# TD-COURS 10 VECTEURS ALÉATOIRES 2011-2012

- Introduction aux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et aux vecteurs aléatoires.
- Loi conjointe et lois marginales.
- Lois conditionnelles.
- Espérances conditionnelles.
- Indépendance.
- Loi d'une somme. Espérance d'une somme.
- Les deux sommes du programme.
- Loi d'un produit. Espérance d'un produit.
- Variance d'une somme. Covariance.
- Matrice de covariance.

---

**Exercice 1** **Rappel sur les variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.**

Q0. Faire un petit rappel (sans démonstration) sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$.

Q1. Rappeler la définition d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et en donner (sans démonstration) des caractérisations.

Q2. Quelles sont les notions fortes associées à une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ?

---

▶ **Contrôle 1** **Différents générateur des boréliens.**

$\mathcal{H}$ est un ensemble non vide de parties de $\mathbb{R}$ qui engendre la tribu des boréliens $\mathcal{B}_R$ de $\mathbb{R}$.

Montrer que l'ensemble des produits de $n$ éléments de $\mathcal{H}$ engendre la tribu des boréliens $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ de $\mathbb{R}^n$.

---

▶ **Contrôle 2** **Différentes caractérisations des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.**

$(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable et $X$ est une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{C}$ est ensemble des parties de $\mathbb{R}^n$ qui engendrent la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$.

Q1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) Pour tout borélien $B$ de $\mathbb{R}^n : X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

ii) Pour tout élément $C$ de $\mathcal{C} : X^{-1}(S) \in \mathcal{A}$.

Q2. En déduire des caractérisations des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

---

▶ **Contrôle 3** **Probabilité image.** Soit $X$ une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Montrer que l'application $P_X$ de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n},\ P_X(B) = P\big(X^{-1}(B)\big)$ est une probabilité sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$.

---

▶ **Contrôle 4** **Tribu des événements liés à une variable aléatoire valeurs dans $\mathbb{R}^n$.** Soit $X$ une variable aléatoire sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Montrer que $\mathcal{A}_X = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$.

---

**Exercice 2** **Un exemple important**.

$X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ sont $n$ variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Ainsi $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

On pose $\forall \omega \in \omega,\ X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$. Montrer que $X$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

**Exercice 3** **Variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ même combat...**.

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisé et $X$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout élément $i$ de $[\![1, n]\!]$, $X_i$ est l'application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ qui à chaque élément $\omega$ de $\Omega$ associe la $i^{\text{ème}}$ composante de $X(\omega)$ (dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

Montrer que $X$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si et seulement si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est un vecteur aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ; autrement dit si et seulement si pour tout élément $i$ de $[\![1, n]\!]$, $X_i$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

**Exercice 4** **Éléments remarquables d'un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$**.

$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est un vecteur aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Q1. Repréciser $P_{(X_1, X_2, \ldots, X_n)}$, $\mathcal{A}_{(X_1, X_2, \ldots, X_n)}$ et $F_{(X_1, X_2, \ldots, X_n)}$

Q2. Montrer que $\mathcal{A}_{(X_1, X_2, \ldots, X_n)}$ contient toutes les tribus $\mathcal{A}_{X_1}$, $\mathcal{A}_{X_2}$, ..., $\mathcal{A}_{X_n}$.

**Exercice 5** **Rappels sur les vecteurs aléatoires discrets à valeurs dans $\mathbb{R}^n$**.

Q1. a) Rappeler la définition d'un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

b) Rappeler la définition du système complet d'événements associé à un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

c) Rappeler la définition de la loi conjointe et des lois marginales d'un vecteurs aléatoires discret à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Q2. Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ c'est à dire un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

On suppose que $X(\Omega)$ (resp. $Y(\Omega)$) est équipotent à un intervalle $I$ (resp. $J$) de $\mathbb{N}$ (voire de $\mathbb{Z}$).

Ceci permet d'écrire $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in J\}$.

a) Montrer que $\Big(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}\Big)_{(i,j) \in I \times J}$ est un système complet d'événements qui engendre $\mathcal{A}_{(X,Y)}$.

b) Montrer que la loi conjointe de $(X, Y)$ permet d'obtenir la fonction de répartition de $(X, Y)$, les lois marginales du vecteur $(X, Y)$ et les lois conditionnelle.

**Exercice 6** **De la loi conjointe aux lois marginales et déjà la covariance**.

Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$ ($n \in [\![2, +\infty[\![$).

On tire deux boules successivement avec remise. $X$ est la variable aléatoire égale au plus grand numéro tiré et $Y$ la variable aléatoire égale au plus petit numéro tiré.

Q1. Trouver la loi de $(X, Y)$.

Q2. Trouver les lois de $X$ et $Y$.

Q3. Calculer $\operatorname{cov}(X, Y)$. $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

Q4. Calculer $V(X + Y)$.

**Exercice 7** **Loi de $X$ + lois cond. de $Y$ par rapport à $X$ donne loi de $Y$. Et déjà une somme.**

Un employé de bureau appelle $n$ personnes, avec pour chaque personne la probabilité $p$ de faire le bon numéro. $X$ est la variable aléatoire égale au nombre de bons numéros faits.

Les faux numéros sont refaits ; $Y$ est la variable aléatoire égale au nombre de numéros refaits et $Z$ est la variable aléatoire égale au nombre de bons numéros faits dans ceux qui sont refaits.

Q1. Trouver les lois de $X$ et de $Y$ ainsi que leurs espérances.

Q2. Trouver la loi de $Z$ sachant que $\{Y = k\}$ pour tout élément $k$ de $[\![0, n]\!]$.

Q3. Trouver la loi de $Z$ et son espérance.

Q4. Calculer l'espérance de $S = X + Z$. Confirmer avec la loi de $S$.

► **Contrôle** **Lois conditionnelles again.**

La variable aléatoire $X$ comptant le nombre de personnes fréquentant un magasin un jour donné suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$. Une personne qui entre dans le magasin a la probabilité $p$ $(0 < p < 1)$ de faire au moins un achat ce jour là. $Y$ (resp. $Z$) est la variable aléatoire égale au nombre de personnes achetant (resp. n'achetant pas) le jour considéré.

Q1. Trouver les lois de $Y$ et $Z$.

Q2. $Y$ et $Z$ sont-elles indépendantes ?

**Exercice 8** **Espérance conditionnelle.**

Soient $X$ une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $A$ un événement de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle.

L'espérance de $X$ sachant $A$ est, si elle existe, l'espérance de $X$ pour la probabilité $P_A$, c'est à dire l'espérance de $X$ en tant que variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$.

Q1. On suppose $X$ finie et que $X(\Omega)$ possède $n$ éléments distincts $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$.

Que dire de $E(X|A)$ ?

Q2. On suppose $X$ infinie et on pose : $X(\Omega) = \{x_k,\ k \in [\![n_0, +\infty[\![\ \}$.

a) Que dire de $E(X|A)$ ?

b) Montrer que si $X$ possède une espérance alors $E(X|A)$ existe.

c) Montrer que la réciproque est fausse.

**Exercice 9** **Espérance conditionnelle et système complet pour une variable aléatoire réelle finie.**

Q1. Soient $X$ une variable aléatoire discrète $\boxed{\text{finie}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet (ou quasi-complet) d'événements de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On pose $I' = \{i \in I \mid P(A_i) \neq 0\}$. Montrer que : $\boxed{E(X) = \sum_{i\in I'} E(X|A_i)\, P(A_i)}$.

Q2. $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que $\boxed{Y \text{ est finie}}$.

On pose $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $I' = \{i \in I \mid P(X = x_i) \neq 0\}$.

Montrer que : $\boxed{E(Y) = \sum_{i\in I'} E(Y|\{X = x_i\})\, P(X = x_i)}$.

**Exercice 10** **Application du résultat précédent.**

Castor se sert d'une pièce donnant pile avec la probabilité $p$ et face avec la probabilté $q = 1 - p$ $(0 < p < 1)$ pour remplir une urne de $n$ boules soit blanches, soit noires, selon le mode suivant :

il lance $n$ fois la pièce ; à chaque lancer, si pile apparaît, il place une boule blanche dans l'urne, sinon il y place une boule noire. Il informe Pollux de la procédure utilisée pour rmplir l'urne, mais ne lui dit pas le nombre de boules blanches qu'elle contient.

Q1. Pollux, rompu aux méthodes probabilistes, note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches. Trouver la loi de $X$.

Q2. On fixe $k$ dans $[\![0, n]\!]$. Pollux tire, au hasard et sans remise, exactement $k$ boules de l'urne et on appelle $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

a) Trouver la loi de $Y$ sachant que $\{X = i\}$ pour tout $i$ dans $[\![0, n]\!]$. En déduire $E(Y)$.

b) Trouver la loi de $Y$ et confirmer le résultat précédent.

---

▶ **Contrôle** On reprend l'exercice prćédent et on entraite la dernire question.

Q3. Castor a numéroté les boules blanches dans l'ordre de leurs placements dans l'urne (la première blanche placée est numérotée 1, la seconde blanche placée est numérotée 2, etc...). Même chose pour les boules noires.

$S$ est la somme des numéros portés par les boules blanches ($S$ prend la valeur 0 si l'on ne met aucune boule blanche dans l'urne.)

Trouver la loi de $S$ et son espérance.

---

**Exercice 11** **Sensibilisation aux séries doubles. Généralisation du résultat précédent.**

Q0. On considère une famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ de réels.

Donner un sens à l'existence de $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{ij}$.

Q1. On considère une famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ de réels **positifs**.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$ existe si et seulement si il existe un réel $M$ tel que : $\forall (r,s)\in\mathbb{N}^2,\ \displaystyle\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s} u_{ij} \leqslant M$

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} u_{ij}$ existe si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$ existe.

En cas d'existence, montrer que :

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} u_{ij} = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij}.$$

En cas d'existence on dit que la série double de terme génral $u_{ij}$ est convergente.

c) On considère une seconde famille $(v_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ de réels positifs telle que $\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2,\ v_{ij} \leqslant u_{ij}$.

Montrer que si $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} u_{ij}$ existe il en est de même pour $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} v_{ij}$.

Q3. On considère une famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ de réels telle que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} |a_{ij}|$ (ou $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} |a_{ij}|$) existe.

On dit alors que la série double de terme général $a_{ij}$ est absolument convergente.

Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{ij}$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{ij}$ existent, et que :

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{ij} = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{ij}.$$

Q4. **Facultatif** Pour tout couple $(i,j)$ d'éléments de $\mathbb{N}$ on pose : $a_{i,j} = \dfrac{1}{j+1}\Big(\dfrac{j}{j+1}\Big)^{i+1} - \dfrac{1}{j+2}\Big(\dfrac{j+1}{j+2}\Big)^{i+1}$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{ij}$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{ij}$ existent mais ne sont pas égales.

| |
|---|
| On peut développer des considérations analogues avec des séries doubles indexées par $I \times J$ où $I$ et $J$ sont deux intervalles de $\mathbb{N}$ (ou de $\mathbb{Z}$). |

Q5. $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est système complet d'événements de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $X$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $X(\Omega) = \{x_j, j \in \mathbb{N}\}$ et que $\forall i \in \mathbb{N},\ P(A_i) \neq 0$.

a) Montrer que $X$ possède une espérance si et seulement si

1. Pour tout élément $i$ de $\mathbb{N}$, $E(X|A_i)$ existe (ce qui assure l'existence de $E(|X|\,|\,A_i)$ ! !) ;
2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} E(|X|\,|\,A_i)\,P(A_i)$ existe.

En cas d'existence montrer que $E(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} E(X|A_i)\,P(A_i)$.

b) Enoncer le résultat le plus général à ce sujet et son corollaire.

---

**Exercice 12** **Un schéma classique. Espérances conditionnelles**.

Une urne $U_1$ (resp. $U_2$) contient des boules noires en proportion $a$ (resp. $b$) et des boules blanches en proportion $1-a$ (resp. $1-b$). $a$ et $b$ sont deux éléments de $]0,1[$.
On effectue des tirages successifs avec remise dans $U_1$ jusqu'à obtenir une première boule blanche. Si cette boule blanche arrive au rang $n$, on effectue $n$ tirages successifs avec remise dans l'urne $U_2$.
$N$ est la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués dans $U_1$ et $X$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues dans $U_2$.

Q1. Trouver la loi de $N$ et son espérance. Trouver pour $k$ dans $\mathbb{N}$ et $n$ dans $\mathbb{N}^*$, la loi de $X$ sachant que $\{N = n\}$.

Q2. Montrer l'existence et donner la valeur de $E(X)$ en utilisant la notion d'espérance conditionnelle.

Q3. Calculer $p(X=0)$. Montrer que pour tout $k$ dans $\mathbb{N}^*$, $p(X=k) = \dfrac{a^{k-1}(1-a)(1-b)^k}{(1-ab)^{k+1}}\cdot$ Retrouver $E(X)$.

---

► **Contrôle** **Loi conditionnelles et espérances conditionnelles**. Voir plus bas...

Soit $p \in ]0,1[$. On dispose d'une pièce amenant pile avec la probabilité $p$. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois pile. Soit $X$ le nombre aléatoire de face obtenus au cours de cette expérience.

Q1. Déterminer la loi de $X$. Vérifier que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(X=n) = 1$. Calculer $E(X)$.

Q2. On procède à l'expérience suivante : si $X$ prend la valeur $n$, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à $n$ dans une urne et on tire ensuite une boule de cette urne.

On note alors $Y$ le numéro obtenu. Déterminer la loi de Y. Calculer $E(Y)$

Q3. On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de $Z$ et vérifier que $Z$ et $Y$ sont indépendantes.

---

Indépendance : trois définitions.

**Déf. 1** $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'**événements mutuellement indépendants** si pour toute partie $\boxed{\textbf{finie}}$ (non vide) $J$ de $I$ :

$$P\Big(\bigcap_{i\in J} A_i\Big) = \prod_{i\in J} P(A_i)$$

**Déf. 2** $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-tribus de $\mathcal{A}$. $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est une famille de **tribus mutuellement indépendantes** si pour toute partie $\boxed{\textbf{finie}}$ non vide $J$ de $I$ et pour toute famille $(A_i)_{i\in J}$ d'événements telle que $\forall i \in J,\ A_i \in \mathcal{A}_i$ on a :

$$P\Big(\bigcap_{i\in J} A_i\Big) = \prod_{i\in J} P(A_i).$$

**Déf. 3** Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$(X_i)_{i\in I}$ **une famille de variables aléatoires indépendantes** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ si $(\mathcal{A}_{X_i})_{i\in I}$ est une famille de tribus indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

---

**Exercice 13** **Un petit point sur l'indépendance mutuelle de n tribus**.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, ..., $\mathcal{A}_n$ sont $n$ sous-tribus de $\mathcal{A}$.

On rappelle que $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n)$ est une suite de **tribus mutuellement indépendantes** si pour toute partie non vide $J$ de $[\![1, n]\!]$, pour toute famille $(A_i)_{i\in J}$ telle que $\forall i \in J,\ A_i \in \mathcal{A}_i$ on a : $P\Big(\bigcap_{i\in J} A_i\Big) = \prod_{i\in J} P(A_i)$.

Montrer que l'équivalence des propriétés suivantes.

i) $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n)$ est une suite de tribus mutuellement indépendantes.

i') Pour toute partie non vide $J$ de $[\![1, n]\!]$, pour toute famille $(A_i)_{i\in J}$ telle que $\forall i \in J,\ A_i \in \mathcal{A}_i$ on a :
$P\Big(\bigcap_{i\in J} A_i\Big) = \prod_{i\in J} P(A_i)$.

ii) $\forall (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_n$, $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est une suite d'événements mutuellement indépendants.

iii) $\boxed{\forall (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_n,\ P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2) \cdots P(A_n)}$.

---

**Exercice 14** **Le point sur l'indépendance mutuelle de n variables aléatoires**.

La question est dans le titre. On se contentera d'énoncer.

---

► **Contrôle** Montrer les équivalences précédentes.

---

**Exercice 15** **Variables aléatoires discrètes indépendantes**

Q1. Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$X(\Omega) = \{x_i,\, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j,\, j \in J\}$.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $X$ et $Y$ sont indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

ii) Pour tout élément $(x, y)$ de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ les événements $\{X = x\}$ et $\{Y = y\}$ sont indépendants.

ii') $\boxed{\forall x \in X(\Omega),\ \forall y \in Y(\Omega),\ P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(\{X = x\})\, P(\{Y = y\})}$

ii") $\forall (i, j) \in I \times J,\ P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = P(\{X = x_i\})\, P(\{Y = y_j\})$

Q2. Enoncer un résultat analogue pour $n$ variables aléatoires discrètes.

---

**Exercice 16** **Variables de Bernoulli indépendantes**

Q1. Montrer que deux variables aléatoires réelles de Bernoulli $X$ et $Y$, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, sont indépendantes si et seulement si $P(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) = P(\{X = 1\})\, P(\{Y = 1\})$.

Q2. Soient $A$ et $B$ deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que $A$ et $B$ sont indépendants si et seulement si leurs indicatrices sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

---

**Exercice 17** **Fonctions de variables indépendantes**. Facultatif !

$X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. $g$ et $h$ sont deux fonctions numériques de la variable réelle. On suppose que $X(\Omega)$ est contenu dans le domaine de $g$ et que $Y(\Omega)$ est contenu dans le domaine de $h$.

Montrer que $g \circ X$ et $h \circ Y$ sont indépendantes. Illustrer.

Proposer des généralisations.

---

**Exercice 18** **L'indépendance est une donnée**.

$X_1,\ X_2,\ ...,\ X_r$ sont $r$ variables aléatoires mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suivent la même loi géométrique de paramètre $p$. Etudier $Y = \underset{1 \leqslant i \leqslant r}{\text{Min}} X_i$

---

**Exercice 19** **L'indépendance est une exigence**.

Q1. Soit $p \in ]0, 1[$. On dispose d'une pièce amenant pile avec la probabilité $p$. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois pile. Soit $X$ le nombre aléatoire de face obtenus au cours de cette expérience.

Déterminer la loi de $X$.

Q2. On procède à l'expérience suivante : si $X$ prend la valeur $n$, on place $n + 1$ boules numérotées de 0 à $n$ dans une urne et on tire ensuite une boule de cette urne.

On note alors $Y$ la variable aléatoire égale au numéro obtenu.

a) Déterminer la loi de Y.

b) Montrer que $Y$ admet une espérance et la calculer.

Q3. On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de $Z$ et vérifier que $Z$ et $Y$ sont indépendantes.

---

► **Contrôle 1** On considère un entier $n$ supérieur ou égal à 2. Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On en tire successivement et sans remise toutes les boules en notant, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $X_k$ le numéro de la $k^{\text{ème}}$ boule tirée. Tous les tirages sont équiprobables. On dit qu'un tirage complet des $n$ boules présente un pic au rang $k \in [\![1, n]\!]$ si, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $X_i \leqslant X_k$. En particulier, tout tirage présente un pic au rang 1. On note $S_n$ la variable aléatoire égale au nombre de pics apparus dans un tirage.

Q1. L'entier $k$ étant compris entre 1 et $n$, on considère la variable aléatoire $T_k$ prenant la valeur 1 si le tirage présente un pic au rang $k$, la valeur 0 sinon.

a) Montrer que pour tout $i$ de $[\![1,n]\!]$, $P(T_i = 1) = \dfrac{1}{i}$.

b) Calculer l'espérance de la variable $S_n$ et en donner un équivalent quand $n$ tend vers $+\infty$.

Q2. a) Soient $i$ et $j$ deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$. Montrer que $T_i$ et $T_j$ sont indépendantes.

b) Calculer la variance de la variable $S_n$ et en donner un équivalent quand $n$ tend vers l'infini.

---

**Exercice 20** $\mathbf{Z = g(X, Y)}$. Facultatif !

$X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. $X(\Omega) = \{x_i,\, i \in I\}$, $Y(\Omega) = \{y_j,\, j \in J\}$.

Soit $g$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ dont le domaine de définition contient $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Pour tout $\omega$ dans $\Omega$ on pose : $Z(w) = g(X(\omega), Y(\omega))$.

Q1. a) Montrer que $Z = g(X, Y)$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et que pour tout élément $z$ de $Z(\Omega)$ :

$$p(\{Z = z\}) = \sum_{(i,j) \in G_z} p(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$$

où $G_z = \{(i,j) \in I \times J \mid g(x_i, y_j) = z\}$.

b) Examiner les cas $g : (x,y) \to x + y$ et $g : (x,y) \to x\, y$.

Q2. On suppose que $X$ et $Y$ sont $\boxed{\text{finies}}$.

a) Montrer que :

$$\boxed{E(Z) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} g(x_i, y_j)\ p(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})}$$

b) Montrer que $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

c) Préciser $E(XY)$ et montrer que si $X$ et $Y$ sont indépendantes : $E(XY) = E(X)E(Y)$.

---

**Exercice 21** **Deux sommes classiques de variables aléatoires indépendantes**.

Q1. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$, $X$ et $Y$ sont indépendantes. Montrer que $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n+m, p)$.

Q2. Que dire de la somme de $n$ variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p$ ?

Q3. $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, $X$ et $Y$ sont indépendantes. Montrer que $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

---

**Exercice 22** **Somme de $r$ var indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre $p$.**

$r$ est un élément de $[\![2, +\infty[\![$. $X_1$, $X_2$, ..., $X_r$ sont $r$ variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre $p$. On pose $S_r = X_1 + X_2 + \cdots + X_r$.

Q1. Montrer que : $\forall k \in [\![r, +\infty[\![$, $p(S_r = k) = \binom{k-1}{r-1}\, p^r\, q^{k-r}$.

Q2. Retrouver l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit une loi de Pascal.

---

**Exercice 23** **Une somme aléatoire de variables aléatoires**.

$(X_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires de Bernoulli, indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{B}, p)$, de paramètre $p$ $(0 < p < 1)$. $N$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, p)$ suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ et indépendante des $X_n$.

$Y$ est la variable aléatoire qui vaut 0 si $N = 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k$ sinon.

Q1. Décrire proprement $Y$ en tant qu'application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

Q2. $r$ est un élément de $\mathbb{N}^*$. Trouver la loi de $S_r = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} X_k$

Q3. Trouver la loi de $Y$ ainsi que son espérance (on pourra utiliser un système... ne pas conditionner...).

---

**Exercice 24** **Calcul de l'espérance du produit de deux var discrètes finies**.

Une urne contient $n$ boules. 2 blanches et $n-2$ noires. On tire successivement une à une toutes les boules de l'urne. $X$ (resp. $Y$) est le rang d'apparition de la première (resp. seconde) boule blanche.

Q1. Déterminer $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ et la loi du couple $(X, Y)$. Montrer que $E(XY) = \dfrac{(n+1)(3n+2)}{12}$.

Q2. Trouver la loi de $X$ et celle de $Y$. Que dire de la loi de $n+1-X$ ? Trouver $E(Y)$ et en déduire $E(X)$. Calculer $\operatorname{cov}(X, Y)$. Trouver $V(X+Y)$.

---

**Exercice 25** **Espérance de $Z = g(X, Y)$, d'une somme et d'un produit, again**.

Q1. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in J\}$. où $I$ et $J$ sont deux intervalles de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$).

Q1. Soit $g$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ dont le domaine de définition contient $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. $Z = g(X, Y)$.

Donner sans démonstration une CNS pour que $E(Z)$ existe et une formule (et même deux) permettant de la calculer lorsqu'elle existe.

Q2. On suppose que $X$ et $Y$ possèdent une espérance. Montrer que $X+Y$ possède une espérance et que $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

Q3. On suppose que $X$ et $Y$ possèdent une espérance et sont indépendantes. Montrer que $XY$ possède une espérance et que $E(XY) = E(X)\,E(Y)$.

Q4. On suppose que $X$ et $Y$ possèdent un moment d'ordre 2. Montrer que $XY$ possède une espérance.

**L'existence d'un moment d'ordre 2 pour $X$ et $Y$ est une condition SUFFISANTE pour que E(XY) existe mais pas nécessaire.**

Q5. On suppose que $X$ et $Y$ possèdent un moment d'ordre 2. Montrer que $X+Y$ possède un moment d'ordre 2 et une variance. Calculer $V(X+Y)$.

**L'existence d'un moment d'ordre 2 pour $X$ et $Y$ est une condition SUFFISANTE pour que V(X+Y) existe mais pas nécessaire.**

---

**Exercice 26** **Covariance : définition et propriétés**.

Q1. Rappeler la définition de la covariance... et un peu plus.

Q2. $X$, $Y$, et $Z$ sont trois variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possèdant un moment d'ordre 2. $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels. Montrer que :

1. $\operatorname{cov}(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha \operatorname{cov}(X, Z) + \beta \operatorname{cov}(Y, Z)$.

2. $\operatorname{cov}(Y, X) = \operatorname{cov}(X, Y)$.

3. $\operatorname{cov}(X, \alpha Y + \beta Z) = \alpha \operatorname{cov}(X, Y) + \beta \operatorname{cov}(X, Z)$.

4. $\operatorname{cov}(X, X) = V(X)$.

5. Si $X$ (resp. $Y$) est constante (ou quasi-constante) : $\text{cov}(X, Y) = 0$.

6. $\text{cov}(aX + b, cY + d) = ac\,\text{cov}(X, Y)$.

---

**Exercice 27** **Calcul de la covariance de deux lois discrètes infinies**.

Une urne contient des boules blanches en proportion $p$ $(0 < p < 1)$ et des boules noires en proportion $q = 1 - p$. On considère des tirages successifs d'une boule de l'urne avec remise. $X$ (resp. $Y$) est la variable aléatoire réelle égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première (resp. seconde) boule blanche.

Q1. Etudier $X$.

Q2. Trouver la loi conjointe de $X$ et $Y$. En déduire la loi de $Y$.

Q3. Montrer l'existence de la covariance de $(X, Y)$ et la calculer.

---

**Exercice 28** **Indépendance et covariance nulle**.

Q1. $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et possédant un moment d'ordre 2. Montrer que $\text{cov}(X, Y) = 0$.

Q2. $X$ est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. Montrer que $X$ et $X^2$ ne sont pas indépendantes et calculer $\text{cov}(X, X^2)$.

Q3. $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires de Bernoulli.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $X$ et $Y$ sont indépendantes.
ii) $\text{cov}(X, Y) = 0$.

---

**Exercice 29** **Variance d'une somme**.

$X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ sont $n$ variables aléatoires réelles discrètes possèdant un moment d'ordre 2.

1. Montrer que $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ possède une variance et que :

$$\boxed{V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \text{cov}(X_i, X_j)}$$

2. On suppose que $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ sont $\boxed{\text{deux à deux}}$ indépendantes. Montrer que :

$$\boxed{V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)}$$

---

**Exercice 30** **Les danseurs de Chicago, coïncidences, ...**

Dans un dancing il y a $n$ couples ($n$ hommes et $n$ femmes !). Chaque homme choisit une femme au hasard pour danser.

$X$ est la variable aléatoire égale au nombre d'hommes qui dansent avec leur femme.

Calculer $E(X)$ et $V(X)$ en écrivant $X$ comme somme de variables aléatoires de Bernoulli.

---

**Exercice 31** **La poignée aléatoire**.

$n$ est un élément de $\mathbb{N}^*$ et $p$ est un élément de $[\![1, n]\!]$.

On tire simultanément $p$ boules d'une urne contenant $n$ boules numérotées de 1 à $n$.

$X$ est la variable aléatoire égale à la somme des numéros portés par les boules obtenues.

Pour tout $i$ dans $[\![1,n]\!]$, on note $B_i$ la variable aléatoire égale à 1 si la boule numéro $i$ a été tirée et 0 sinon.

Q1. Exprimer $X$ à l'aide des $B_i$.

Q2. $i$ et $j$ sont deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$. Calculer $E(B_i)$, $V(B_i)$ et $\text{cov}(B_i,B_j)$.

Q3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

---

**Exercice 32** **Matrice de covariance**.

$X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ sont $n$ variables aléatoires réelles discrètes possèdant un moment d'ordre 2. $A = \big(\text{cov}(X_i,X_j)\big)$ est la matrice de covariance de $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$.

$\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_n$ sont des réels et $U = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$. Montrer que $V(\alpha_1\,X_1+\alpha_2\,X_2+\cdots+\alpha_n\,X_n) = {}^tUAU$.

---

**Exercice 33** **Coefficient de corrélation**.

$X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires possèdant une variance non nulle. Montrer que $|\rho_{X,Y}| \leqslant 1$.

Montrer que $|\rho_{X,Y}| = 1$ si et seulement si $Y$ est une fonction presque sûrement affine de $X$ ; autrement dit si et seulement si il existe deux réels $a$ et $b$ tels que $P(Y = aX+b) = 1$.

---

EN PLUS

---

**Exercice 34** **Loi hypergéométrique**.

Une urne contient $a$ boules blanches et $b$ boules noires ($a$ et $b$ sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$).
Les boules blanches sont numérotées de 1 à $a$.
On tire simultanément $n$ boules de l'urne ($n$ est élément de $[\![1,a+b]\!]$). Pour tout élément $k$ de $[\![1,a]\!]$, on note $X_k$ la variable aléatoire de Bernoulli qui vaut 1 si on a tiré la boule blanche numérotée $k$ et 0 sinon.

On pose $X = X_1+X_2+\cdots+X_a$.

$k$ et $i$ sont deux éléments distincts de $[\![1,a]\!]$. Déterminer $E(X_k)$ et $\text{cov}(X_k,X_i)$. Calculer $E(X)$ et $V(X)$. Normal ?

---

**Exercice 35** **Espérance du produit de deux lois discrètes infinies**

Une urne contient trois boules de couleurs respectives bleue, blanche et rouge. On effectue une succession de tirages avec remise dans cette urne. On note $X$ la variable aléatoire donnant le numéro du tirage où pour la première fois on a obtenu une boule bleue. On note $Y$ la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches obtenues avant la première boule bleue.

Trouver les lois de $X$, $(X,Y)$ et $Y$. Que dire de $Y+1$ ? Calculer $\text{cov}(X,Y)$ et $\rho_{X,Y}$.

► $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{3}\right)$, $\dbinom{i-1}{j}\left(\dfrac{1}{3}\right)^i$, $Y+1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $E(XY) = 6$, $\text{cov}(X,Y) = 3$, $\rho_{X,Y} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

---

**Exercice 36** ESCP 97 On lance une pièce de monnaie $n$ fois. A chaque lancer, la pièce donne pile avec la probabilité $p$ et face avec la probabilité $q = 1-p$ ($p \in ]0,1[$). Soit $X$ la variable aléatoire qui compte, dans la suite des $n$ lancers, le nombre de fois ou pile est immédiatement suivi de face.

Q1. Calculer $P(X = 0)$.

Q2. Soit $Z_i$ la variable aléatoire valant 1 si pile est obtenu au $i-1^{\text{ème}}$ lancer et face au $i^{\text{ème}}$, et valant 0 sinon.

Exprimer $X$ en fonction de $Z_i$. En déduire l'espérance et la variance de $X$.

**Exercice 37** **Variance d'une somme** .

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $p$, mutuellement indépendantes.

Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, on pose : $Y_n = X_n + X_{n+1}$.

Q1. $n$ est un élément de $\mathbb{N}^*$. Trouver la loi de $Y_n$, son espérance et sa variance.

Q2. $i$ et $j$ sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $i < j$. Calculer $\operatorname{cov}(Y_i, Y_j)$ (deux cas ; 0 ou $V(X_{i+1})$).

Q3. $n$ est un élément de $\mathbb{N}^*$. Trouver l'espérance et la variance de $S_n = (Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)/n$ (on pourra avoir deux idées ; $2p$ et $\frac{2(2n-1)pq}{n^2}$...).

**Exercice 38** **Toujours de la covariance**.

$n$ est un élément de $[\![2, +\infty[\![$ et $\Omega$ l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$.

Si $p$ est élément de $[\![1, n]\!]$, pour tout élément $\omega$ de $\Omega$ on pose : $X_p(\omega) = \omega(p)/n$.

$p$ et $q$ sont deux éléments distincts de $[\![1, n]\!]$. Trouver la loi de $X_p$. Calculer $E(X_p)$, $V(X_p)$ et $\operatorname{cov}(X_p, X_q)$.

**Exercice 39** **Variance d'une somme. Les paires de chaussures**.

On considère un sac contenant $n$ paires de chaussures différentes.
On tire au hasard et simultanément $2r$ chaussures du sac. $X$ est la variable aléatoire égale au nombre de paires complètes de chaussures obtenues.

Q1. Utiliser des variables aléatoires de Bernoulli pour trouver $E(X)$.

Q2. **Facultatif** Calculer $V(X)$. $E(X) = \dfrac{r(2r-1)}{(2n-1)}$ et $V(X) = \dfrac{2r(2r-1)(n-r)(2n-2r-1)}{(2n-1)^2(2n-3)}$.

**Exercice 40** **Variance d'une combinaison linéaire**.

On lance en une fois $n$ dés parfaits dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Pour tout $i$ dans $[\![1, 6]\!]$, $X_i$ est la variable aléatoire égale au nombre de dés ayant donné $i$. $S$ est la variable aléatoire égale à la somme des résultats obtenus.

Q0 Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i\,j$. Vérifier le résultat pour $n = 2$ $\left(\frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}\right)$.

Q1. Etudier $X_i$ pour tout $i$ dans $[\![1, 6]\!]$.

Q2. Montrer très simplement que $V(X_1 + X_2 + \cdots + X_6) = 0$. En déduire $\operatorname{cov}(X_1, X_2)$ $\left(\frac{-n}{36}\right)$.

Q3. Exprimer $S$ en fonction des $X_i$. En déduire $E(S)$ et $V(S)$ $\left(\frac{7n}{2} \text{ et } \frac{35n}{12}\right)$.

Q4. Retrouver $E(S)$ et $V(S)$ en écrivant $S$ comme somme de variables aléatoires indépendantes.

**Exercice 41** ESCP 98 $n$ est un élément de $\mathbb{N}^*$. Une urne contient $2n$ boules, dont $n$ blanches et $n$ rouges. On tire au hasard, une à une et sans remise, toutes les boules de l'urne. A chaque tirage, si la boule tirée est de couleur différente de celle obtenue au tirage précédent (s'il y en à un) on gagne un euro. On note $G$ le gain total en Euros obtenu à l'issue des $2n$ tirages.

Q1. Pour $k$ dans $[\![2, 2n]\!]$, on note $X_k$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 si on gagne un Euro au $k^{\text{ème}}$ tirage et 0 sinon. Déterminer la loi de $X_k$, son espérance et sa variance.

Q2. a) Exprimer $G$ en fonction de $X_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant 2n$. En déduire l'espérance de $G$.

b) Déterminer la covariance du couple $(X_k, X_l)$ pour $(k, l)$ dans $\mathbb{N}^2$ tel que $2 \leqslant k < l \leqslant 2n$ (on distinguera le cas $l = k + 1$ du cas général). En déduire la variance de $G$.