TD-COURS 5 REVISIONS D'ALGÈBRE 2 : MATRICES 2011-2012

LES NOTIONS

- Généralités (définition, matrices particulières).
- Opérations sur les matrices.
- Matrice d'une application linéaire. L'isomorphisme fondamental.
- Matrice inversible.
- Changement de base. Matrices semblables.
- Transposition.

SAVOIR FAIRE

- Trouver la matrice d'une application est linéaire.
- Associer une application linéaire à une matrice.
- Définir analytiquement une application linéaire.
- Utiliser toutes les opérations (et leurs propriétés) sur les matrices.
- Calculer la puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice.
- Trouver le rang d'une matrice.
- Montrer qu'une matrice est inversible.
- Trouver l'inverse d'une matrice inversible.
- Trouver la matrice de passage entre deux bases.
- Utiliser les formules de changement de base.
- Montrer que deux matrices sont semblables.

Sauf mention du contraire E, E' et E'' sont dans la suite des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Exercice 1 **Ecrire la matrice d'une application linéaire**.

Q1. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une base de E. $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ est un élément de $\mathbb{K}^p$ et f est la forme linéaire de E qui à tout élément $u = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} x_k\, e_k$ de E associe $\sum_{k=1}^{p} a_k\, x_k$. Ecrire une matrice de f.

Q2. $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un élément de $\mathbb{K}^n$. $E = \mathbb{K}_r[X]$. $E' = \mathbb{K}^n$. On considère l'application linéaire f de E dans E' qui à tout élément de P de E associe $\big(P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)\big)$. Ecrire une matrice de f.

Q3. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$. $\forall M \in E,\ f(M) = AM - MA$. f est clairement un endomorphisme de E. Ecrire une matrice de E.

Q4. $E = \mathbb{R}_3[X]$. $\forall P \in E,\ f(P) = \Big(P(1), P(2), P(-1)\Big)$.

f est clairement une application linéaire. Ecrire une matrice de f. Trouver le noyau et l'image de f.

Exercice 2 **Pratique du produit matriciel 1**.

$(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. $A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

i et j sont deux éléments de $[\![1, n]\!]$.

Q1. Ecrire à l'aide de produits matriciels la $j^{\text{ème}}$ colonne $C_j(A)$ de A.

Q2. Ecrire à l'aide de produits matriciels la $i^{\text{ème}}$ ligne $L_i(A)$ de A.

Q3. Ecrire à l'aide de produits matriciels l'élément a_{ij}.

Ces résultats sont très utiles pour "extraire" une ligne, ou un colonne ou un élément d'une matrice.

Il permettent aussi de montrer, de manière élégante, l'égalité de deux matrices.

▶ **Contrôle**.
Reprendre le problème avec une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exercice 3 ★★ **Pratique du produit matriciel 2**.

Q1. A appartient à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et B appartient à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Vérifier que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Q2. Montrer que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont même trace.

Ce résultat permet de définir la trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et non nulle (comme la trace de l'une de ses matrices).

Exercice 4 **Pratique du produit matriciel 3**.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Q1. Que dire de ${}^tXY$ et de ${}^tYX$?

Q2. Que dire de $A = X\,{}^tY$? Calculer A^p en fonction de A, $\alpha = {}^tYX = {}^tXY$ et de p, pour tout élément p de $\mathbb{N}^*$.

★ Q3. a) $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Préciser $E_p\,{}^tE_q$ et ${}^tE_pE_q$ pour p et q dans $[\![1,n]\!]$.

b) $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient p, q, r et s quatre éléments de $[\![1,n]\!]$.

Montrer que si $q \neq r$ alors $E_{pq}\,E_{rs} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ et si $q = r : E_{pq}\,E_{rs} = E_{ps}$.

▶ **Contrôle**. **Interprétation matricielle des opérations élémentaires dans la méthode du pivot**.

$(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q1. i et j sont deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$ et λ est un éléments de $\mathbb{K}$. On note φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui même qui a une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associe la matrice déduite de A par l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda\,L_j$.

Clairement $\varphi(I_n) = I_n + \lambda\,E_{ij}$.

a) Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \varphi(A) = \varphi(I_n)\,A$.

b) Montrer que $I_n + \lambda\,E_{ij}$ est inversible et d'inverse $I_n - \lambda\,E_{ij}$.

▶ **Contrôle du contrôle**.

Q2. i et j sont deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$. On note ψ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui même qui a une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associe la matrice déduite de A par l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$.

a) Montrer que $\psi(I_n) = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$.

b) Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \psi(A) = \psi(I_n)\,A$.

c) Montrer que $\psi(I_n)$ est inversible et d'inverse elle même.

Q4. Traiter l'opération $L_i \leftarrow \lambda\,L_i$ $(\lambda \neq 0)$.

Exercice 5 ★ **Pratique du produit matriciel 4.**

Q1. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire supérieure.

Q2. D est une matrices diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les éléments de la diagonale sont deux à deux distincts.

a) Trouver toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec D.

b) Ici $K = \mathbb{C}$. Trouver le nombre de matrices R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $R^2 = D$.

▶ **Contrôle 1.**

$(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathcal{C}$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec <u>tous</u> les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q1. Montrer que $\mathcal{C}$ contient la droite vectorielle engendrée par I_n.

Q2. Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{C}$. Soient p et q deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$. $E_{pq} = (e_{ij})$.

Evaluer AE_{pq} et $E_{pq}A$. Qu'en déduire ?

Q3. Donner $\mathcal{C}$.

▶ **Contrôle 2.**

$E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des éléments $A = (a_{ij})$ de E tels qu'il existe un élément λ_A de $\mathbb{K}$ vérifiant :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} = \lambda_A \quad \text{pour tout } (i,j) \text{ dans } [\![1,n]\!]^2.$$

Q1. Montrer que si A et B sont deux éléments de $\mathcal{S}$, $A+B$, αA ($\alpha \in \mathbb{K}$) et AB sont encore des éléments de $\mathcal{S}$.

Q2. J est la matrice de E dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que $\mathcal{S}$ est l'ensemble des éléments de E qui commutent avec J.

Exercice 6 **Définition analytique d'une application linéaire.**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ est une base de E'. f est une application linéaire de E dans E' et $A = M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

u est un élément de E de matrice X dans $\mathcal{B}$. Montrer que la matrice des coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}'$ est AX.

Exercice 7 ★ **Base duale. Transposée.**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E. E^* est l'espace vectoriel des formes linéaires sur E. Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, e_i^* est la forme linéaire sur E définie par :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ e_i^*(e_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases}$$

Q1. Montrer que $\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*, \cdots e_n^*)$ est une base de E^*.
Q2. u est un endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$. Pour tout f dans E^* on pose : $\varphi(f) = f \circ u$.
Montrer que φ est un endomorphisme de E^* de matrice ${}^tA$ dans la base $\mathcal{B}^*$.

Exercice 8 ★ **Pratique du produit matriciel 5.**

a est le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{n}}$. On pose : $\forall (p,q) \in [\![1,n]\!]^2,\ u_{pq} = a^{(p-1)(q-1)}$ et $v_{pq} = 1/u_{pq}$.

On considère les éléments $U = (u_{pq})$ et $V = (v_{pq})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer UV et U^2.

Exercice 9 **Applications linéaires bijectives et matrices inversibles**. Facultatif.

Q1. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E et $\mathcal{B}' = ({e'}_1, {e'}_2, \dots, {e'}_n)$ est une base de E'. f est une application linéaire de E dans E' et $A = M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Montrer que A est inversible si et seulement si f est bijective. Que dire de plus ?

Q2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A est inversible si et seulement si il existe une matrice A' (resp. A'') de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A'A = I_n$ (resp. $AA' = I_n$).

Exercice 10 **Inversibilité d'une matrice triangulaire**. Facultatif.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E, f est un endomorphisme de E et $A = (a_{ij}) = M_{\mathcal{B}}(f)$. Pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$, $E_i = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_i)$.

Q1. Montrer que A est triangulaire supérieure si et seulement si : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(E_i) \subset E_i$.

Q2. On suppose A triangulaire supérieure. Montrer que A est inversible si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_{ii} \neq 0$.

Exercice 11 ★ **Matrice inversible**

A est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & n \end{pmatrix}$

▶ **Contrôle**. A est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. b) a est un élément de $\mathbb{K}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 12 ★ **Caractérisation des matrices de rang 1**.

Q1. $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L = (\ell_1\, \ell_2\, \dots\, \ell_n)$ une matrice non nulle de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

Montrer que $A = CL$ est une matrice de rang 1 (on pourra considérer le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de A).

Q2. Enoncer et démontrer une réciproque.

▶ **Contrôle**. X et Y sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prenant leurs valeurs dans $[\![1, n]\!]$. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si la matrice $A = (P(\{X = i\} \cap \{Y = j\}))$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1.

Exercice 13 **Polynôme de matrices 1**.

Q1. Soit $D = \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P un élément de $\mathbb{K}[X]$. Que dire de $P(D)$?

Q2. Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit Q un élément de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que $Q(A)$ et $Q(B)$ sont semblables.

▶ **Contrôle.**

A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que : $AB - BA = A$.

Q1. a) Exprimer de manière simple $A^kB - BA^k$ en fonction de A^k pour tout k dans $\mathbb{N}$.

b) Montrer que pour tout P dans $\mathbb{K}[X] : P(A)B - BP(A) = AP'(A)$.

Q2. On rappelle qu'il existe un polynôme non nul Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que : $Q(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

a) Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N} : A^kQ^{(k)}(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

b) En déduire qu'il existe un élément r de $\mathbb{N}$ tel que : $A^r = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Exercice 14 **Polynôme de matrices 2**. **QSP ESCP 2010**.

n et p sont deux éléments de $[\![2, +\infty[\![$. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $A^{p-1} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

On pose $E = \{P(A)\,;\, P \in \mathbb{R}[X]\}$.

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et trouver sa dimension.

Exercice 15 **Polynôme annulateur.**

Q1. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^3 + 2A^2 - A + I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}. Généraliser.

Q2. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A possède un polynôme annulateur non nul.

Exercice 16 $\boxed{\bigstar}$ **Matrice à diagonale strictement dominante**.

$A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

Montrer que A est inversible (prendre $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que AX=0 et considérer : $|x_{i_0}| = \text{Max}(|x_1|, |x_2| \cdots, |x_n|)$).

Exercice 17 **Système de Cramer**.

$A = (a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ est un élément fixé de $\mathbb{K}^n$. On considère le système linéaire à n équations et n inconnues :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Montrer que ce système admet une solution et une seule si et seulement si la matrice A est inversible.

Un rappel

$\mathcal{B}$ est une base de E, $\mathcal{B}'$ est une base de E' et $\mathcal{B}''$ est une base de E''. f est application linéaire de E dans E' et g une application linéaire de E' dans E''.

$$\boxed{M(g \circ f, \mathcal{B}, \mathcal{B}'') = M(g, \mathcal{B}', \mathcal{B}'') \times M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')}.$$

Exercice 18 ★ **Changement de base.**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E et $\mathcal{B}' = ({e'}_1, {e'}_2, \dots, {e'}_n)$ est une famille de n éléments de E.

Q1. $P = M_{\mathcal{B}}({e'}_1, {e'}_2, \dots, {e'}_n)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E si et seulement si P est inversible.

Q2. On suppose que $\mathcal{B}'$ est une base de E. P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. $P = \mathrm{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

a) Soit u un élément de E de matrice X dans $\mathcal{B}$ et de matrice X' dans $\mathcal{B}'$. Montrer que $PX' = X$.
b) Que dire de P^{-1} ?

Q3. $\mathcal{B}''$ est une troisième base de E. Montrer que :

$$\mathrm{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}'') = \mathrm{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \times \mathrm{Pas}(\mathcal{B}', \mathcal{B}'')$$

Exercice 19 **Changement de base pour une application linéaire.**

$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ sont deux bases de E. $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}'_1$ sont deux bases de E'. f est une application linéaire de E dans E'.

$A = M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ et $A_1 = M(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1)$. $P = \mathrm{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$ et $Q = \mathrm{Pas}(\mathcal{B}', \mathcal{B}'_1)$. Montrer que

$$A_1 = Q^{-1} A P$$

► **Contrôle.**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r non nul. Montrer qu'à deux petits abus près :

$$\exists (P, Q) \in GL_p(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}),\ Q^{-1} A P = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,p-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

En déduire que $\mathrm{rg}\, {}^t A = \mathrm{rg}\, A$

Exercice 20 **Inversibilité et transposée.**

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que ${}^t A$ est inversible si et seulement si A est inversible.

On suppose que A est inversible. Montrer que $\boxed{({}^t A)^{-1} = {}^t A^{-1}}$

Exercice 21 **Inveribilité d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$**

Q1. Rappeler la condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ soit inversible.

Q2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes deux une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

Pour tout ω dans Ω on considère la matrice $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$.

Déterminer la probabilité $P\big(\{\omega \in \Omega \mid M(\omega) \text{ inversible}\}\big)$

Exercice 22 **Caractérisation des matrices semblables.**

A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A et B sont semblables si et seulement il existe un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$, deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E et un endomorphisme f de E tels que $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = M_{\mathcal{B}'}(f)$.

Exercice 23 ★★ **Pratique de la semblablité 1.**

$n \in [\![3, +\infty [\![$. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ et $A^{n-1} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Montrer que A est semblable à : $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

En plus

Montrer que l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}(I, A, \ldots, A^{n-1})$.

Contrôle

A est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 24 ★★ **Pratique de la semblablité 2**.

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 25 **Semblablité encore et toujours**.

A est B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que si B est inversible AB et BA sont semblables.

▶ **Contrôle**. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

EN PLUS

Exercice 26 **Formule d'inversion de Pascal**. HEC 1998

Q1. n est un élément de $\mathbb{N}$. a) Vérifier rapidement que l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P(X)) = P(X+1)$$

est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer φ^{-1}.

b) Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer M^{-1}.

Q2. n est un élément de $\mathbb{N}$. On suppose que $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ appartiennent à $\mathbb{R}^{n+1}$ et vérifient :

$$\forall j \in [\![0, n]\!],\ b_j = \sum_{k=0}^{j} \mathrm{C}_j^k\ a_k = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} a_k.$$

a) Trouver un lien entre les deux matrices lignes $(a_0\, a_1\, \ldots\, a_n)$, $(b_0\, b_1\, \ldots\, b_n)$ et M.

b) En déduire, pour tout j dans $[\![0, n]\!]$, l'expression de a_j en fonction des nombres b_0, ..., b_j.

Q3. Retouver le nombre de surjections d'un ensemble de p éléments dans un ensemble de n éléments.

Exercice 27 **Pseudo-inverse d'une matrice** ESCP 98

n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit A une matrice de E de rang p. On appelle pseudo-inverse de A tout élément X de E tel que :

$$AXA = A,\ XAX = X \text{ et } AX = XA$$

Q1. Ici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2. A admet-elle un pseudo-inverse ?

Q2. Même chose avec $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q3. On suppose A inversible. Déterminer l'ensemble des pseudo-inverses de A.

Q4. X et X' sont deux pseudo-inverses de A. En partant de $AXAX'$, montrer que $AX' = XA$, puis que $X = X'$. Conclusion ?

Q5. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$.

a) On suppose que X est un pseudo-inverse de A. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice X dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$.

Montrer que $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f$ et que $\mathbb{K}^n = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

b) Réciproquement on suppose que $\mathbb{K}^n = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$. Montrer que A possède un pseudo-inverse.

Exercice 28 **Les matrices au service d'un grand classique d'analyse** ESSEC 1992

n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$. f est une application de classe $\mathcal{C}^n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et $f^{(n)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

On pose $M_0 = \operatorname*{Sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_n = \operatorname*{Sup}_{x \in \mathbb{R}} |f^{(n)}(x)|$. On se propose de montrer que, pour tout élément k de $[\![1, n-1]\!]$, $f^{(k)}$ est bornée.

h_1, h_2, ..., h_{n-1} sont $n-1$ réels non nuls et deux à deux distincts.

Q1. Montrer que $H_{n-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{h_1}{1!} & \dfrac{h_1^2}{2!} & \cdots & \dfrac{h_1^{n-1}}{(n-1)!} \\ \dfrac{h_2}{1!} & \dfrac{h_2^2}{2!} & \cdots & \dfrac{h_2^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{h_{n-1}}{1!} & \dfrac{h_{n-1}^2}{2!} & \cdots & \dfrac{h_{n-1}^{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix}$ est une matrice inversible de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

Q2. Pour tout réel x on pose : $\begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_{n-1}(x) \end{pmatrix} = H_{n-1} \begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{n-1}(x) \end{pmatrix}$.

a) Soit x un réel et k un élément de $[\![1, n-1]\!]$. En majorant $|f(x + h_k) - f(x) - F_k(x)|$ avec l'inégalité de Taylor-Lagrange, établir que :

$$|F_k(x)| \leqslant 2M_0 + \frac{|h_k|^n}{n!}\ M_n$$

b) En déduire que, pour tout élément k de $[\![1, n-1]\!]$, $f^{(k)}$ est bornée.
