dfrac{b - a}{n}\left[\dfrac{f(a)}{2} + \dfrac{f(b)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f(a + k\frac{b - a}{n})\right]$. Montrer que : $|\displaystyle\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t - T_n| \leqslant \dfrac{M_2(b - a)^3}{12n^2}$.

Exercice 28 **Fonction continue par morceaux**

Soit f une application de I (intervalle de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$. f est continue par morceaux sur I si f est continue par morceaux sur tout segment contenu dans I.

Q1. $\forall x \in]0, 1]$, $f(x) = (1/x) - \mathrm{Ent}\,(1/x)$. Montrer que f est continue par morceaux sur $]0, 1]$.

Q2. Calculer $I_n = \displaystyle\int_{1/n}^1 f(t)\, \mathrm{d}t$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.