TD 13 2009-2010 VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

Exercice 1 **ESCP 2001 (3.20)** Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

Q1. Montrer que f est une densité de probabilité. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X ayant f pour densité.

Q2. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\cdot$

Etudier les variations de φ. Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$ et déterminer sa bijection réciproque.

Q3. On définit une variable aléatoire Y par : $Y = \varphi(X) = \dfrac{e^X - 1}{e^X + 1}\cdot$

Déterminer la fonction de répartition et une densité de Y.

Exercice 2 **loi log-normale**.

X est une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètres m et σ^2.

Q1. Montrer que $Y = e^X$ est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

Q2. Utiliser le théorème de transfert pour calculer $E(Y)$.

Exercice 3 D'après ESCP 2002 (3.10) **Matrice de varad**.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $[0, 2]$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on considère la matrice

$$M_\omega = \begin{pmatrix} 1 & -X(\omega) \\ X(\omega) & -3 \end{pmatrix}$$

Soit Y la variable aléatoire définie par : pour tout ω dans Ω, $Y(\omega)$ est la plus grande des valeurs propres de M_ω .

Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

Exercice 4 **Moment d'ordre 2**.

X est une variable aléatoire de densité f continue et telle que $E(X^2)$ existe.

Q1. Montrer que si x est un réel strictement positif :

$$0 \leqslant x^2 p(|X| \geqslant x) \leqslant \int_{-\infty}^{-x} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(x^2 p(|X| \geqslant x)\big) = 0$.

Q2. Soit x un réel positif. Montrer que :

$$\int_0^x t\,p(|X| \geqslant t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}\,p(|X| \geqslant x) + \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

(utiliser la fonction de répartition F et une intégration par parties).

En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,p(|X| \geqslant t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $E(X^2)/2$.

Exercice 5 **loi exponentielle**

X est une variable aléatoire de densité f paire et continue sur $\mathbb{R}$. On pose $Y = X^2$ et on suppose que : $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Donner une densité classique de Y. Donner sans démonstration une seconde densité de Y utilisant f. Déterminer f.

Exercice 6 **Un exemple concret**.

$\mathcal{R}$ est un repère orthonormé d'origine O du plan $\mathcal{P}$. A et B sont les points de coordonnées $(1,1)$ et $(-1,1)$. On choisit au hasard un point dans le triangle OAB. X (resp. Y) est la variable aléatoire réelle égale à l'abscisse (resp ordonnée) de ce point. On admet que la probabilité pour que le point obtenu soit dans une partie du triangle est proportionnelle à l'aire de cette partie.

Q1. Déterminer $Y(\Omega)$. Soit x un élément de $Y(\Omega)$. Faire un dessin permettant de "visualiser " l'événement $\{Y \leqslant x\}$.

Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en trouver une densité. Calculer $E(Y)$.

Q2. Reprendre le problème avec X.

Exercice 7 **Loi normale**

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. φ est sa densité continue et Φ sa fonction de répartition.

Q1. Montrer que $\lim\limits_{A\to+\infty}\Big(A(1-\Phi(A))\Big)$ (se ramener à un reste d'intégrale convergente)

Q2. Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}(1-\Phi(t))\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8 ESCP 98 Pour tout élément x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2}{(1+x)^2}$ si x appartient à $[0,1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

Q1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Q2. X est une variable aléatoire de densité f. Touver la fonction de répartition F de X. Calculer $E(X)$.

Q3. On pose $Y = X + \dfrac{1}{X}\cdot$ t est un réel.

a) Montrer que X prend ses valeurs dans $[2,+\infty[$

b) Résoudre l'inéquation : $x \in \mathbb{R}$ et $x^2 - tx + 1 \leqslant 0$ (distinguer 3 cas mais conclure en deux cas).

c) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

Exercice 9 **EDHEC 2000 Ex 1**

Q1 La durée de vie d'un composant électronique est une variable aléatoire X de densité f continue et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, et nulle sur $\mathbb{R}_-$. On note F la fonction de répartition de X.

a) On désigne par t et h deux réels strictement positifs. Exprimer, à l'aide de la fonction F, la probabilité $p(t,h)$ que le composant tombe en panne avant l'instant $t+h$ sachant qu'il fonctionnait encore à l'instant t.

b) Établir que, lorsque h est au voisinage de 0^+, $p(t,h) \sim \dfrac{f(t)}{1-F(t)}h$.

On pose désormais, pour tout réel positif t : $\lambda_X(t) = \dfrac{f(t)}{1-F(t)}$. On a bien sûr $\lambda_X(t) \geqslant 0$.

La fonction positive λ_X est appelée taux de panne du composant ou taux de panne de X.

Q2 Soit X une variable aléatoire qui possède une densité continue et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et de taux de panne λ_X.

a) Pour tout réel strictement positif t, calculer $\displaystyle\int_0^t \lambda_X(u)\,\mathrm{d}u$ puis montrer que la seule connaissance de la fonction "taux de panne" λ_X permet de déterminer la fonction de répartition F de X.

b) Déduire de la question précédente que les variables suivant des lois exponentielles possèdent un taux de panne constant et qu'elles sont les seules dans ce cas.

Q3 La durée de vie (en années) d'un appareil est une variable aléatoire X dont le "taux de panne" est la fonction λ_X définie par $\lambda_X(t) = t^3$.

a) Quelle est la probabilité que cet appareil survive plus d'un an ?

b) Quelle est la probabilité que cet appareil, âgé de 1 an, survive plus de 2 ans ?

Exercice 10 **HEC 2002**

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ toutes de même loi uniforme sur $[0,1]$.

Pour tout entier naturel n et tout élément ω de Ω on réordonne par ordre croissant les réels $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, ..., $X_{2n+1}(\omega)$ et on note $M_n(\omega)$ le terme médian i.e. le $(n+1)^{\text{ème}}$ dans l'ordre croissant.

Q1. Pour tout réel x élément de $[0,1]$, exprimer $P(M_n \leqslant x)$ à l'aide d'une somme de termes (! !).

Montrer que M_n est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

Q2. En considérant les variables aléatoires $X'_k = 1 - X_k$, montrer que la variable aléatoire M_n a pour espérance 1/2.

Q3. a) Prouver l'égalité $E(M_n) = \displaystyle\int_0^1 P(M_n > t)\,\mathrm{d}t$.

b) Retouver $E(M_n)$ (on commencera par calculer $\displaystyle\int_0^1 t^k\,(1-t)^{m-k}\,\mathrm{d}t$).

Exercice 11

X est une variable aléatoire réelle à densité de fonction de répartition F. On pose $Y = F \circ X$.
On se propose de montrer que Y est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

a) Soit y un élément de $[1, +\infty[$. Montrer que $\{Y \leqslant y\}$ est un événement et en donner la probabilité.

b) Même chose avec y dans $]-\infty, 0[$.

c) Ici y est un élément de $]0,1[$. On pose $A_y = \{t \in \mathbb{R} \mid F(t) \leqslant y\}$. Montrer que A_y est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Prouver que la borne supérieure t_0 de A_y vérifie $F(t_0) = y$ et que $A_y =]-\infty, t_0]$.

Montrer alors $\{Y \leqslant y\}$ est un événement et en donner la probabilité. Examiner le cas où $y = 0$ et conclure l'exercice.

Exercice 12 EDHEC 2002 Ex 3

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 de densités respectives f_1 et f_2 strictement positives et dérivables sur $\mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe une fonction g, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$, telle que :

$$\forall (x.y) \in \mathbb{R}^2,\ f_1(x)f_2(y) = g(x^2 + y^2).$$

Q1 On suppose, dans cette question seulement, que X_1, et X_2 suivent toutes les deux la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(x) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-\dfrac{x}{2}}$.

Q2 a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R},\ \dfrac{f_1'(x)}{x f_1(x)} = \dfrac{2g'(x^2+y^2)}{g(x^2+y^2)}$

b) On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \dfrac{f_1'(x)}{x f_1(x)}\cdot$

Soient x_1, et x_2 deux réels distincts et non nuls. Montrer que $h(x_1) = h(x_2)$ et en déduire que h est une fonction constante sur $\mathbb{R}^*$. On note a cette constante.

c) Soit k la fonction définie pour tout réel x par $k(x) = f_1(x)e^{-\frac{ax^2}{2}}$.

Montrer que k est constante sur $]0,+\infty[$ ainsi que sur $]-\infty,0[$. En déduire que k est constante sur $\mathbb{R}$, puis **montrer qu'il existe un réel K tel que** :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = K\, e^{\dfrac{ax^2}{2}}.$$

d) Utiliser le fait que f_1 est une densité de probabilité pour montrer que a est strictement négatif.

On pose dorénavant $\sigma_1 = \sqrt{\dfrac{-1}{a}}$.

e) En déduire que X_1 suit la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma_1)$.

Q3 On admet que l'on peut montrer de la même façon qu'il existe un réel σ_2 strictement positif tel que X_2 suive la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma_2)$.

Montrer, en revenant à la définition de g et en calculant $g(1)$ de deux façons, que $\sigma_1 = \sigma_2$, c'est-à-dire que X_1 et X_2 suivent toutes les deux la même loi normale.

Exercice 13 **ESCP 98 3.27** **Varad. Min aléatoire**. Q1. X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ de densité f nulle sur $]-\infty,0[$ et continue sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que la fonction de répartition F de X est telle qu'il existe α dans $]1,+\infty[$ vérifiant : $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha(1-F(t)) = 0$.

Montrer que X possède une espérance qui vaut : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1-F(t)\big)\,\mathrm{d}t$.

Q2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$, indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre 1. Étudier $U_n = \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\mathrm{Min}}\ X_k$ pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$.

Q3. N est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ suivant une loi géométrique de paramètre p. On suppose que N et les variables de la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ sont indépendantes. U est la variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ qui à tout élément ω de Ω associe : $U(\omega) = \underset{1\leqslant k\leqslant N(\omega)}{\mathrm{Min}}\ X_k(\omega)$.

a) Trouver la fonction de répartition de U.

b) Utiliser le préliminaire pour montrer que U possède une espérance et la calculer.

Q4. x est un élément de $[0,1[$.

a) Montrer que la série de terme général x^n/n converge.

N appartient à $\mathbb{N}^*$. Donner une forme intégrale simple de $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n}$ en remarquant que : $\dfrac{x^n}{n} = \displaystyle\int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t$.

b) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} E(U_n)\ p(N=n)$. Que retrouve-t-on ?
