TD-COURS 8 2011-2012

RÉVISIONS ET COMPLÉMENTS SUR LES PROBABILITÉS ET LES VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES.

- Ensemble dénombrable.
- Tribu, tribu engendrée, espace probabilisable
- Probabilité et espace probabilisé.
- Système complet (resp. quasi-complet) d'événements.
- Propriétés d'une probabilité. Probabilité d'une réunion. Limite monotone.
- Probabilités conditionnelles : définition et formules usuelles.
- Indépendance d'une famille d'événements.
- Notion de v.a.r.
- Quelques exemples.
- Fonction de répartion.
- Opérations sur les v.a.r.
- Notion de var discrètes.
- Caractérisation d'une v.a.r. discrète. Loi de probabilité.
- Opérations sur les v.a.r. discrètes. $g \circ X$.
- Moments d'une v.a.r. discrète.
- Les exemples classiques de v.a.r. discrètes.

Dans le rapport de l'épreuve de Math 2/ESCP 2003 on peut lire *“ Ce constat récurrent et désastreux, concernant des techniques de bases du cours de probabilité, met l'accent sur la faible préparation théorique des candidats... ”*

Ou encore *“ sa signification, pourtant capitale, échappe totalement aux candidats sans doute plus habitués aux tirages stériles (puérils ?) de boules colorées ou non dans des urnes plus ou moins discernables... ”*

Polémique hein ?
Cela donne bien envie de baisser son pantalon pour lui faire voir, à ce malotru, qu'effectivement c'est coloré mais que c'est parfaitement discernable et pas du tout stérile...

Du théorique en veux-tu du théorique en voilà, coco.

Exercice 1 **Notion de tribu et de tribu engendrée. Tribu des Boréliens**.

La tribu des Boréliens est la tribu sur $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$. Nous la noterons $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Montrer que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est encore la tribu engendrée par les intervalle du type $]-\infty, x]$ c'est à dira par $\mathcal{C} = \{]-\infty, x]; x \in \mathbb{R}\}$

► **Contrôle** Montrer que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est encore engendrée par $\{]-\infty, x[; x \in \mathbb{R}\}$, ou par $\{[x, +\infty[; x \in \mathbb{R}\}$, ou par $\{]x, +\infty[; x \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2 **Différentes caractérisations des variables aléatoires réelles**

$(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable et X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. $\mathcal{C}$ est ensemble des parties de $\mathbb{R}$ qui engendrent la tribu des boréliens.

Q1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) Pour tout borelien B de $\mathbb{R}$: $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

ii) Pour tout élément S de $\mathcal{C}$: $X^{-1}(S) \in \mathcal{A}$.

Q2. En déduire que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) Pour tout borelien B de $\mathbb{R}: X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

ii) Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}: X^{-1}(I) \in \mathcal{A}$.

iii) $\forall x \in \mathbb{R},\ X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A}$.

Exercice 3 **Probabilité image**

X est une variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On pose $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ P_X(B) = P\big(X^{-1}(B)\big)$. Montrer que P_X est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

On ne confondra pas P_X avec une probabilité conditionnelle...

Exercice 4 ★ **Respiration 1. Un peu de σ-additivité** .

On considère une pièce de monnaie qui donne pile avec la probabilité p ($p \in]0, 1[$). L'expérience consiste à faire des lancers successifs de cette pièce.

Calculer la probabilité d'obtenir deux piles consécutifs sans avoir avoir obtenu avant un pile suivi d'un face.

▶ **Contrôle 1** Une urne contient au départ une boule blanche.

Un joueur lance une pièce de monnaie qui donne pile avec la probabilité p ($0 < p < 1$) et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

S'il obtient face il ajoute une boule rouge dans l'urne et relance la pièce ; s'il obtient pile il tire une boule de l'urne et il a gagné si la boule est blanche, perdu si la boule est rouge (le jeu s'arrête alors).

Trouver la probabilité pour que le joueur gagne.

▶ **Contrôle 2** A et B jouent à pile ou face avec une pièce qui donne pile avec la probabilité p ($0 < p < 1$).
Si la pièce donne pile A marque un point si elle donne face c'est B qui marque un point. Le vainqueur est celui qui obtient deux points consécutivement.
Q1. Trouver la probabilité pour que A gagne au bout de n lancers. Trouver la probabilité pour que A gagne la partie.
Q2. Trouver la probabilité pour que le jeu ne s'arrête pas.

Exercice 5 ★★ **Respiration 2. Formule du crible. Le Puzzle**.

Un marchand de lessive décide "d'offrir" un puzzle à ses clients. Il imagine de mettre un morceau du puzzle dans chaque paquet de lessive et se propose d'estimer le nombre moyen de paquets qu'une brave ménagère doit acheter pour pouvoir jouir de ce magnifique cadeau !

Modélisons et tirons nos boules. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire avec remise des boules de l'urne.

X est la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour que les n numéros soient tous sortis.

Q1. Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, on note A_i l'événement : la boule numéro i n'est pas sortie au cours des p premiers tirages.

Calculer la probabilité de $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. En déduire $p(X > p)$. Montrer que la formule vaut encore pour $p = 0$ (à un petit abus près).

Q2. $\boxed{X \text{ prend ses valeurs dans } [\![n, +\infty[\![\text{ mais rien n'empêche de calculer } P(X = p) \text{ pour tout } p \text{ dans } \mathbb{N}^*, \text{ non ? ? ? ?}}$

Montrer que, pour p élément de $\mathbb{N}^*$: $p(X=p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} \frac{k}{n}\Big(1-\frac{k}{n}\Big)^{p-1}$.

Q3. Montrer que $E(X)$ existe et vaut : $n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\binom{n}{k}}{k}$. Par intégration montrer que : $E(X) = n\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\Big)$.

► **Contrôle** On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire sans remise remise et successivement toutes les boules de l'urne. On dit que l'on a une coïcidence au $i^{\text{ème}}$ tirage si l'on obtient à ce tirage la boule numéro i.

X est la variable aléatoire égale au nombre de coïcidences obtenues. Trouver la loi de X et montrer que $E(X)=1$ (il n'est pas indispensable d'utiliser la loi pour avoir l'espérance !).

► **En plus** ★★ Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

On tire une à une des boules de l'urne avec remise et on s'arrête lorsque l'on obtient un numéro supérieur ou égal au précédent. X_n est la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

Q1. Trouver l'ensemble des valeurs que peut prendre X_n (ensemble fini...).

Q2. Trouver, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $P(X_n > k)$ ($\frac{\binom{n}{k}}{n^k}$...). En déduire la loi de X_n.

Q3. Montrer que : $E(X) = \Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^n$.

Q4. Montrer que la suite de terme général X_n converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice 6 **Tribu $\mathcal{A}_{\mathbf{X}}$ des événements liés à X**

X est une variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

Montrer que $\mathcal{A}_X = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$.

Montrer que $\mathcal{A}_X$ est la tribu engendrée par $\{X^{-1}(]-\infty, x]), x \in \mathbb{R}\}$.

► **Contrôle**. Montrer que $\mathcal{A}_X$ est la tribu engendrée par $\{X^{-1}(I), I \in \mathcal{I}\}$, $\mathcal{I}$ étant l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$. Généraliser.

Exercice 7 ★ **Respiration 3. Formule des probabilités composées**.

Une urne contient b boules blanches et n noires.
On tire successivement et sans remise une boule de l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.

X est la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

Trouver la loi de X. Retrouver une formule classique de dénombrement. Calculer $E(X)$. Et avec remise ?

► ★★ **Contrôle 1** Même chose mais on attend la $r^{\text{ème}}$ boule blanche (on aura intérêt à faire du dénombrement plus que d'utiliser la formule des probabilités composés ; $E(X) = \frac{r(b+n+1)}{b+1}$).

► **Contrôle 2** Une urne contient b boule blanches et b boules noires. On tire une boule. Si elle est noire on s'arrête. Si elle est blanche on la remet dans l'urne en ajoutant a boules blanches et on recommence à tirer en respectant le même protocole. Montrer que la probabilité de ne jamais obtenir une boule noire est nulle

► **Contrôle 3** Une urne contient une boule blanche et trois boules noires. On tire successivement **avec remise** une boule de l'urne en respectant le protocole suivant ; pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, si le $k^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche on s'arrête sinon on ajoute $2k+3$ boules noires dans l'urne. Trouver la probabilité pour tirer la boule blanche blanche.

▶ **En plus : valeur du plus grand numéro tiré.** ★★

Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire simultanément p jetons. X_n est la variable aléatoire égale au plus grand numéro obtenu.

Trouver la loi de X_n. Faire une vérification. Trouver l'espérance de X_n et un équivalent lorsque n tend vers l'infini.

Même chose pour des tirages successifs avec remise ($P(X_n \leqslant k)$).

Exercice 8 **Propriétés de la fonction de répartition.**

X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et F_X est sa fonction de répartition.

Q1. Montrer que F_X est une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$.

Q2. Montrer que F_X admet une limite finie à droite et à gauche en tout point a de $\mathbb{R}$ et une limite finie en $+\infty$ et $-\infty$.

Q3. a est un réel. Montrer que $\lim\limits_{x\to a^+} F_X(x) = F_X(a)$ et $\lim\limits_{x\to a^-} F_X(x) = P(\{X < a\}) = F_X(a) - P(\{X = a\})$.

Q4. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.

Exercice 9 ★ **Savoir montrer qu'une application est une variable aléatoire.**

Q1. X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Montrer que $M = \text{Sup}(X, Y)$ et $I = \text{Inf}(X, Y)$ sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Q2. X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On suppose que X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^*$.

Montrer que $Y = \dfrac{1}{X}$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Exercice 10 ★★ **Respiration 4. Système complet. Echange**

Un sac contient N jetons numérotés de 1 à N. On dispose de N boules numérotées de 1 à N. M sont dans l'urne U_1 et $N - M$ dans l'urne U_2 $(0 < M < N)$.

On tire avec remise un jeton du sac et on change d'urne la boule dont le numéro est celui du jeton tiré. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, X_n est la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne U_1 après n tirages.

Dans tout l'exercice on s'appuira sur le fait que $X_n(\Omega) \subset [\![0, N]\!]$.

Q1. Trouver la loi de X_1 et son espérance.

Q2. Trouver, pour n élément de $\mathbb{N}^*$, la loi de X_{n+1} en fonction de celle de X_n.

Q3. Trouver, pour n élément de $\mathbb{N}^*$, l'espérance de X_{n+1} en fonction de celle de X_n.

Q4. Calculer $E(X_n)$, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

▶ ★★ **Contrôle** Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on note G_n la fonction génératrice de X_n. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $G_{n+1}(x) = x\, G_n(x) + \frac{1-x^2}{N}\, G'_n(x)$. Retrouver l'esprance de X_n pour n dans $\mathbb{N}^*$.

▶ **En plus** On considère trois boîtes numérotées de 1 à 3 et une infinité de jetons !
On place successivement et au hasard chacun de ces jetons dans une des trois boîtes.
Y est la variable aléatoire égale au nombre de jetons placés lorsque pour la première fois deux boîtes exactement sont occupées par au moins un jeton.

Trouver la loi de Y (faire une "vérification"). Calculer son espérance et sa variance (sans calcul ! !).

Exercice 11 **Somme de deux variables aléatoires réelles**. <u>Facultatif</u> !

X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Soit a un réel. Montrer que

$$(X+Y)^{-1}(]a,+\infty[) = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \Big[X^{-1}(]r,+\infty[) \cap Y^{-1}(]a-r,+\infty[)\Big]$$

$$\text{ou} \quad \{X+Y>a\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \Big[\{X>r\} \cap \{Y>a-r\}\Big]$$

En déduire que $X+Y$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Exercice 12 **Caractérisation d'une variable aléatoire réelle discrète**. <u>Facultatif</u> !

$(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable et X une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Q1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) X est une variable aléatoire discrète.

ii) $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable et $\forall x \in \mathbb{R},\ X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$.

iii) $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable et $\forall x \in X(\Omega),\ X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$.

Q2. On suppose que X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Montrer que $\big(X^{-1}(\{x\})\big)_{x\in X(\Omega)}$ ou $\big(\{X = x\}\big)_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements qui engendre $\mathcal{A}_X$.

Q3. On suppose que X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que F_X est entièrement déterminé par la loi de probabilité de X.

Exercice 13 ★ **Respiration 5. Runs**

Une urne contient des boules blanches en proportion p $(0<p<1)$ et des boules noires en proportion $q = 1-p$.

On tire successivement des boules avec remise. Un run est une succession de tirages donnant des boules de même couleur suivie d'une boule de couleur différente. La longueur du run est le nombre de boules de la même couleur.

Si on considère la suite de tirages "BBBNBBNNNNB", le premier run a pour longueur 3, le second a pour longueur 1, le troisième a pour longueur 2 et le quatrième pour longueur 4.

X (resp. Y) est la variable aléatoire égale à la longueur du premier (resp. second) run.

Q1. Trouver la loi de X. Faire une "vérification". Calculer $E(X)$.

Q2. Trouver la loi du couple (X,Y). En déduire la loi de Y et calculer $E(Y)$.

Exercice 14 ★ **Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète finie et un peu de convergence en loi...**.

Q1 X est une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

Q2. n appartient à $\mathbb{N}^*$ et X_n est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que :

$$X_n(\Omega) = \left\{\frac{k}{n}\ ;\ k \in [\![0,n]\!]\right\} \text{ et } \forall k \in [\![0,n]\!],\ P(\{X_n = \frac{k}{n}\}) = \frac{1}{n+1}$$

Trouver la fonction de répartition F_n de X_n. Pour tout élément x de $\mathbb{R}$, trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$.

Exercice 15 ★★ **Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète infinie et un peu de convergence en loi....**

λ est un réel strictement positif et n_0 un entier strictement plus grand que λ.

Pour tout élément n de $[\![n_0, +\infty [\![$, X_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}$ et F_n est la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y_n = \dfrac{X_n}{n}\cdot$

Q1. Déterminer F_n pour tout n dans $[\![n_0, +\infty [\![$.

Q2. Trouver $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} F_n(x)$ pour tout réel x.

Exercice 16 ★ **Lois usuelles 1. Loi binômiale. Promenade aléatoire**.

Q1. Faire un bref rappel sur la loi binômiale.

Q2. On considère un point lumineux L qui se déplace sur un axe d'origine O.

A l'instant 0 il se trouve en O et à chaque instant se déplace d'une unité sur la droite avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou d'une unité sur la gauche avec la probabilité $q = 1 - p$ et ceci de manière indépendante.

X_n est la variable aléatoire égale à l'abscisse du point L à l'instant n.

Trouver la loi de X_n (faire intervenir le nombre B_n de déplacement vers la droite).

Exercice 17 **Lois usuelles 2. Formule de Vandermonde. Loi hypergéométrique**.

Une urne contient a boules blanches et b boules noires ($a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$). $N = a + b$ et $p = a/(a+b)$ est la proportion de boules blanches.

On tire simultanément n boules de l'urne $(1 \leqslant n \leqslant a + b)$.

X est la variable aléatoire réelle qui compte le nombre de boules blanches obtenues. Trouver la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 18 **Calcul de l'espérance d'une var discrète finie. Loi géométrique tronquée.**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p et M un élément de $\mathbb{N}^*$.

Déterminer la loi de $Y = \mathrm{Min}(X, M)$ et son espérance.

Exercice 19 ★★ **Calcul de l'espérance d'une var discrète infinie. Tournoi. Deux points consécutifs pour vaincre.**

Une pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
Deux joueurs A et B font des pile ou face avec cette pièce. Si la pièce donne pile A marque un point et dans le cas contraire c'est B qui marque un point. Le vainqueur est celui qui obtient deux points consécutivement.
X est la variable aléatoire qui vaut 0 s'il n'y a pas de vainqueur et k si un vainqueur apparaît au bout de k lancers.
Q1. Calculer $P(X = k)$ pour tout k dans $\mathbb{N}^*$. En déduire $P(X = 0)$.
Q2. Calculer $E(X)$.

Exercice 20 **Sensibilisation à l'absolue convergence dans la définition de $\mathbf{E(X)}$**. Facultatif

On pose pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$, $u_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

On réordonne les termes de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ en prenant un terme d'indice impair suivit de deux termes d'indices pairs.

Ce qui donne 1, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{5}$, ... On obtient la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ v_{3k+1}=\frac{1}{2k+1},\ \forall k\in\mathbb{N},\ v_{3k+2}=-\frac{1}{2(2k+1)}\ \text{et}\ \forall k\in\mathbb{N},\ v_{3k+3}=-\frac{1}{2(2k+2)}.$$

Notons que $\boxed{\{u_k;k\in\mathbb{N}^*\}=\{v_k;k\in\mathbb{N}^*\}}$

Montrer les séries de terme généraux u_k et v_k convergent et que $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}u_k=\ln 2}$ et $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}v_k=\frac{1}{2}\ln 2}$.

Exercice 21 ★ **Variable aléatoire n'ayant pas d'espérance**. Une urne contient une boule rouge et une boule noire. On tire une boule de l'urne. Si elle est rouge on s'arrête sinon on la remet dans l'urne, on ajoute une autre boule noire dans l'urne et on procède à un autre tirage en respectant le même protocole. X est la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

Q1. Trouver la loi de X et étudier l'existence de l'espérance de X.

Q2. Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty}P(X=k)=1$.

Q3. Montrer, directement, que la probabilité de ne jamais obtenir une boule rouge est nulle (considérér $N_1\cap N_2\cap\ldots\cap N_n$).

Exercice 22 ★★ **Loi de probabilité. Espérance d'une var discrète infinie**.

Pour tout élément k de $[\![2,+\infty[\![$ on pose $f(k)=\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}$.

Q1. Montrer que f est une loi de probabilité.

Q2. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ qui admet f pour loi de probabilité.

a) Trouver la fonction de répartition de X.

b) Montrer que X possède une espérance et la calculer.

Q3. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

On tire une à une des boules de l'urne avec remise et on s'arrête lorsque l'on obtient un numéro supérieur ou égal au précédent. X_n est la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire X.

Exercice 23 **Le théorème de transfert**. Facultatif !

X est une variable aléatoire réelle discrète prenant exactement n valeurs distinctes x_1, x_2,... , x_n et g est une fonction numérique de la variable réelle dont le domaine de définition contient $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$.

$(g\circ X)(\Omega)=\{t_1,t_2,\ldots,t_q\}$ (ou t_1, t_2, ..., t_q sont q réels deux à deux distincts).

Q1. k appartient à $[\![1,q]\!]$ et $I_k=\{i\in[\![1,n]\!]\mid g(x_i)=t_k\}$. Montrer que $(g\circ X)^{-1}(\{t_k\})=\bigcup_{i\in I_k}X^{-1}(\{x_i\})$.

En déduire que $g\circ X$ est une variable aléatoire réelle finie sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

On pose $Y=g\circ X$. Montrer que $\mathcal{A}_Y\subset A_X$.

Q2. Montrer que :

$$\boxed{E(g\circ X)=\sum_{i=1}^{n}g(x_i)\,P(\{X=x_i\})=\sum_{x\in X(\Omega)}g(x)\,P(\{X=x\})}$$

Exercice 24 ★ **Lois usuelles 3. Loi géométrique. Fonction génératrice des moments.**

Q1. Faire un bref rappel sur la loi géométrique.

Q2. X est une variable aléatoire qui suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p.

Trouver le domaine de définition de la fonction numérique de la variable réelle $M_X : t \to E\left(e^{t\,X}\right)$ et calculer $M_X(t)$ pour tout élément t de ce domaine.

Exercice 25 **Lois usuelles 4. Loi de Poisson. Fonction génératrice des moments.**

Q1. Faire un bref rappel sur la loi de Poisson.

Q2. X est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ.

Trouver le domaine de définition de la fonction numérique de la variable réelle $M_X : t \to E\left(e^{t\,X}\right)$ et calculer $M_X(t)$ pour tout élément t de ce domaine.

► **Contrôle** La variable aléatoire X comptant le nombre de personnes fréquentant un magasin un jour donné suit une loi de Poisson de paramètre λ. Une personne qui entre dans le magasin a la probabilité p $(0 < p < 1)$ de faire au moins un achat ce jour là. Y (resp. Z) est la variable aléatoire égale au nombre de personnes achetant (resp. n'achetant pas) le jour considéré.

Trouver les lois de Y et Z. Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 26 **Moment d'ordre r.**

X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant un moment d'ordre r. Montrer que X possède un moment d'ordre r' pour tout élément r' de $[\![0, r]\!]$.

Exercice 27 **Variance d'une variable aléatoire réelle discrète.** Facultatif !

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prenant une infinité de valeurs.
$X(\Omega) = \{x_k\,, k \in [\![n_0, +\infty[\![\,\}$.
Q1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

- i) X possède une variance.
- i') X et $(X - E(X))^2$ possèdent une espérance.
- ii) $E(X)$ existe et la série de terme général $(x_k - E(X))^2\,P(X = x_k)$ est convergente.
- iii) X possède un moment d'ordre 2.
- iii') La série de terme général $x_k^2\;P(X = x_k)$ est convergente.
- iv) $E(X^2)$ existe.

Q2. On suppose que $V(X)$ existe. En donner plusieurs formes.

Exercice 28 **Indicatrice d'un événement.**

Q1. Soit A un événement de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Montrer que l'indicatrice $\mathbb{1}_A$ de l'événement A est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(A)$. Préciser $E(\mathbb{1}_A)$ et $V(\mathbb{1}_A)$.

b) Etudier une réciproque.

Q2. Soit X une variable aléatoire réelle discrète finie sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Montrer que X est une combinaison linéaire d'indicatrices d'événements.

Exercice 29 ★ **Respiration 6. Trois fois rien**

X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, p)$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
Pour tout élément de ω de Ω on pose $Y(\omega) = X(\omega)/2$ si $X(\omega)$ est pair et $Y(\omega) = 0$ dans le cas contraire.

Trouver sa loi et son espérance si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

► **Contrôle** Trouver sa loi et son espérance si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 30 **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**.

X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant une variance. Montrer que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ P(\{|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}\cdot$$

Exercice 31 **Croissance de l'espérance**

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui possèdent une espérance.

Q1. Montrer que si X prend presque sûrement ses valeurs dans $[0, +\infty[$, $E(X) \geqslant 0$.

Q2. Montrer que si l'on a presque sûrement $X \leqslant Y$, $E(X) \leqslant E(Y)$.

Exercice 32 ★ **Respiration 7. Temps d'attente d'un résultat déjà obtenu**

On considère un entier naturel N supérieur ou égal à 3.

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On y effectue des tirages successifs d'une boule avec remise de la boule tirée après chaque tirage, jusqu'à obtenir pour la première fois un numéro déjà tiré. On note alors T_N le rang aléatoire de ce dernier tirage.

Montrer l'égalité : $E(T_N) = \sum_{k=0}^{N} P(T_N > k)$. En déduire l'égalité : $E(T_N) = \dfrac{N!}{N^N} \sum_{h=0}^{N} \dfrac{N^h}{h!}\cdot$

Exercice 33 ★ **Inégalité de Markov**.

Q1. Soit X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et possèdant une espérance.
Montrer que, pour tout réel λ, strictement positif : $\boxed{P(\{X \geqslant \lambda\}) \leqslant \dfrac{E(X)}{\lambda}\cdot}$

Q2. Retrouver l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Q3. Soit X une variable aléatoire réelle discrète possèdant un moment d'ordre r.

Montrer que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ P(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{E(|X|^r)}{\varepsilon^r}\cdot$

Exercice 34 ★★ **ESCP 2001 (3.24)** Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$, telles que pour tout $n \geqslant 1 : P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \dfrac{1}{2}$.

Q1. a) Calculer l'espérance $E(e^{tX_n})$, pour t réel fixé.

b) Montrer que pour tout t réel, on a $E(e^{tX_n}) \leqslant e^{t^2/2}$. $\left(\text{ on rappelle que pour tout réel } t : e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n!}\right)$

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Q2. a) Calculer l'espérance $E(e^{tS_n})$.

b) Calculer pour tout t réel, $\lim\limits_{n\to+\infty} E(e^{tS_n/\sqrt{n}})$.

Q3. Soit a un réel strictement positif.

a) Montrer que, pour tout t réel : $P(S_n \geqslant a) \leqslant e^{-ta}\, E(e^{tS_n})$.

b) En déduire que : $P(S_n \geqslant a) \leqslant e^{-a^2/2n}$.

c) En déduire un majorant de $P(|S_n| \geqslant a)$.

EN PLUS

Exercice 35 **Une version des allumettes de Banach** .

Un fumeur a dans chacune de ses poches une boîte contenant n allumettes indiscernables.

Chaque fois qu'il veut allumer une cigarette il choisit au hasard une de ces deux boîtes et y prend une allumette.

Il se rend compte qu'une boîte est vide lorsqu'il cherche à y prendre une nouvelle allumette (et non pas lorsqu'il y prend la dernière allumette).
X est la variable aléatoire égale au nombre d'allumettes restant dans une boîte lorsque le fumeur s'aperçoit que l'autre est vide.

Q1. Trouver la loi de X et en déduire une formule sommatoire.

Q2. Calculer $E(X)$ (on pourra exprimer $p(X = k+1)$ en fonction de $p(X = k)$).

Q3. Facultatif. Retrouver $E(X)$ en utilisant la formule sommatoire obtenue en Q1.

► Q1. Si $k \in [\![0, n]\!]$, $p(X = k) = 2\binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1}$. Q2. $E(X) = (2n+1)\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - 1$.

Exercice 36 ESCP 97 **Le plus bel exercice depuis 94 à l'ESCP**

p est un élément de $]1/2, 1[$, $q = 1 - p$ et $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout élément n de $\mathbb{N}$, on suppose que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et on pose $Y_n = 2X_n - n$.

Q1. Dans cette question n est élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout t dans $\mathbb{R}$: $E(e^{-tY_n}) = (pe^{-t} + qe^{t})^n$.

b) Montrer si t est élément de $[0, +\infty[$, $p(Y_n \leqslant 0) \leqslant E(e^{-tY_n})$ (on pourra utiliser markob).

c) Etudier les variations de $\varphi : t \to pe^{-t} + qe^{t}$, et en déduire qu'il existe un réel α appartenant à $]0, 1[$, indépendant de n tel que : $p(Y_n \leqslant 0) \leqslant \alpha^n$.

Q2. Ici n est dans $\mathbb{N}^*$. On pose $I_n = \mathrm{Inf}(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$.

a) Montrer que $I_n \subset [\![-n, 0]\!]$. Calculer $p(I_n = -n)$.

b) Si k est un entier de $[\![0, n-1]\!]$, on considère l'événement $C_k = \bigcup\limits_{i=k+1}^{n} \{Y_i \leqslant 0\}$.

Montrer que $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ p(C_k) \leqslant \dfrac{\alpha^{k+1}}{1-\alpha}$.

c) Montrer que si k appartient à $[\![0, n-1]\!]$ et si i est élément de $[\![-n, 0]\!]$, $p(I_n = i) \leqslant p(C_k \cap \{I_n = i\}) + p(I_k = i)$.

d) En déduire que $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ E(I_n/n) \geqslant -p(C_k) + E(I_k)/n$.

e) Montrer, en utilisant la définition que : $\lim\limits_{n\to+\infty} E(I_n/n) = 0$.

Exercice 37 **Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.**

X (resp. Y) est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

La fonction génératrice de X est la fonction numérique de la variable réelle $t \to \sum_{k=0}^{+\infty} P(\{X = k\})\, t^k$. Nous la noterons G_X.

Q1. Que dire de G_X si X est finie ?

Q2. Montrer que G_X est au moins définie sur $[-1, 1]$. Calculer $G_X(1) = 1$.

Q3. a) n est un élément de $\mathbb{N}$. Montrer que G_X possède un dln au voisinage de 0 dont on précisera la partie régulière.

b) Montrer que X et Y ont même loi si et seulement si $G_X = G_Y$.

Q4. Déterminer G_X si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ (resp. $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$).

Q5. Montrer que $E(X)$ possède une espérance si et seulement si G_X est dérivable à gauche en 1 et que dans ce cas : $E(X) = (G_X)'_g(1)$.

Q6. Montrer que si X et Y sont indépendantes : $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$.