# VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES

---

# VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES

**P** mentionne des résultats particulièrement utiles et souvent oubliés dans la pratique des variables aléatoires...

★ mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

**SD** mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

**!** Notions ou résultats qui ne semblent pas toujours très importants mais qui figurent explicitement dans le programme donc qui sont exigibles.

## 0 LE PROPOS

On considère une expérience aléatoire à laquelle on associe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On peut être amené à faire correspondre à chaque résultat de cette expérience un ou plusieurs réels donc à définir une application $X$ de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^n$. Le centre d'intérêt se déplace alors de $\Omega$ vers $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$. Il convient alors de construire un espace probabilisé autour de $\mathbb{R}$ où de $\mathbb{R}^n$ rendant compte du nouveau point de vue.

Dans ce chapitre nous étudierons le cas où $X$ est une application $\Omega$ dans $\mathbb{R}$. Il est naturel de munir $\mathbb{R}$ de la tribu engendrée par les intervalles donc de la tribu $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ des boréliens. Dès lors il convient d'étudier dans quelle mesure $X$ permet de construire, à partir de $P$, une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Si $B$ est borélien on peut penser à lui donner comme probabilité $P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\})$... à condition que $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$ soit dans $\mathcal{A}$...

## I RAPPELS

### ▶ 1. Rappels sur l'image réciproque d'une partie par une application.

**Déf. 1** Soit $f$ une application de $E$ dans $F$ et $B$ une partie de $F$.

**L'image réciproque de B par f** est l'ensemble des éléments de $E$ dont l'image par $f$ appartient à $B$.

Nous la noterons (abusivement) $f^{-1}(B)$.

$$\boxed{f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}}$$

★ La notation $f^{-1}(B)$ ne préjuge en rien de la bijectivité de $f$.

**Th. 1** Soit $f$ une application de $E$ dans $F$.

Si $B_1$ et $B_2$ sont deux parties de $F$ :

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \quad \text{et} \quad f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

Plus généralement si $(B_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de $F$ :

$$\boxed{f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} B_i\Big) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)} \quad \text{et} \quad \boxed{f^{-1}\Big(\bigcap_{i \in I} B_i\Big) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)}.$$

**Th. 2** Soit $f$ une application de $E$ dans $F$. Si $B$ est une partie de $F$ : $\boxed{f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}}$.

**Th. 3** Soit $f$ une application de $E$ dans $F$.

Si $B_1$ et $B_2$ sont deux parties de $F : B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

### ▶ 2. Tribu et image réciproque.

**Prop. 1** $\Omega$ et $\Omega'$ sont deux ensembles non vides. $f$ est une application de $\Omega$ dans $\Omega'$. $\mathcal{A}$ est une tribu de $\Omega$.

Alors $\mathcal{A}' = \{A' \in \mathcal{P}(\Omega') \mid f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$ est une tribu de $\Omega'$.

**Prop. 2** $\Omega$ et $\Omega'$ sont deux ensembles non vides. $f$ est une application de $\Omega$ dans $\Omega'$. $\mathcal{A}'$ est une tribu de $\Omega'$.

Alors $\mathcal{A} = \{f^{-1}(A'), A' \in \mathcal{A}'\}$ est une tribu de $\Omega$.

**Prop. 3** $\Omega$ et $\Omega'$ sont deux ensembles non vides. $f$ est une application de $\Omega$ dans $\Omega'$.

$\mathcal{S}'$ est un ensemble de parties (hum ?) de $\Omega'$ et $\mathcal{A}'$ est la tribu de $\Omega'$ engendrée par $\mathcal{S}'$.

Alors $\mathcal{A} = \{f^{-1}(A'), A' \in \mathcal{A}'\}$ est la tribu de $\Omega$ engendrée par $\mathcal{S} = \{f^{-1}(S'), S' \in \mathcal{S}'\}$.

### ▶ 3. Tribu des boréliens de $\mathbb{R}$.

**Déf. 2** **La tribu des boréliens** de $\mathbb{R}$ est la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$. C'est donc la plus petite tribu de $\mathbb{R}$ qui contient tous les intervalles de $\mathbb{R}$. Dans la suite nous la noterons $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Un on appellera **borélien** tout élément de la tribu des boréliens !

**Th. 4** La tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ est encore la tribu engendrée par l'ensemble des intervalles du type $]-\infty, x]$.

**Prop. 4**
- La tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ est encore la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$.
- La tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ est encore la tribu engendrée par l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

---

## II NOTION DE VARIABLE ALÉATOIRE RÉLLE

---

### ▶ 1. Définitions.

**Th. 5** et **déf. 3** Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.

Si $X$ est une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) Pour tout borélien $B$ de $\mathbb{R} : X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

ii) Pour tout intervalle $I$ de $\mathbb{R} : X^{-1}(I) \in \mathcal{A}$.

On appelle **variable aléatoire réelle** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $X$ de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'une de ces assertions.

★ Le programme retient ii) comme définition.

**Prop. 5** Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et soit $X$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

- $\{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$ est une tribu de $\Omega$.
- $X$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si et seulement si $\{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$ est contenue dans $\mathcal{A}$ (ou est une sous-tribu de $\mathcal{A}$).

**Déf. 4** $\boxed{!}$ $X$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$. La tribu $\{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$ de $\Omega$ est appelée **tribu des événements liés à X** ou **tribu engendrée par** $X$ ou **tribu associée à** $X$. Nous la noterons $\mathcal{A}_X$.

### ▶ 2. Probabilité image.

**Th. 6** et **déf. 5** *Complément* Soit $X$ une variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

L'application $P_{(X)}$ de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ P_{(X)}(B) = P\big(X^{-1}(B)\big)$ est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

On l'appelle la **probabilité image** de $P$ par $X$ (on parle également de loi de probabilité de $X$).

Lorsque l'on ne risque pas de confusion avec les probabilités conditionnelles on écrit $P_X$ à la place de $P_{(X)}$.

### ▶ 3. Une caractérisation importante des variables aléatoires réelles.

**Th. 7** $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable et $X$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

$X$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si et seulement si : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A}}$.

★ Plus généralement et sous les hypothèses du résultat précédent, si $\mathcal{S}$ est un ensemble (hum ?) de parties de $\mathbb{R}$ qui engendre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $X$ est une variable aléatoire si et seulement si : $\forall S \in \mathcal{S},\ X^{-1}(S) \in \mathcal{A}$.

## III FONCTION DE RÉPARTITION

### ▶ 1. Définition

**Déf. 6** Soit $X$ une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

La **fonction de répartition** de $X$ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout réel $x$ associe $P\big(X^{-1}(]-\infty, x])\big)$.

Nous la noterons le plus souvent $F_X$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X^{-1}(]-\infty, x])) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\})}$$

### ▶ 2. Propriétés caractéristiques

**Th. 8** Soit $X$ une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $F_X$ sa fonction de répartition.

- $F_X$ est à valeurs dans $[0, 1]$.
- $F_X$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
- $F_X$ est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

★ Notons que le premier point se déduit des suivants.

★ $\boxed{\text{P}}$ Ces quatre propriétés sont caractéristiques de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

Autrement dit si $F$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant ces quatre propriétés, $F$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. Voir le paragraphe suivant.

### ▶ 3. La fonction de répartition détermine la probabilité image

**Th. 9** *Complément. La fonction de répartition détermine la probabilité image : aspect 1.*

$X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. $F_X$ et $F_Y$ sont leurs fonctions de répartition.

$P_{(X)} = P_{(Y)}$ si et seulement si $F_X = F_Y$.

**Th. 10** *La fonction de répartition détermine la probabilité image : aspect 2.*

Soit $F$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$), croissante sur $\mathbb{R}$, continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ et telle que $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

1. *Complément* Il existe une probabilité $P'$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ et une seule telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ P'(]-\infty, x]) = F(x)$.

2. *A savoir* $F$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

## ▶ 4. Notations usuelles

**Notations usuelles 1** $X$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $F_X$ est sa fonction de répartition.

Soit $x$ un réel.

- Nous écrirons souvent $\{X \leqslant x\}$ ou $[X \leqslant x]$ l'événement $X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\}$.
- Nous écrirons alors : $F_X(x) = P(\{X \leqslant x\})$ ou $F_X(x) = P(X \leqslant x)$. De même nous écrirons :
- $P(X^{-1}(]-\infty, x[)) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}) = P(\{X < x\}) = P(X < x)$.
- $P(X^{-1}([x, +\infty[)) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant x\}) = P(\{X \geqslant x\}) = P(X \geqslant x)$.
- $P(X^{-1}(]x, +\infty[)) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\}) = P(\{X > x\}) = P(X > x)$.

**Notations usuelles 2** $X$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a \leqslant b$ nous écrirons encore :

- $P(X^{-1}(]a, b[)) = P(\{\omega \in \Omega \mid a < X(\omega) < b\}) = P(\{a < X < b\}) = P(a < X < b)$.
- $P(X^{-1}([a, b[)) = P(\{\omega \in \Omega \mid a \leqslant X(\omega) < b\}) = P(\{a \leqslant X < b\}) = P(a \leqslant X < b)$.
- $P(X^{-1}(]a, b])) = P(\{\omega \in \Omega \mid a < X(\omega) \leqslant b\}) = P(\{a < X \leqslant b\}) = P(a < X \leqslant b)$.
- $P(X^{-1}([a, b])) = P(\{\omega \in \Omega \mid a \leqslant X(\omega) \leqslant b\}) = P(\{a \leqslant X \leqslant b\}) = P(a \leqslant X \leqslant b)$.

**Notations usuelles 3** $X$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si $B$ est un élément de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ nous écrirons souvent $\{X \in B\}$ ou $[X \in B]$ l'événement $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$.

★ Le programme propose, par exemple, de noter $[X \leqslant x]$ l'événement $X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\}$. Je préfère $\{X \leqslant x\}$...

★ L'utilisation de ces notations n'est acceptable que si l'on n'oublie pas la source et si on est capable d'y revenir.

Il est fortement conseillé dans les "problèmes théoriques" non évidents de revenir à cette source.

## ▶ 5. D'autres propriétés

**Prop. 6** $F_X$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle $X$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- Pour tout réel $a$ : $P(\{X < a\}) = F_X(a) - P(\{X = a\}) = \lim_{x\to a^-} F_X(x)$.
- Pour tout réel $a$ : $P(\{X = a\}) = F_X(a) - \lim_{x\to a^-} F_X(x)$.
- $F_X$ est continue en $a$ si et seulement si $P(\{X = a\}) = 0$.
- $F_X$ est continue en tout point de $\mathbb{R} - X(\Omega)$.

**Prop. 7** $F_X$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle $X$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- Pour tout réel $a$, $P(\{X > a\}) = 1 - F_X(a)$.
- Si $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a \leqslant b$ : $P(\{a < X \leqslant b\}) = F_X(b) - F_X(a)$.

**Prop. 8** $X$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $x$, $a$ et $b$ sont trois réels. $a < b$ (ou $a \leqslant b$).

$P(\{X > x\}) = 1 - P(X \leqslant x\})$ et $P(\{X \geqslant x\}) = 1 - P(X < x\})$.

$P(\{a < X < b\}) = P(\{X < b\}) - P(\{X \leqslant a\}) = P(\{X > a\}) - P(\{X \geqslant b\})$.

$P(\{a \leqslant X < b\}) = P(\{X < b\}) - p(\{X < a\}) = P(\{X \geqslant a\}) - P(\{X \geqslant b\})$.

$P(\{a < X \leqslant b\}) = P(\{X \leqslant b\}) - P(\{X \leqslant a\}) = P(\{X > a\}) - P(\{X > b\})$.

$P(\{a \leqslant X \leqslant b\}) = P(\{X \leqslant b\}) - P(\{X < a\}) = P(\{X \geqslant a\}) - P(\{X > b\})$.

# IV OPÉRATIONS SUR LES VARIABLES ALÉATOIRES RÉLLES

**Th. 11** 1. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

$X + Y$, $\lambda X$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, $aX + b$ ($a$ et $b$ sont des réels), $|X|$, $X^p$ $(p \in \mathbb{N})$, $XY$, $\text{Max}(X, Y)$ et $\text{Min}(X, Y)$ sont des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

2. $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ sont $n$ variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A})$. $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_n$ sont $n$ réels.

$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n$, $X_1 X_2 \cdots X_n$, $\text{Max}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ et $\text{Min}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ sont des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

3. L'ensemble des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) et même une algèbre pour les opérations usuelles.

# V VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES DISCRÈTES

## ▶ 1. Définition.

**Déf. 7** Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Une variable aléatoire réelle $X$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est **discrète** si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.

Plus précisément une variable aléatoire réelle $X$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est **discrète finie** (resp. **discrète infinie**) si $X(\Omega)$ est fini (resp. dénombrable).

## ▶ 2. Système complet associé à une variable aléatoire réelle discrète.

**Th. 12** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

- $\boxed{\textbf{P}}$ $\big(\{X = x\}\big)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.
- Ce système complet d'événements engendre la tribu $\mathcal{A}_X = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$ des événements liés à $X$.

## ▶ 3. Une caractérisation importante des variables aléatoires réelles discrètes.

**Th. 13** $\boxed{\textbf{P}}$ Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et $X$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

$X$ est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si et seulement si :

1. $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable ;
2. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A} \text{ ou } \forall x \in X(\Omega),\ X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}}$.

## ▶ 4. Notion de loi de probabilité.

**Déf. 8** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On appelle **loi de probabilité** de $X$ l'application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout élément $x$ de $X(\Omega)$ associe $P(\{X = x\})$.

**Prop. 9** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. $\boxed{\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P(\{X = x\}) = 1}$.

**Déf. 9** Plus généralement on appelle **loi de probabilité discrète** toute application d'une partie finie ou dénombrable $D$ de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ ou dans $[0, +\infty[$ telle que :

$$\sum_{d \in D} f(d) = 1$$

**Prop. 10** Toute loi de probabilité discrète est la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle discrète.

★★ Il convient de ne pas négliger les deux résultats précédents. Ils sont utiles dans les problèmes de convergence.

## ▶ 5. Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète.

**Th. 14** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

**P** $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \displaystyle\sum_{z \in X(\Omega) \cap ]-\infty, x]} P(\{X = z\}) = \sum_{z \leqslant x} P(\{X = z\})}$

★★ La loi de probabilité de $X$ détermine entièrement la fonction de répartition de $X$ donc la probabilité image $P_{(X)}$. Précisons.

**Prop. 11** *Complément* Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $B$ un borélien de $\mathbb{R}$.

$$P_{(X)}(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}) = P(X \in B) = \sum_{z \in X(\Omega) \cap B} P(\{X = z\}).$$

**Prop. 12** **PP** $X$ est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui prend ses valeurs dans $\boxed{\mathbb{Z}}$.

1. Soit $k$ un élément de $\mathbb{Z}$.

$\boxed{P(\{X = k\}) = P(\{X \leqslant k\}) - P(\{X \leqslant k - 1\})}$ et $\boxed{P(\{X = k\}) = P(\{X < k + 1\}) - P(\{X < k\})}$.

$\boxed{P(\{X = k\}) = P(\{X \geqslant k\}) - P(\{X \geqslant k + 1\})}$ et $\boxed{P(\{X = k\}) = P(\{X > k - 1\}) - P(\{X > k\})}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(\{X \leqslant x\}) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\mathrm{Ent}(x)} P(\{X = k\})$.

## ▶ 6. Opérations usuelles sur les variables aléatoires réelles discrètes.

**Th. 15** 1. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

$X + Y$, $\lambda X$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), $aX + b$ ($a$ et $b$ sont des réels), $|X|$, $X^p$ ($p \in \mathbb{N}$), $XY$, $\mathrm{Max}(X, Y)$ et $\mathrm{Min}(X, Y)$ sont des variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

2. $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ sont $n$ variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A})$. $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_n$ sont $n$ réels.

$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n$, $X_1 X_2 \cdots X_n$, $\mathrm{Max}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ et $\mathrm{Min}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ sont des variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

3. L'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

## ► 7. La variable aléatoire $g \circ X$.

**Th. 16** $X$ est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et $g$ une application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont le domaine de définition contient $X(\Omega)$.

- $g \circ X$ est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
- Soit $z$ un élément de $(g \circ X)(\Omega)$. On pose $H_z = \{x \in X(\Omega) \mid g(x) = z\}$. Alors $\{g \circ X = z\} = \bigcup_{x \in H_z} \{X = x\}$. On écrit plus simplement : $\{g \circ X = z\} = \bigcup_{x \in X(\Omega) \text{ et } g(x)=z} \{X = x\}$ ou $\{g \circ X = z\} = \bigcup_{g(x)=z} \{X = x\}$.
- La tribu $\mathcal{A}_{g \circ X}$ des événements liés à $g \circ X$ est contenu dans la tribu $\mathcal{A}_X$ des événements liés à $X$.

**Cor.** $X$ est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

- Si $X$ ne prend pas la valeur 0, $1/X$ est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
- Si $X$ ne prend que des valeurs positives, $\sqrt{X}$ est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
- Si $X$ ne prend que des valeurs strictement positives, $X^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
- Si $t$ est un réel strictement positif, $t^X$ est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

**Th. 17** $X$ est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et $g$ une application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont le domaine de définition contient $X(\Omega)$.

$$\forall z \in (g \circ X)(\Omega),\ P(\{g \circ X = z\}) = \sum_{x \in X(\Omega) \text{ et } g(x)=z} P(\{X = x\}) = \sum_{g(x)=z} P(\{X = x\}).$$

# VI MOMENTS D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE RÉELLE DISCRÈTE

## ► 0. Avertissement.

Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$X(\Omega)$ est un ensemble fini. Notons $n$ son cardinal.

$X(\Omega)$ est équipotent à $[\![1, n]\!]$. Soit $\sigma$ est une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur $X(\Omega)$. En posant pour tout élément $k$ de $[\![1, n]\!]$, $x_k = \sigma(k)$ nous pourrons écrire $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Dans la suite et dans cette situation nous nous contenterons de dire "on suppose que $X(\Omega)$ possède $n$ éléments distincts $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$".

Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$X(\Omega)$ est dénombrable. $X(\Omega)$ est équipotent à un intervalle infini $[\![n_0, +\infty[\![$ de $\mathbb{N}$.

Soit $\sigma$ une bijection de $[\![n_0, +\infty[\![$ sur $X(\Omega)$. En posant pour tout élément $k$ de $[\![n_0, +\infty[\![$, $x_k = \sigma(k)$ nous pourrons écrire $X(\Omega) = \{x_k\,, k \in [\![n_0, +\infty[\![\ \}$.

Dans la suite et dans cette situation nous nous contenterons de dire "on pose : $X(\Omega) = \{x_k,\ k \in [\![n_0, +\infty[\![\ \}$ "ce qui sous-entendra que $k \to x_k$ est une bijection de $[\![n_0, +\infty[\![$ sur $X(\Omega)$.

★ Il est à noter que $[\![n_0, +\infty[\![$ pas plus que $\sigma$ ne sont uniques.

## ▶ 1. Espérance.

**Déf. 10** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $X(\Omega)$ possède $n$ éléments distincts $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$.

**L'espérance** de $X$ est le réel $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, P(\{X = x_k\})$ ; on la note $E(X)$.

On écrit encore $E(X) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} x\, P(\{X = x\})$.

**Prop. 13** $\boxed{!}$ $\Omega$ est un ensemble $\boxed{\text{fini}}$ non vide. On considère l'espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\big)$ et une application $X$ de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

$X$ est une variable aléatoire discrète finie et $E(X) = \displaystyle\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\, P(\{\omega\})$.

**Déf. 11** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On pose : $X(\Omega) = \{x_k,\ k \in [\![ n_0, +\infty [\![\ \}$.

$X$ possède une espérance si la série de terme général $x_k\, P(\{X = x_k\})$ est $\boxed{\boxed{\textbf{absolument}}}$ convergente.

**L'espérance** de $X$ est le réel $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} x_k\, P(\{X = x_k\})$ ; on la note $E(X)$.

On écrit encore $E(X) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} x\, P(\{X = x\})$.

★ L'absolue convergence est essentielle car elle permet de prouver que la définition de l'espérance est intrinsèque et ne dépend ni de $[\![ n_0, +\infty [\![$ ni de la bijection "$k \to x_k$" ; autrement dit qu'elle ne dépend pas de la numérotation des éléments de $X(\Omega)$.

## ▶ 2. Moment d'ordre $r$.

**Déf. 12** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $X(\Omega)$ possède $n$ éléments distincts $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$. Soit $r$ un élément de $\mathbb{N}$.

Le **moment d'ordre r** de $X$ est le réel $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k)^r\, P(\{X = x_k\})$ ; on le note $m_r(X)$.

**Déf. 13** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On pose : $X(\Omega) = \{x_k,\ k \in [\![ n_0, +\infty [\![\ \}$. Soit $r$ un élément de $\mathbb{N}$.

$X$ **possède un moment d'ordre r** si la série de terme général $(x_k)^r\, p(\{X = x_k\})$ est absolument convergente.

En cas d'existence, **le moment d'ordre r** de $X$ est alors le réel $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} (x_k)^r\, p(\{X = x_k\})$ ; on le note $m_r(X)$.

**Th. 18** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possédant un moment d'ordre $r$.

Pour tout élément $r'$ de $[\![ 0, r ]\!]$, $X$ possède un moment d'ordre $r'$.

## ▶ 3. Théorème de transfert.

**Th. 19** **PP** **Théorème de transfert pour une variable aléatoire discrète finie.**

Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $X(\Omega)$ possède $n$ éléments distincts $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$.

$g$ est une fonction numérique de la variable réelle dont le domaine de définition contient $X(\Omega)$.

$g \circ X$ est une variable aléatoire réelle discrète finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et

$$\boxed{E(g \circ X) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\, P(\{X = x_k\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\, P(\{X = x\})}$$

★ Ce résultat est fondamental car il permet d'obtenir l'espérance de $g \circ X$ à l'aide de la loi de $X$ et dispense d'avoir à trouver la loi de $g \circ X$.

**Cor. 1** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $X(\Omega)$ possède $n$ éléments distincts $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$.

Si $a$ et $b$ sont deux réels, $aX + b$ est une variable discrète finie et :

$$\boxed{E(aX + b) = \sum_{k=1}^{n} (a x_k + b)\, p(\{X = x_k\}) = aE(X) + b}$$

**Cor. 2** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $X(\Omega)$ possède $n$ éléments distincts $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$.

Pour tout élément $r$ de $\mathbb{N}^*$, $X^r$ est une variable aléatoire discrète finie et :

$$\boxed{E(X^r) = m_r(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k^r\ P(\{X = x_k\})}$$

**Th. 20** **PP** **Théorème de transfert pour une variable aléatoire discrète infinie.**

Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète infinie. On pose : $X(\Omega) = \{x_k\,, k \in [\![ n_0, +\infty [\![\ \}$.

$g$ est une fonction numérique de la variable réelle dont le domaine de définition contient $X(\Omega)$.

$g \circ X$ possède une espérance si et seulement si la série de terme général $g(x_k)\, p(\{X = x_k\})$ est absolument convergente. En cas d'existence :

$$\boxed{E(g \circ X) = \sum_{k=n_0}^{+\infty} g(x_k)\, p(\{X = x_k\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\, P(\{X = x\})}$$

**Cor. 1** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète infinie. On pose : $X(\Omega) = \{x_k\,, k \in [\![ n_0, +\infty [\![\ \}$.

Si $a$ et $b$ sont deux réels et si $X$ possède une espérance, alors $aX + b$ est une variable aléatoire discrète qui possède une espérance et :

$$\boxed{E(aX+b) = \sum_{k=n_0}^{+\infty} (ax_k + b)\, P(\{X = x_k\}) = aE(X) + b}$$

**Cor. 2** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète infinie. On pose : $X(\Omega) = \{x_k\,, k \in [\![ n_0, +\infty [\![\ \}$.

$r$ est un élément de $\mathbb{N}$. $X^r$ possède une espérance si et seulement si $X$ possède un moment d'ordre $r$ ; autrement dit si et seulement si la série de terme général $x_k^r\, P(X = x_k)$ est absolument convergente.

En cas d'existence :

$$\boxed{E(X^r) = m_r(X) = \sum_{k=n_0}^{+\infty} x_k^r\ P(\{X = x_k\})}$$

## ▶ 4. Variance et écart-type.

**Déf. 14** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$X$ possède une variance si $E(X)$ et $E\Big(\big[X - E(X)\big]^2\Big)$ existent... ou si $E\Big(\big[X - E(X)\big]^2\Big)$ existe.

**La variance** de $X$ est, si elle existe, l'espérance de $\big(X - E(X)\big)^2$. Nous la noterons $V(X)$.

$$V(X) = E\Big(\big[X - E(X)\big]^2\Big)$$

**Déf. 15** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète possèdant une variance.

**L'écart-type** de $X$ est le réel, positif ou nul, égal à $\sqrt{V(X)}$. On le note $\sigma(X)$.

**Th. 21** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $X(\Omega)$ possède $n$ éléments distincts $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$.

$X$ possède une variance et

$$\boxed{V(X) = \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - E(X)\big)^2\, P(\{X = x_k\}) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2\, P(\{x = x_k\}) - \big(E(X)\big)^2 = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2}$$

**Th. 22** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On pose : $X(\Omega) = \{x_k\,, k \in [\![ n_0, +\infty [\![\ \}$.

• Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $X$ possède une variance.

ii) $X$ possède un moment d'ordre 2.

ii)' La série de terme général $x_k^2\ P(X = x_k)$ est (absolument) convergente.

iii) $X^2$ possède une espérance.

iv) $E(X)$ existe et la série de terme général $(x_k - E(X))^2\, P(X = x_k)$ est (absolument) convergente.

• Si $X$ possède une variance :

$$\boxed{V(X) = \sum_{k=n_0}^{+\infty} (x_k - E(X))^2\, P(\{X = x_k\})} \qquad \boxed{V(X) = \sum_{k=n_0}^{+\infty} x_k^2\, P(\{X = x_k\}) - \big(E(X)\big)^2}$$

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2}$$

**Th. 23** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. $a$ et $b$ sont deux réels.

Si $X$ possède une variance, $aX + b$ aussi et $\boxed{V(aX + b) = a^2 V(X)}$.

## ▶ 5. Variable aléatoire centrée (resp. centrée réduite).

**Déf. 16** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$X$ est **centrée** si elle possède une espérance nulle.

$X$ est **centrée réduite** si elle possède une espérance nulle et une variance égale à 1.

**Th. 24** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si $X$ possède une espérance $X - E(X)$ est une variable centrée.

Si $X$ possède une variance non nulle $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable centrée réduite.

On parle de variable aléatoire réelle centrée réduite associée à $X$.

## ▶ 6. Moments centrés d'ordre $r$.

**Déf. 17** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $r$ un élément de $\mathbb{N}^*$.

$X$ possède un **moment centré d'ordre r** si $X$ possède une espérance et si $X - E(X)$ possède un moment d'ordre $r$.

En cas d'existence le moment centré d'ordre $r$ est le réel, noté $\mu_r(X)$, égal à $m_r\big(X - E(X)\big)$.

Par convention $X$ possède un moment centré d'ordre 0 qui vaut 1 et que nous noterons $\mu_0(X)$.

**Th. 25** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $r$ un élément de $\mathbb{N}^*$.

$X$ possède un moment centré d'ordre $r$ si et seulement si $E\Big(\big[X - E(X)\big]^r\Big)$ existe.

En cas d'existence $\mu_r(X) = E\Big(\big[X - E(X)\big]^r\Big)$.

★ Sous les hypothèses du résultat précédent, si $\mu_1(X)$ existe il vaut 0.

**Th. 26** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $X(\Omega)$ possède $n$ éléments distincts $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$. Soit $r$ un élément de $\mathbb{N}$.

$X$ possède un moment centré d'ordre $r$ qui vaut :

$$\mu_r(X) = \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - E(X)\big)^r P(\{X = x_k\}) = E\Big(\big[X - E(X)\big]^r\Big).$$

**Th. 27** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On pose $X(\Omega) = \{x_k\,, k \in [\![n_0, +\infty[\![\ \}$. Soit $r$ un élément de $\mathbb{N}^*$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $X$ possède un moment centré d'ordre $r$.

ii) $X$ posséde une espérance et la série de terme général $(x_k - E(X))^r\, P(\{X = x_k\})$ est absolument convergente.

En cas d'existence : $\mu_r(X) = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} (x_k - E(X))^r\, P(\{X = x_k\}) = E\Big(\big[X - E(X)\big]^r\Big)$.

**Prop. 14** $X$ est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $r$ est un élément de $\mathbb{N}$.

1. $X$ possède un moment centré d'ordre $r$ si et seulement si $X$ possède un moment d'ordre $r$.
2. Si $X$ possède un moment centré d'ordre $r$ alors $X$ possède un moment centré d'ordre $r'$ pour tout élément $r'$ appartenant à $[\![0, r]\!]$.
3. $X$ possède une variance si et seulement si $X$ possède un moment centré d'ordre 2. En cas d'existence $V(X) = \mu_2(X)$.

## ▸ 7. Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

**Th. 28** $\boxed{\text{SD}}$ $X$ est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prenant ses valeurs dans $\boxed{\mathbb{R}^+}$ et possèdant une espérance.

Alors, pour tout réel $\lambda$ strictement positif :

$$P(\{X \geqslant \lambda\}) \leqslant \frac{E(X)}{\lambda}.$$

**Th. 29** $X$ est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$\boxed{!}$ Si $X$ possède un moment d'ordre 2 : $\forall \varepsilon \in ]0, +\infty[,\ P(\{|X| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \dfrac{E(X^2)}{\varepsilon^2}$.

*Complément* Si $X$ possède un moment d'ordre $r$ ($r \in \mathbb{N}^*$) : $\forall \varepsilon \in ]0, +\infty[,\ P(\{|X| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \dfrac{E(|X|^r)}{\varepsilon^r}$.

**Th. 30** $\boxed{\text{SD}}$ $X$ est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant une variance.

$$\boxed{\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}}$$

★ Sous les mêmes hypothèses on a encore : $\boxed{\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}}$

# VII LOIS DISCRÈTES USUELLES

## ▶ 1. Loi de Bernoulli. Indicatrice d'un événement.

**Déf. 18** $p$ est un élément de $[0, 1]$.

Une variable aléatoire réelle $X$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suit une **loi de Bernoulli de paramètre p** si :

$$\boxed{X(\Omega) = \{0, 1\} \text{ et } P(\{X = 1\}) = p}$$

Par abus de langage on parlera souvent de variable aléatoire réelle de Bernoulli au lieu de dire variable aléatoire réelle suivant une loi de Bernoulli.

**Th. 31** 1. Soit $A$ un événement de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. L'indicatrice $\mathbb{1}_A$ de l'événement $A$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(A)$.

2. Réciproquement si $X$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$, $X$ est l'indicatrice de l'événement $A = X^{-1}\big(\{1\}\big) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 1\}$ et $P(A) = p$.

**Th. 32** 1. $p$ est un élément de $[0, 1]$ et $X$ une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p$. $q = 1 - p$.

$$\boxed{E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1-p) = pq}$$

2. Soit $A$ un événement de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. $\boxed{E(\mathbb{1}_A) = P(A) \quad \text{et} \quad V(\mathbb{1}_A) = P(A)\, P(\overline{A})}$.

**Th. 33** $\boxed{\textbf{PP}}$ Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant des lois de Bernoulli.

$XY$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre $P(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\})$

## ▶ 2. Loi binômiale.

**Déf. 19** $n$ est un élément de $\mathbb{N}^*$ et $p$ un élément de $[0, 1]$. $q = 1 - p$.

Une variable aléatoire réelle $X$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suit une **loi binômiale** de paramètres $n$ et $p$ si :

1. $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$

2. $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(\{X = k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

ou : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(\{X = k\}) = \mathrm{C}_n^k\, p^k (1-p)^{n-k} = \mathrm{C}_n^k\, p^k q^{n-k}$.

On écrit alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

**Modèle** • $A$ est un événement associé à une expérience aléatoire et qui se réalise avec la probabilité $p$.

On itère cette expérience $n$ fois $\boxed{\textbf{de manière indépendante}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

$X$ est la variable aléatoire réelle qui compte le nombre de fois où $A$ se réalise.

$X$ suit une loi binômiale de paramètres $n$ et $p$.

• Exemple : une urne contient des boules blanches en proportion $p$ et des boules noires en proportion $q = 1 - p$. On tire $n$ fois une boule de l'urne en la remettant à chaque fois. $X$ est la variable aléatoire réelle qui compte le nombre de boules blanches obtenues. $X$ suit une loi binômiale de paramètres $n$ et $p$.

**Th. 34** $\boxed{\textbf{SD}}$ $n$ est un élément de $\mathbb{N}^*$, $p$ est un élément de $[0,1]$ et $X$ une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant une loi binômiale de paramètres $n$ et $p$.

$$\boxed{E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p) = npq}$$

## ▶ 3. Loi uniforme.

**Déf. 20** $n$ est un élément de $\mathbb{N}^*$. Une variable aléatoire réelle $X$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suit une **loi uniforme** sur $[\![1,n]\!]$ si :

$$\boxed{X(\Omega) = [\![1,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1,n]\!],\ P(\{X = k\}) = \frac{1}{n}}$$

On écrit alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$.

**Modèle** Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On tire au hasard une boule de l'urne. $X$ est la variable aléatoire réelle égale au numéro obtenu. $X$ suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

**Déf. 21** $a$ et $b$ sont deux éléments de $\mathbb{Z}$ tels que $a \leqslant b$. Une variable aléatoire réelle $X$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suit une **loi uniforme** sur $[\![a,b]\!]$ si :

$$\boxed{X(\Omega) = [\![a,b]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![a,b]\!],\ P(\{X = k\}) = \frac{1}{b-a+1}}$$

On écrit alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$.

Plus généralement on dira qu'une variable aléatoire réelle $X$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suit une loi uniforme si $X(\Omega)$ est un ensemble fini et si

$$\forall x \in X(\Omega),\ P(\{X = x\}) = \frac{1}{\operatorname{Card} X(\Omega)}.$$

**Th. 35** $n$ est un élément de $\mathbb{N}^*$ et $X$ une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

$$\boxed{E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}}$$

**Prop. 15** $\boxed{\textbf{SD}}$ $a$ et $b$ sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $a \leqslant b$ et $X$ une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant une loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$.

1. $X - a + 1$ suit une loi uniforme sur $[\![1, b-a+1]\!]$.
2. $\boxed{E(X) = \dfrac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \dfrac{(b-a+1)^2-1}{12}}$.

## ▶ 4. Loi hypergéométrique.

**Déf. 22** $N$ et $n$ sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $n \leqslant N$. $p$ est un élément de $[0,1]$.

On suppose que $Np$ est un entier et on pose $q = 1 - p$. Une variable aléatoire réelle $X$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suit une **loi hypergéométrique** de paramètres $N$, $n$ et $p$ si :

$$\boxed{X(\Omega) = [\![\operatorname{Max}(0, n - Nq), \operatorname{Min}(Np, n)]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega),\ P(\{X = k\}) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\mathrm{C}_{Np}^{k}\,\mathrm{C}_{Nq}^{n-k}}{\mathrm{C}_{N}^{n}}}.$$

On écrit alors $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$.

**Modèle** Une urne contient $a$ boules blanches et $b$ boules noires ($a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$). $N = a + b$ et $p = a/(a + b)$ est la proportion de boules blanches.

On tire simultanément $n$ boules de l'urne ($1 \leqslant n \leqslant a + b$).

$X$ est la variable aléatoire réelle qui compte le nombre de boules blanches obtenues. $X$ suit une loi hypergéométrique de paramètres $N$, $n$ et $p$.

Même chose pour $n$ tirages successifs d'une boule $\boxed{\text{sans}}$ remise.

★ Il ne faut pas se faire peur avec les bornes. Un retour au modèle les rend naturelles. On les retrouve encore en validant la formule !

**Th. 36** $\boxed{\textbf{SD}}$ $N$ et $n$ sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $n \leqslant N$. $p$ est un élément de $[0, 1]$. On suppose que $Np$ est un entier et on pose $q = 1 - p$.

$X$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi hypergéométrique de paramètres $N$, $n$ et $p$.

$$\boxed{E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = npq\,\frac{N-n}{N-1}}$$

## ▸ 5. Loi géométrique.

**Déf. 23** $p$ est un élément de $]0, 1[$ et $q = 1-p$. Une variable aléatoire réelle $X$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suit une **loi géométrique** de paramètre $p$ si :

$$\boxed{X(\Omega) = [\![1, +\infty[\![ \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, +\infty[\![,\ P(\{X = k\}) = p\,(1-p)^{k-1} = p\,q^{k-1}}$$

On écrit alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

**Modèle** • $A$ est un événement associé à une expérience aléatoire et qui se réalise avec la probabilité $p$. On itére, de manière indépendante, cette expérience.

$X$ est la variable aléatoire réelle qui compte le nombre d'itérations de l'expérience nécessaire à la réalisation de $A$.

$X$ suit une loi géométrique de paramètre $p$.

• Exemple : une urne contient des boules blanches en proportion $p$ et des boules noires en proportion $q = 1 - p$. On tire une boule de l'urne en la remettant à chaque fois et on recommence. $X$ est la variable aléatoire réelle égale au rang d'apparition de la première boule blanche. $X$ suit une loi géométrique de paramètre $p$.

**Th. 37** $\boxed{\textbf{SD}}$ $p$ est un élément de $]0, 1[$ et $X$ une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant une loi géométrique de paramètre $p$. On pose $q = 1 - p$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{q}{p^2}}$$

## ▸ 6. Loi de Poisson.

**Déf. 24** $\lambda$ est un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. Une variable aléatoire réelle $X$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda$ si :

$$\boxed{X(\Omega) = [\![0, +\infty[\![ \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0, +\infty[\![,\ P(\{X = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}}$$

On écrit alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

**Modèle** Des études statistiques montrent par exemple que le nombre de personnes entrant dans un magasin ou le nombre d'appels téléphoniques arrivant à un standard (ou ...) pendant un intervalle de temps donné suit sensiblement une loi de Poisson.

Voir au sujet de cette modélisation le problème de Math.2-ESSEC 95.

**Th. 38** **SD** $\lambda$ est un élément de $\mathbb{R}^{+*}$ et $X$ une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

$$\boxed{E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda}$$

## ▶ 7. Les moments exigés à partir des concours de 2005.

• Espérance et variance des lois de Bernoulli, binômiales, uniformes, géométriques et de Poisson.

• Espérance d'une loi hypergéométriques. Il est également dit "à titre d'exercice on pourra calculer la variance dans le cas de la loi hypergéométrique".

## ▶ 8. Récapitulatif.

| **Nom** | **Notation** | **Paramètre(s)** | **Valeurs** | **Loi** | $E(X)$ | $V(X)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **De Bernoulli** | $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$ | $p \in [0,1]$ | $\{0,1\}$ | $P(X=0) = 1-p$<br>$P(X=1) = p$ | $p$ | $pq$ |
| **Uniforme** | $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ | $n \in \mathbb{N}^*$ | $[\![1,n]\!]$ | $P(\{X=k\}) = \dfrac{1}{n}$ | $\dfrac{n+1}{2}$ | $\dfrac{n^2-1}{12}$ |
| **Uniforme** | $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$ | $(a,b) \in (\mathbb{Z})^2$<br>$a \leqslant b$ | $[\![a,b]\!]$ | $P(\{X=k\}) = \dfrac{1}{b-a+1}$ | $\dfrac{a+b}{2}$ | $\dfrac{(b-a+1)^2-1}{12}$ |
| **Binomiale** | $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ | $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$ | $[\![0,n]\!]$ | $P(\{X=k\}) = \dbinom{n}{k} p^k\, q^{n-k}$ | $np$ | $npq$ |
| **Géométrique** | $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ | $p \in ]0,1[$ | $[\![1,+\infty[\![$ | $P(\{X=k\}) = p\, q^{k-1}$ | $\dfrac{1}{p}$ | $\dfrac{q}{p^2}$ |
| **Hypergéo-métrique** | $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$ | $(N,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$<br>$n \leqslant N$, $p \in [0,1]$<br>$N\,p \in \mathbb{N}$ | $[\![\mathrm{Max}(0, n-Nq),$<br>$\mathrm{Min}(Np,n)]\!]$ | $P(\{X=k\}) = \dfrac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ | $np$ | $npq\dfrac{N-n}{N-1}$ |
| **De Poisson** | $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ | $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ | $\mathbb{N}$ | $P(\{X=k\}) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}$ | $\lambda$ | $\lambda$ |

# VIII COMPLÉMENTS

## ▸ 1. Simulation informatique des lois usuelles

**Simulation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli.**

```
Function Bernoulli(p:real):integer;
begin
if random<=p then Bernoulli:=1
            else Bernoulli:=0;
end;
```

**Simulation d'une variable aléatoire qui suit une loi binômiale.**

```
Function Binomiale(n:integer;p:real):integer;
var k,compte:integer;
begin
compte:=0;
For k:=1 to n do
if random<=p then compte:=compte+1;
Binomiale:=compte;
end;
```

**Simulation d'une variable aléatoire qui suit une loi uniforme.**

```
Function Uniforme(n:integer):integer;
begin
Uniforme:=random(n)+1;
end;
```

**Simulation d'une variable aléatoire qui suit une loi hyper-géométrique.**

```
Function HyperGeometrique(m,n,a:integer;):integer;
(* m est le nb de boules, n le nb de tirages et a le nb de boules blanches *)
var i,compte:integer;
begin
compte:=0;
For i:=1 to n do
if random<(a-compte)/(m-i+1) then compte:=compte+1;
HyperGeometrique:=compte;
end;
```

**Simulation d'une variable aléatoire qui suit une loi géométrique.**

```
Function Geometrique(p:real):integer;
var compte:integer;
begin
compte:=0;
repeat
compte:=compte+1;
until (random<=p);
Geometrique:=compte;
end;
```

## ▶ 2. Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

**Th. 39** **SD** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

$X$ possède une espérance si et seulement si la série de terme général $P(\{X > k\})$ est convergente.

En cas de convergence :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\{X > k\}).$$

*Remarques* *1. La démonstration de ce résultat se fait en deux temps à partir de la formule :*

$$\sum_{k=1}^{n} kP(\{X = k\}) = \sum_{k=0}^{n-1} P(\{X > k\}) - nP(\{X > n\}).$$

*2. L'égalité contenue dans le théorème précédent vaut encore si $X$ est une variable aléatoire réelle discrète finie. La somme sera finie car à partir d'un certain rang $p(\{X > k\})$ est nulle (on est prié de ne pas retirer les premiers termes sans réfléchir ...).*

**Th. 40** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

$E(X^2)$ existe si et seulement si la série de terme général $(2k+1)\,P(\{X > k\})$ est convergente.

En cas de convergence :

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)\,P(\{X > k\}).$$

## ▶ 3. Variable aléatoire réelle discrète de variance nulle.

**Th. 41** **SD** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que $X$ possède une variance.

La variance de $X$ est nulle si et seulement si $X$ est une variable quasi-certaine ; autrement dit si et seulement s'il existe $\lambda$ dans $\mathbb{R}$ tel que $P(\{X = \lambda\}) = 1$.

## ▶ 4. Croissance de l'espérance.

**Th. 42** $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $X \leqslant Y$, c'est à dire que : $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \leqslant Y(\omega)$.

Si $X$ et $Y$ possèdent une espérance alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

## ▶ 5. Loi de Pascal.

**Déf. 25** **SD** $r$ est un élément de $\mathbb{N}^*$ et $p$ est un élément de $]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

Une variable aléatoire réelle $X$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suit une **loi de Pascal** de paramètres $r$ et $p$ si :

$$\boxed{X(\Omega) = [\![r, +\infty[\![ \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![r, +\infty[\![,\ P(\{X = k\}) = \binom{k-1}{r-1} p^r\, q^{k-r} = \mathrm{C}_{k-1}^{r-1}\, p^r\, q^{k-r}}$$

On écrit alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(r, p)$

**Modèle** $A$ est un événement associé à une expérience aléatoire et qui se réalise avec la probabilité $p$ ($p \in ]0,1[$).

On itére, de manière indépendante, cette expérience. $X$ est la variable aléatoire réelle qui compte le nombre d'itérations de l'expérience nécessaire à la $r^{\text{ème}}$ réalisation de $A$.

$X$ suit une loi de Pascal de paramètres $r$ et $p$.

Exemple : une urne contient des boules blanches en proportion $p$ et des boules noires en proportion $q = 1 - p$. On tire une boule de l'urne en la remettant à chaque fois et on recommence. $X$ est la variable aléatoire réelle égale au rang d'apparition de la $r^{\text{ème}}$ boule blanche. $X$ suit une loi de Pascal de paramètres $r$ et $p$.

**Th. 43** **SD** $r$ est un élément de $\mathbb{N}^*$ et $p$ est un élément de $]0,1[$. $X$ une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant une loi de Pascal de paramètres $r$ et $p$. On pose $q = 1 - p$.

$$\boxed{E(X) = \frac{r}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = r\,\frac{q}{p^2}}$$

<u>Remarques</u> *1. Pour démontrer ces résultats il convient de se rappeler que si $x$ est un réel et $r$ un entier, la série de terme général $\binom{k}{r} x^{k-r} = \mathrm{C}_k^r\, x^{k-r}$ converge si et seulement si $|x| < 1$ et qu'en cas de convergence :*

$$\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r} = \sum_{k=r}^{+\infty} \mathrm{C}_k^r\, x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

*2. On pourrait encore parler de loi binômiale négative de paramètres $r$ et $p$ ($p \in ]0,1[$). Cela n'apporte cependant pas grand chose. Pascal compte le nombre d'itérations pour obtenir le $r^{\text{ème}}$ succès alors qu'une binômiale négative compte le nombre d'échecs avant le $r^{\text{ème}}$ succès. Donc une variable aléatoire réelle $X$ suit une loi binômiale négative de paramètres $r$ et $p$ si $X + r$ suit une loi de Pascal de paramètres $r$ et $p$ ; on a alors :*

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \textit{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ P(\{X = k\}) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k = \mathrm{C}_{k+r-1}^{r-1}\, p^r (1-p)^k$$

## ▸ 6. Combinaison linéaire d'indicatrices.

**Prop. 16** • Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $X(\Omega)$ possède $n$ éléments distincts $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$.

$$X = \sum_{k=1}^{n} x_k\, \mathbb{1}_{\{X = x_k\}}$$

• Réciproquement toute combinaison linéaire d'un nombre fini d'indicatrices d'éléments de $\mathcal{A}$ est une variable aléatoire réelle discrète finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

## ▸ 7. Fonction génératrice d'une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Dans ce qui suit $X$ (resp. $Y$) est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

**Déf. 26** **La fonction génératrice** de $X$ est la fonction numérique de la variable réelle $t \to \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(\{X = k\})\, t^k$.

Nous la noterons $G_X$.

**Prop. 17** **SD** 1. Si $X$ est une variable aléatoire réelle finie, $G_X$ est définie sur $\mathbb{R}$ ; mieux $G_X$ est une fonction polynômiale.

2. Si $X$ n'est pas finie, $G_X$ est au moins définie sur $[-1, 1]$.

3. $\boxed{G_X(1) = 1}$.

4. $X$ et $Y$ ont même loi si et seulement si $G_X = G_Y$.

5. Si $t$ est dans le domaine de $G_X$, $\boxed{G_X(t) = E(t^X)}$.

6. Si $X$ et $Y$ sont indépendantes : $\boxed{G_{X+Y} = G_X \times G_Y}$

7. Si $X$ est finie : $\boxed{E(X) = G'_X(1)}$, $\boxed{E(X(X-1)) = G''_X(1)}$ et $\boxed{V(X)) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2}$.

**Prop. 18** $E(X)$ possède une espérance si et seulement si $G_X$ est dérivable à gauche en 1.

Dans ce cas $E(X) = (G_X)'_g(1)$.

**Prop. 19** 1. $p \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = (pt + 1 - p)^n$.

2. $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$. $\forall t \in \mathbb{R} - \{1\},\ G_X(t) = \dfrac{t}{n}\,\dfrac{1 - t^n}{1 - t}$.

**Prop. 20** 1. $p \in ]0, 1[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. $q = 1 - p$. $\forall t \in ]\dfrac{-1}{q}, \dfrac{1}{q}[,\ G_X(t) = \dfrac{pt}{1 - qt}$.

2. $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ et $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

## IX SAVOIR FAIRE

- Montrer qu'une application est une variable aléatoire.
- Montrer qu'une application est une loi de probabilité discrète.
- Trouver la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète.
- Trouver la loi d'une variable aléatoire réelle discrète.
- Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle discrète finie.
- Justifier l'existence et calculer l'espérance (resp. la variance) d'une variable aléatoire réelle discrète infinie.
- Utiliser le théorème de transfert pour calculer une espérance.
- Ecrire une variable aléatoire comme combinaison linéaire de variables de Bernoulli pour calculer son espérance.
- Utiliser la fonction génératrice d'une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ pour calculer son espérance.
- Justifier, au sens des épreuves de concours qu'une application $X$ est bien ( !) une variable aléatoire reélle.
- Modifier une variable aléatoire réelle pour se ramener à une variable aléatoire réelle qui suit une loi classique.
- Démontrer Bienaymé-Tchebychev (ou l'inégalité de Markov).
- Utiliser Bienaymé-Tchebychev.

# X ESPÉRANCE CONDITIONNELLE

## ▶ 1. Définition.

**Déf. 27** Soient $X$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $A$ est un événement de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle.

**L'espérance de X sachant A** ou **l'espérance de X conditionnelle à A** est, lorsqu'elle existe, l'espérance de $X$ pour la probabilité $P_A$. On la note $E(X|A)$.

**Th. 44** Soient $X$ une variable aléatoire réelle discrète $\boxed{\text{finie}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $A$ est un événement de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle.

On suppose que $X(\Omega)$ possède $n$ éléments distincts $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$.

$E(X|A)$ existe et vaut : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, P_A(X = x_k)$.

**Th. 45** Soient $X$ une variable aléatoire réelle discrète $\boxed{\text{infinie}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $A$ est un événement de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle.

On pose : $X(\Omega) = \{x_k,\ k \in [\![ n_0, +\infty [\![\ \}$.

$E(X|A)$ existe si et seulement si la série de terme général $x_k\, P_A(\{X = x_k\})$ est absolument convergente.

En cas d'existence $E(X|A) = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} x_k\, P_A(\{X = x_k\})$.

**Th. 46** Soient $X$ une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $A$ est un événement de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle.

Si $X$ possède une espérance alors $E(X|A)$ existe. La réciproque est clairement fausse.

## ▶ 2. Espérance conditionnelle et système complet.

**Th. 47** $\boxed{\text{SD}}$ Soient $X$ une variable aléatoire discrète $\boxed{\text{finie}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet (ou quasi-complet) d'événements de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On pose $I' = \{i \in I \mid P(A_i) \neq 0\}$. Alors : $\boxed{E(X) = \displaystyle\sum_{i\in I'} E(X|A_i)\, P(A_i)}$.

**Cor.** $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que $\boxed{Y \text{ est finie}}$.

On pose $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $I' = \{i \in I \mid P(X = x_i) \neq 0\}$.

Alors : $\boxed{E(Y) = \displaystyle\sum_{i\in I'} E(Y|\{X = x_i\})\, P(X = x_i)}$.

**Th. 48** Soient $X$ une variable aléatoire discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet (ou quasi-complet) d'événements de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On pose : $I' = \{i \in I \mid P(A_i) \neq 0\}$. $X$ possède une espérance si et seulement si :

1. Pour tout élément $i$ de $I'$, $E(X|A_i)$ existe (ce qui assure l'existence de $E(|X| \,|\, A_i)$ ! !) ;
2. $\displaystyle\sum_{i\in I'} E(|X| \,|\, A_i)\, P(A_i)$ existe.

Si $E(X)$ existe : $E(X) = \displaystyle\sum_{i\in I'} E(X|A_i)\, P(A_i)$.

★★ L'énoncé proposé dans le programme est grossièrement faux. L'énoncé proposé par le "Précis" de Bréal (édition 2004) est simplement faux... qu'on se le dise.

**Cor.** $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $I' = \{i \in I \mid P(X = x_i) \neq 0\}$. $Y$ possède une espérance si et seulement si :

1. Pour tout élément $i$ de $I'$, $E(Y|\{X = x_i\})$ existe ;
2. $\displaystyle\sum_{i\in I'} E(|X| \,|\, \{X = x_i\})\, P(\{X = x_i\})$ existe.

Si $E(Y)$ existe : $E(Y) = \displaystyle\sum_{i\in I'} E(Y|\{X = x_i\})\, P(\{X = x_i\})$.