TD-COURS 6 RÉDUCTION 2011-2012

LES NOTIONS

- Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe.
- Endomorphisme diagonalisable (définition et caractérisations).
- Le cas des matrices.
- Polynôme annulateur et valeurs propres.
- Quelques classiques.

SAVOIR FAIRE

- Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres d'un endomophisme et d'une matrice.
- Construire une base de vecteurs propes.
- Diagonaliser un endomophisme ou une matrice.
- Utiliser un polynôme annulateur d'un endomorphisme ou d'une matrice dans la recherche des valeurs propres.
- Calculer la puissance $p^{\text{ème}}$ d'une matrice.
- Trouver les racines $p^{\text{ème}}$ d'une matrice.

Sauf mention du contraire E est, dans la suite, un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ le plus souvent de dimension finie non nulle...

Exercice 1 **Sous-espaces en somme directes.**.

F_1, F_2, ..., F_p sont p sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E sur K.

Q1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

i) Tout élément de $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ est de manière unique somme d'un élément de F_1, F_2, ..., F_p.

i') $\forall u \in F_1 + F_2 + \cdots + F_p,\ \exists\ !\ (u_1, u_2, \ldots, u_p) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p,\ u = u_1 + u_2 + \cdots + u_p$.

ii) $\boxed{\forall (u_1, u_2, \ldots, u_p) \in F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_p,\ u_1 + u_2 + \cdots + u_p = 0_E \Rightarrow\ u_1 = u_2 = \cdots = u_p = 0_E.}$

iii) Pour tout k dans $[\![1, p-1]\!]$: $F_1 + F_2 + \cdots + F_k \cap F_{k+1} = \{0_E\}$.

Si l'une des assertions précédentes est vérifiée on dit que F_1, F_2, ..., F_p sont en somme directe.

On écrit alors : $F_1 + F_2 + \cdots + F_p = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$ ou $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$.

Q2. Donner sans démonstration d'autres caractérisations.

Q3. On suppose que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ et que f est un endomorphisme de E qui laisse stable F_1, F_2, ..., F_p.

On suppose encore que E est de dimension finie et que les sous-espaces vectoriels F_1, F_2, ..., F_p ne sont pas réduit au vecteur nul.

Construire une base de E "donnant à f une matrice simple "

Exercice 2 **Les sous-espaces propres sont en somme directe**.

f est un endomorphisme de E. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont p valeurs propres de f deux à deux distinctes.

Q1. $\forall i \in [\![1, p]\!],\ F_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i Id_E) = SEP(f, \lambda_i)$.

Montrer que la somme $F_{\lambda_1}+F_{\lambda_2}+\cdots+F_{\lambda_p}=SEP(f,\lambda_1)+SEP(f,\lambda_2)+\cdots+SEP(f,\lambda_p)$ est directe.

Q2. En déduire que si u_1, u_2, ..., u_p sont p vecteurs propres repectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_p, la famille $(u_1,u_2,\dots,u_p)$ est libre.

Q3. Conséquences si $\dim E=n$?

Q4. Si E est de dimension finie n : $\forall i\in[\![1,p]\!],\ \dim SEP(f,\lambda_i)=\dim E-\mathrm{rg}(f-\lambda_i\ \mathrm{Id}_E)=n-\mathrm{rg}(f-\lambda_i\ \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 3 **Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable**.

E est de dimension finie. f est un endomorphisme de E ayant exactement p valeurs propres distinctes : λ_1, λ_2, ..., λ_p.

$\forall i\in[\![1,p]\!],\ F_{\lambda_i}=\mathrm{Ker}(f-\lambda_i Id_E)=SEP(f,\lambda_i)$.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est diagonalisable.

ii) $E=\bigoplus_{k=1}^{p}F_{\lambda_k}=\bigoplus_{k=1}^{p}\mathrm{SEP}\ (f,\lambda_k)$

iii) $\dim E=\sum_{k=1}^{p}\dim F_{\lambda_k}=\sum_{k=1}^{p}\dim\Big(\mathrm{SEP}\ (f,\lambda_k)\Big)$.

Exercice 4 ♡ ★ ♡ ★ ♡ **Pratiquement. Valeurs propres et sous-espaces propres d'un endomorphisme**.

Q1. Montrer le théorème suivant.

Th. 1 **PPP** E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n non nulle.

f est un endomorphisme **diagonalisable** de E.

1. On obtient une base de E constituée de vecteurs propres de f en concatenant une base de chacun des sous-espaces propres de f.

2. Si $\mathcal{B}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$.

Q2. ★★★ $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ est une base de E. f est l'endomorphisme de E de matrice $A=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f. Diagonaliser f si cela est possible.

Exercice 5 **Une condition suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable**.

f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n non nulle.

Montrer que si f admet n valeurs propres deux à deux distinctes, f est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Exercice 6 ★ **Une application plus que classique du résultat précédent**

E est un espace vectoriel de dimension non nulle n sur $\mathbb{K}$. f et g sont deux endomorphismes de E.

On suppose que f a n valeurs propres distinctes. $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n.

Q1. Que dire des sous-espaces propres de f ?

Q2. On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que les sous-espaces propres de f (resp. g) sont stables par g (resp. f). En déduire que les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres de g.

Q3. Montrer que : $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si f et g se diagonalisent dans la même base.

Exercice 7 ★★★ **Une première condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable.**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On se propose de montrer que :

A est diagonalisable si et seulement si il existe une base de $\mathcal{M}_{\mathbf{n},\mathbf{1}}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A.

Q1. Ici on suppose que A est diagonalisable. Ainsi il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ telle que $P^{-1}AP = D$.

On note, pour tout j élément de $[\![1, n]\!]$, $C_j(P)$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de P.

Montrer que $\big(C_1(P), C_2(P), \ldots, C_n(P)\big)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n

2. $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n et P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à la base $\mathcal{B}$. Montrer que :

$$P^{-1}AP \text{ est la matrice diagonale } \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Que dire de A ?

Exercice 8 **Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une matrice soit diagonalisable (suite).**

A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q1. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Q2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est n.

Exercice 9 **L'aspect pratique** ♡ ★ ♡ ★ ♡

Retenir (c'est l'exercice !) le théorème suivant.

Th. 2 **PPP** Soit A une matrice **diagonalisable** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On obtient une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A en concatenant une base de chacun des sous-espaces propres de A.

2. Si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n et si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à la base $\mathcal{B}$ alors :

$$P^{-1}AP \text{ est la matrice diagonale } \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Exercice 10 ★★★ **Pratiquement. Valeurs propres et sous-espaces propres d'une matrice.**

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. A est-elle diagonalisable ?

Calculer A^n pour tout élément n de $\mathbb{N}$.

Exercice 11 ★★ **Pratiquement. Valeurs propres et sous-espaces propres d'une matrice.**

t est dans $\mathbb{R}$ et $A_t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$. A_t est-elle diagonalisable ?

Exercice 12 ★ **Pratiquement. Valeurs propres et sous-espaces propres d'une matrice.**

n est un entier supérieur ou égal à 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Diagonaliser A.

Exercice 13 **Lien entre les éléments propres d'un endomorphisme et ceux de sa matrice.**

A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. E est de dimension n, $\mathcal{B}$ est une base de E et f est l'endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$.

Q1. Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)$.

Q2. Soit λ une valeur propre de f et de A. Montrer que :

a) $\mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = \{M_{\mathcal{B}}(u) \mid u \in \mathrm{SEP}\ (f, \lambda)\}$

b) $\mathrm{SEP}\ (f, \lambda) = \{u \in E \mid M_{\mathcal{B}}(u) \in \mathrm{SEP}\ (A, \lambda)\}$

c) $\mathrm{SEP}\ (f, \lambda)$ et $\mathrm{SEP}\ (A, \lambda)$ sont isomorphes.

d) $\dim \mathrm{SEP}\ (f, \lambda) = \dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda)$.

Q3. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Exercice 14 **Polynôme annulateur et réduction.**

Q1. f est un endomophisme de E.

a) λ est un élément de $\mathbb{K}$, u un élément de E et P un élément de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que :

- Si $f(u) = \lambda\, u$ alors $\forall k \in \mathbb{N},\ f^k(u) = \lambda^k\, u$.
- Si $f(u) = \lambda\, u$ alors : $P(f)(u) = P(\lambda)\, u$.

Q2. On suppose que $\boxed{P \text{ est polynôme annulateur de } f}$ ($P \in \mathbb{K}[X]$ et $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$).

Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est **CONTENU** dans l'ensemble des zéros de P.

Q3. On suppose que E est de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$). Montrer que f possède un polynôme annulateur non nul.

Q4. Énoncer des résultats analogues pour les matrices.

EN PLUS...

Exercice 15 **Matrices semblables et réduction.**

Q1. Montrer que deux matrices semblables ont même spectre.

Q2. Soient deux matrices semblables A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.

Exercice 16 **Inverse d'une matrice**.

A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{Sp}(A^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$. Comparer les sous-espaces propres de A^{-1} avec ceux de A.

Montrer que A^{-1} est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Exercice 17 **Transposée d'une matrice**.

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{Sp}({}^tA) = \mathrm{Sp}(A)$.

Comparer les dimensions des sous-espaces propres de ${}^tA$ et de A.

Montrer que ${}^tA$ est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Exercice 18 ★ **Projecteur spectraux**.

f est un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. λ_1, λ_2, ..., λ_s sont les valeurs propres distinctes de f. On suppose que $s \geqslant 2$.

Pour tout i dans $[\![1, s]\!]$, on note p_i la projection sur SEP (f, λ_i) parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s}$ SEP (f, λ_j).

Q1. i est un élément de $[\![1, s]\!]$. Justifier la définition de p_i.

Q2. Montrer que $\forall r \in \mathbb{N}^*,\ f^r = \lambda_1^r\, p_1 + \lambda_2^r\, p_2 + \cdots + \lambda_p^r\, p_s = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \lambda_i^r\, p_i$.

Exercice 19 ★ **Réduction d'un polynôme de matrice**.

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et Q est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

Montrer que si A est diagonalisable, $Q(A)$ est diagonalisable et $\mathrm{Sp}\, Q(A) = \{Q(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{Sp}\, A\}$.

Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 20 ★ **L'exercice préféré de Sylvain**.

$n \in [\![2, +\infty[\![$ et J est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Diagonaliser J.

α et β sont deux réels. $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Diagonaliser A.

Exercice 21 ★★★ **Matrice diagonalisable n'ayant qu'une valeur propre**.

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant une valeur propre λ et une seule. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda\, I_n$.

Exercice 22 **Valeurs propres d'une matrices d'ordre** 2

Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

λ un élément de $\mathbb{K}$. Montrer que λ est une valeur propre de A si et seulement si $(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$.

Exercice 23 **Réduction d'une projection et d'une symétrie**

Le texte est dans le titre !

Exercice 24 p et q sont deux projecteurs du $\mathbb{K}-$espace vectoriel E tels que : $p \circ q = q \circ p$. $f = p + q$.

Q0 Justifier les inclusions $\operatorname{Sp} p \subset \{0, 1\}$ et $\operatorname{Sp} q \subset \{0, 1\}$

Q1. Soit λ une valeur propre de f et x un vecteur propre associé.

a) Montrer que $p\big(q(x)\big) = q\big(p(x)\big) = (\lambda - 1)\, p(x) = (\lambda - 1)\, q(x) \quad (1)$.

b) En utilisant Q0 et (1) montrer que $\lambda \in \{0, 1, 2\}$.

Q2. Montrer que 0 est valeur propre de f si et seulement si : $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \neq \{0_E\}$ (un sens clair ; pour l'autre Q0+(1)).

Q3. Montrer que 2 est valeur propre de f si et seulement si : $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q \neq \{0_E\}$ (again).

Q4. Ils ont oublié 1, toi pas , hein ?

Exercice 25 ★ **La réduction au service d'une suite définie par une relation de récurrence linéaire d'ordre 3.**

On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par : $u_0 = -4$, $u_1 = -1$, $u_2 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = \frac{1}{3}\,(u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n).$$

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

Déterminer une matrice A telle que, pour tout n dans $\mathbb{N}$: $U_{n+1} = AU_n$. Trouver une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A et déterminer les coordonnées de U_0 dans cette base.

En déduire U_n, puis u_n en fonction de n.

Exercice 26 **Epsilon**.

$E = \mathbb{R}_n[X]$. $\forall P \in E,\ f(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$.

Q0. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Q1. Montrer que $\operatorname{Sp}(f) = \{k(k+1),\ k \in [\![0, n]\!]\}$ et que f est un endomorphisme diagonalisable de E.

Q2. Montrer que pour tout k dans $[\![0, n]\!]$, un vecteur propre associé à la valeur propre $k(k+1)$ est de degré k.

Q3. Montrer que pour tout k dans $[\![0, n]\!]$ il existe un polynôme unitaire P_k et un seul appartenant à SEP $(f, k(k+1))$.

Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 27 ★ **Endomorphisme de polynômes again**

n est un élément de $[\![3, +\infty[\![$. $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout P dans E on pose : $f(P) = (X^2 + 1)P'' - 2XP'$.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Q2. Trouver la matrice de f dans la base canononique de E. En déduire le spectre de f. Déterminer le cardinal de cet ensemble.

Q3. Montrer que : $\operatorname{Ker} f \subset \mathbb{R}_3[X]$, puis que : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(1, X^3 + 3X)$. Déterminer $\operatorname{Ker}(f + 2Id_E)$.

Q4. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 28 **Endomorphisme diagonalisable et polynôme annulateur scindé à racines simples**

$n \in \mathbb{N}^*$. f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$.

Q1. On suppose que f est diagonalisable. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les valeurs propres distinctes de f et $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)$.
P est donc un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E constituée de vecteurs de f respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(f)(e_i) = P(\alpha_i)\, e_i = 0_E$. En déduire que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Morale ?

Q2. Un petit résultat préliminaire pour la réciproque.

a) g et h sont deux endomorphismes de E. On pose $\forall x \in \operatorname{Ker}(h \circ g)$, $\varphi(x) = g(x)$.

Montrer que $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im}\varphi \subset \operatorname{Ker} h$. En déduire que $\dim \operatorname{Ker}(h \circ g) \leqslant \dim \operatorname{Ker} h + \dim \operatorname{Ker} g$.

b) Généraliser ce dernier résultat à r endomorphismes de E.

Q3. On suppose que f possède un polynôme annulateur Q scindé à racines simples.

Ainsi il existe λ dans $\mathbb{K}^*$, il existe r dans $\mathbb{N}^*$ et il existe r éléments γ_1, γ_2, ..., γ_r de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts tels que $Q = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X - \gamma_k)$.

a) Montrer que $T = \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X - \gamma_k)$ est encore un polynôme annulateur de f.

En déduire, à l'aide de Q2, que $\dim E \leqslant \sum\limits_{k=1}^{r} \dim \operatorname{Ker}(f - \gamma_k \operatorname{Id}_E)$.

b) I est l'ensemble des éléments i de $[\![1, r]\!]$ tels $\operatorname{Ker}(f - \gamma_i \operatorname{Id}_E) \neq \{0_E\}$.

Montrer par double inclusion que $\operatorname{Sp} f = \{\gamma_i \,, i \in I\}$. Prouver enfin que f est diagonalisable et conclure l'exercice.

Exercice 29 **Matrice circulante**.

a b et c sont trois éléments de $\mathbb{C}$. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Diagonaliser A et M dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Exercice 30 **QSP HEC éco 2010** Q1. f est un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. $\dim E = n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Q2. X est Y sont deux variable aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la loi géométrique de paramètre p.

Trouver la probabilité de l'événement $A = \{\omega \in \Omega \mid \begin{pmatrix} X(\omega) & 0 \\ 1 & Y(\omega) \end{pmatrix}$ est diagonalisable$\}$

Exercice 31 ★ **Disques de Gerschgorin**. $A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout i élément de $[\![1, n]\!]$, on pose : $r_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$ et $D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leqslant r_i\}$.

Montrer que $\operatorname{Sp} A \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} D_i$ ($AX = \lambda X$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ non nul et considérer $|x_\ell| = \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\operatorname{Max}} |x_k|$).

► **Contrôle**. **Ovales de Cassini**. $A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout (i,j) élément de $[\![1,n]\!]^2$ on pose : $C_{ij} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}|\,|z - a_{jj}| \leqslant r_i\, r_j\}$.

Montrer que $\operatorname{Sp} A \subset \displaystyle\bigcup_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i\neq j}} C_{ij}$

Exercice 32 $\bigstar$ **Matrices stochastiques.**

On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des éléments $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} \geqslant 0 \text{ et } \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

Q1. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable pour le produit matriciel.

Q2. Soit A un élément de $\mathcal{S}$. Montrer que 1 est valeur propre de A.

Soit λ un élément de $\mathbb{C}$ valeur propre de A. Montrer que : $|\lambda| \leqslant 1$ ($|x_k| = \operatorname{Max}(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$...).

$\boxed{\star}$ Dans la suite A un élément de $\mathcal{S}$ tel que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} > 0$. Soit λ une valeur propre de A de module 1. On se propose de montrer que $\lambda = 1$ et que SEP (A, λ) est de dimension 1.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ

k est un élément de $[\![1,n]\!]$ tel que $|x_k| = \operatorname{Max}(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$.

Q3. a) Montrer que $|x_k| = \left| \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, x_\ell \right|$. En déduire qu'il existe un réel θ tel que : $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell} \left(\frac{x_\ell}{x_k} e^{-i\theta} - 1 \right) = 0$.

b) Montrer que : $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ x_\ell = e^{i\theta} x_k$ (prendre la partie réelle au niveau de l'égalité précédente et remarquer que $\frac{x_\ell}{x_k} e^{-i\theta}$ a une partie réelle inférieure ou égale à 1).

c) Conclure.

Exercice 33 **Caractérisation des droites et des hyperplans stables par un endomorphisme**

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension non nulle n. f est un endomorphisme de E.

Q1. a) Soit u un vecteur propre de f. Montrer que la droite vectorielle D engendrée par u est stable par f.

b) Réciproquement soit D une droite vectorielle de E stable par f. Montrer qu'elle engendrée par un vecteur propre de f.

On se propose maintenant de caractériser les hyperplans de E stables par f.

On rappelle que deux hyperplans sont égaux si et seulement si leurs équations dans une même base sont proportionnelles.

Q2. A est la matrice de f dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E.

Soit H un hyperplan de E d'équation $a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = 0$ dans $\mathcal{B}$.

On pose $V = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $W = {}^t\!AV = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

On pose encore $H' = \{x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + \cdots + x_n\, e_n \in E \mid b_1\, x_1 + b_2\, x_2 + \cdots + b_n\, x_n = 0\}$

a) Préciser la dimension de H' (deux cas).

b) Montrer qu'un élément u de E de matrice X dans $\mathcal{B}$ appartient à H si et seulement si ${}^tXV = 0$. Donner un résultat analogue pour H'.

c) On suppose que V est un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre λ. Montrer que H est stable par f (on pourra utiliser b))

d) Réciproquement on suppose que H est stable par f. Montrer alors que $H \subset H'$. En déduire, en faisant deux cas que V est un vecteur propre de ${}^tA$.

Q3. **Facultatif** Ici $n = 3$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver les sous-espaces de E stables par f.

Exercice 34 **Une petite QSP**

Q1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Q2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E tel que u^2 soit un projecteur de rang égal à 1.

a) Montrer que 0 est valeur propre de u et que u possède une autre valeur propre, égale à 1 ou à -1.

b) Montrer que si u admet 1 pour valeur propre et n'est pas lui-même un projecteur, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est A.

Exercice 35 ★ **Matrices semblables (again).**

Q1. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{C}$.

Q2. Calculer A^2 et A^4.

Q3. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

► **Contrôle 2**. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

► **Contrôle 1**. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 36 **Existence d'une valeur propre pour $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_\mathbf{n}(\mathbb{C})$.**

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A possède au moins une valeur propre.

Exercice 37 **Comparaison de** $\operatorname{Sp} Q(A)$ **et** $Q(\operatorname{Sp} A)$**.**

Q1. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Q est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Montrer que $\operatorname{Sp} Q(A) = Q(\operatorname{Sp} A)$.

En clair si λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les p valeurs propres distinctes de A alors $\operatorname{Sp} Q(A) = \{Q(\lambda_1), Q(\lambda_2), \ldots, Q(\lambda_p)\}$.

Q2. Et si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

POUR FINIR LA FEUILLE

Exercice 38 **ESCP 94 17** **Racines carrées d'une matrice non diagonalisable**.

f est l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ de matrice, dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f. f est-il diagonalisable ?
Q2. On suppose que g est un endomorphisme de E vérifiant : $g \circ g = f$.

a) Montrer que $g(e_2)$ et $g(e_3)$ sont des vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres 1 et 4.

En déduire que e_2 et e_3 sont des vecteurs propres de g. g est-il diagonalisable ?

b) Montrer que l'ensemble des valeurs propres de g est $\{1, 2\}$ ou $\{-1, -2\}$ ou $\{1, -2\}$ ou $\{-1, 2\}$.

c) Montrer qu'il existe deux réels δ et ε tels que :

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 1/(2\delta) & \delta & 0 \\ 1/(\delta + 2\varepsilon) & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}$$

Q3. Résoudre l'équation :

$$X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad X^2 = A$$

Exercice 39 **ESCP 2005 2.2** **Réduction.**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$ et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires dans E et non réduits au vecteur nul.

Soit $u_1 \in \mathcal{L}(E_1)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2)$ et $u_3 \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$.

On note u l'endomorphisme de E tel que : $\begin{cases} \forall\, x \in E_1, u(x) = u_1(x) \\ \forall\, x \in E_2, u(x) = u_2(x) + u_3(x) \end{cases}$.

Q1. Donner la forme de la matrice de u dans une base de E obtenue en mettant “bout à bout” une base de E_1 et une base de E_2.

Q2. a) Soit $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $x = x_1 + x_2$.

Montrer que : $u(x) = \lambda x \iff \begin{cases} u_1(x_1) + u_3(x_2) = \lambda x_1 \\ u_2(x_2) = \lambda x_2 \end{cases}$.

b) Montrer que si que λ est valeur propre de u alors λ est valeur propre de u_1 ou de u_2.

Montrer que si λ est valeur propre de u_1 alors λ est valeur propre de u.

Montrer que si λ est valeur propre de u_2 sans être valeur propre de u_1 alors λ est valeur propre de u.

c) Soit λ un réel qui est valeur propre de u_1 mais pas de u_2. Comparer les sous-espaces propres de u et de u_1 associés à λ.

d) Soit λ un réel qui est valeur propre de u_2 mais pas de u_1. Comparer les dimensions des sous-espaces propres de u et de u_2 associés à λ.

Q3. On suppose dans cette question que u_1 et u_2 n'ont pas de valeur propre commune. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u_1 et u_2 le sont.