VARIABLES ALÉATOIRES A DENSITÉ

Ce résumé de cours se rapporte au programme de seconde année en vigueur à partir de 2004-2005 qui est très sensiblement différent des précédents. Il faut donc faire très attention à ces changements lorsque l'on fait un problème d'avant 2005 (ou lorsque l'on lit une correction).

P mentionne des résultats particulièrement utiles et souvent oubliés dans la pratique des variables aléatoires à densité.

★ mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SD mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

! Notions ou résultats qui ne semblent pas toujours très importants mais qui figurent explicitement dans le programme donc qui sont exigibles.

Dans toute la suite $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé et les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ (sauf mention du contraire) ; nous ne le redirons pas toujours.

I GÉNÉRALITÉS

▶ 1. Définition d'une variable aléatoire réelle à densité.

Déf. 1 On appelle **variable aléatoire réelle à densité** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ toute variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont la fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points, éventuellement vide.

▶ 2. Densité S d'une variable aléatoire réelle à densité.

Déf. 2 Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de fonction de répartition F_X.

Notons que F'_X est positive ou nulle là où elle est définie (F_X est croissante).

On appelle **densité de X** toute fonction numérique de la variable réelle, à valeurs positives ou nulles et qui coïncide avec F'_X en tout point de $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points (éventuellement vide).

★ Une densité de X n'est pas nécessairement définie sur tout $\mathbb{R}$. Néanmoins l'ensemble des point où elle n'est pas définie est fini.

Prop. 1 Rien que des évidences

Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de fonction de répartition F_X.

1. F'_X est une densité de X.

2. Soit f est une densité de X. L'ensemble des densités de X est l'ensemble des fonctions numériques de la variable réelle, positives ou nulles et qui coïncident avec f en tout point de $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points éventuellement vide.

3. Deux densités de X coïncident en tout point de $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points éventuellement vide.

4. X possède au moins une densité définie sur $\mathbb{R}$; et même une infinité !

★ Lorsque l'on travaille sur une variable aléatoire réelle à densité X on a intérêt à utiliser une densité de X définie sur $\mathbb{R}$ et la "plus continue possible ".

★ Il est usuel d'appeler **loi de probabilité** d'une variable aléatoire réelle à densité l'une de ses densités !

★★ Dans un problème lorsque l'on demande de trouver la loi de probabilité d'une variable aléatoire à densité il faut comprendre que l'on demande une densité de cette variable aléatoire.

▸ 3. Reconnaître une variable aléatoire réelle à densité et en trouver une densité.

PPP Voici les 4 étapes usuelles pour montrer qu'une variable aléatoire réelle X est à densité et pour en trouver une densité.

E1 On cherche la fonction de répartition F_X de X.

E2 On montre que F_X est continue sur $\mathbb{R}$.

E3 On montre que F_X est (au moins) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini D éventuellement vide (il n'est pas indispensable de faire une étude complète de la dérivabilité de F_X).

E4 On obtient une densité de X en prenant une fonction numérique de la variable réelle, **positive ou nulle** et qui coïncide avec F'_X sauf éventuellement en un nombre fini de points.

PP Dans la pratique nous nous efforcerons au niveau du point 4 de construire une densité définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante.

- **E4 A** On dérive F_X là où on a dit qu'elle était de classe $\mathcal{C}^1$.
- **E4 B** On construit une fonction g définie et positive sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec la dérivée précédente.
- **E4 C** **On dit :** g est une fonction positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ qui coïncide avec F'_X sur $\mathbb{R}$ privé d'une ensemble fini de point donc g est une densité de X.

▸ 4. Propriétés d'une variable aléatoire réelle à densité.

Th. 1 Soient X une variable aléatoire réelles à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f une densité de X.

- f est positive sur son domaine de définition.
- f est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1.
- $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t}$.

Cor. La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité est entièrement déterminée par une de ses densités.

Th. 2 **PP** Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f une densité de X.

- Pour tout réel x : $\boxed{P(X = x) = 0}$.
- Pour tout réel x : $P(X \leqslant x) = P(X < x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Pour tout réel x : $P(X > x) = P(X \geqslant x) = \displaystyle\int_{x}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si a et b sont deux réels tels que $a < b$:

$$P(a < X < b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Th. 3 Soient X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f une densité de X continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini D.

- La fonction de répartition F_X de X est de classe $\mathcal{C}^1$ **au moins** sur $\mathbb{R} - D$;
- $\forall x \in \mathbb{R} - D,\ F'_X(x) = f(x)$.

★ Par définition la "régularité" de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité donne de la "régularité" à ses densités. Ce résultat indique qu'inversement les densités ne sont pas ingrates avec la fonction de répartition ! Il est à savoir et il justifie l'idée de travailler avec une densité la plus continue possible.

▶ 5. Caractérisations de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité.

Th. 4 Soit F une application de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ ou dans $\mathbb{R}$... (voir les deux premiers points).

F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité si et seulement si :

1. F est croissante sur $\mathbb{R}$;

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$;

3. F est continue sur $\mathbb{R}$;

4. F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points éventuellement vide.

★ Ceci est une simple conséquence de la définition d'une variable aléatoire réelle à densité et de la caractérisation de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

Th. 5 Une application F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité si et seulement si il existe une fonction numérique de la variable réelle f telle que :

1. f est positive sur son domaine de définition ;

2. f est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points ;

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1.

4. $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

▶ 6. Notion de densité de probabilité.

Déf. 3 On appelle **densité de probabilité** toute fonction numérique f, de la variable réelle, vérifiant les trois points suivants

1. f est positive sur son domaine ;

2. f est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points ;

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1.

★★ Le troisième point est plus exigeant qu'il n'y parait.

Si f est continue sur $\mathbb{R}$-$\{x_1, x_2, \cdots x_q\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_q$, dire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1 c'est dire que :

1. Les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t$, ..., $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$, ..., $\displaystyle\int_{x_{q-1}}^{x_q} f(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{x_q}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existent.
2. Leur somme est 1.

Th. 6 1. Toute densité d'une variable aléatoire à densité est une densité de probabilité.

2. Toute densité de probabilité est la densité d'une variable aléatoire à densité.

Th. 7 Soit F une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité si et seulement si il existe une densité de probabilité f telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Th. 8 Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de fonction de répartition F_X.

X est une variable aléatoire réelle à densité si et seulement si il existe une densité de probabilité f telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans ce cas f est alors une densité de X.

★ Dans l'ancien programme ceci constituait la définition d'une variable aléatoire réelle à densité.

7. Variable aléatoire à densité prenant presque sûrement ses valeurs dans I.

Déf. 4 Une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, prend presque sûrement ses valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ si $P(X \in I) = P(X^{-1}(I)) = 1$ (ou $P(X \notin I) = 0$). *On peut étendre cette définition aux boréliens de* $\mathbb{R}$.

Prop. 2 Soient X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si X prend ses valeurs dans I ou si X prend presque sûrement ses valeurs dans I alors X admet une densité nulle sur $\mathbb{R} - I$.

Si X admet une densité nulle sur $\mathbb{R} - I$ alors X prend presque sûrement ses valeurs dans I.

★ Si X admet une densité nulle sur $\mathbb{R} - I$ on a souvent tendance à dire que X prend ses valeurs dans I...

II QUELQUES VARIABLES $\varphi \circ \mathbf{X}$

★ Le programme indique que "les candidats devront savoir retrouver les densités de $a\,X + b$, X^2 et $\varphi(X)$ (comprendre $\varphi \circ X$...) avec φ de classe $\mathcal{C}^1$ strictement monotone sur $X(\Omega)$". Qu'on se le médite !

▶ 1. $\mathbf{Y = aX + b}$.

Th. 9 **SD** Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f.

Si a est un réel non nul et b un réel, $Y = aX + b$ est une variable aléatoire réelle à densité admettant pour densité la fonction $\boxed{g : x \to \dfrac{1}{|a|}\, f\Big(\dfrac{x-b}{a}\Big)}$.

▶ 2. $\mathbf{Y = X^2}$.

Th. 10 **SD** Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f une densité de X <u>définie sur $\mathbb{R}$</u>.

$Y = X^2$ est une variable aléatoire réelle à densité admettant pour densité g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{\forall x \in\,]-\infty, 0],\ g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in\,]0, +\infty[,\ g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\Big).}$$

▶ 3. Complément 1 : $\mathbf{Y} = |\mathbf{X}|$.

Th. 11 SD Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f une densité de X définie sur $\mathbb{R}$.

$|X|$ est une variable aléatoire réelle à densité admettant pour densité g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-\infty, 0[,\ g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, +\infty[,\ g(x) = f(x) + f(-x).$$

▶ 4. Complément 2 : $\mathbf{Y} = \mathbf{e^X}$.

Th. 12 SD Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f une densité de X définie sur $\mathbb{R}$.

$Y = e^X$ est une variable aléatoire réelle à densité admettant pour densité g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-\infty, 0],\ g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[,\ g(x) = \frac{1}{x}\ f(\ln x).$$

▶ 5. Complément 3 : $\mathbf{Y} = \ln \mathbf{X}$.

Th. 13 SD Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f, prenant presque sûrement ses valeurs dans $]0, +\infty[$.

$Y = \ln X$ est une variable aléatoire réelle à densité admettant pour densité la fonction :

$$g:\ x \to e^x\, f\left(e^x\right).$$

▶ 6. Complément 4 : un peu de généralité.

Th. 14 Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prenant ses valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit f une densité de X définie sur $\mathbb{R}$.

Soit φ une fonction numérique strictement monotone et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, telle que φ' ne s'annule que sur un sous-ensemble fini Δ (éventuellement vide) de I.

$\varphi \circ X$ est une variable aléatoire réelle à densité et admet pour densité la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f\big(\varphi^{-1}(x)\big)}{|\varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)|} & \text{si } x \text{ appartient à } \varphi(I - \Delta) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

▶ 7. Deux mots sur la pratique.

P X est une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prenant ses valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. φ est une fonction numérique de la variable réelle définie sur I (ou sur I privé d'une ensemble fini de points). f est une densité de X. On suppose que $Y = \varphi \circ X$ est une variable aléatoire et on souhaite montrer que c'est une variable aléatoire à densité.

E1 On cherche dans quel ensemble Y prend ses valeurs (pour cela on peut déterminer $\varphi(I)$).

E2 On cherche la fonction de répartition F_Y de Y en fonction de la fonction de répartition F_X de X.

E3 On montre que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de point.

- Le tout est assez simple si l'on connaît explicitement F_X. Supposons le contraire.
- La continuité de F_X sur $\mathbb{R}$ rend la preuve de la continuité de F_Y relativement aisée.

Pour l'aspect $\mathcal{C}^1$ il est fortement conseillé de commencer par dire que f est continue sur $\mathbb{R} - D$ où D est fini.

Alors F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - D$ (au moins) et en plus $\forall x \in \mathbb{R} - D,\ F'_X(x) = f(x)$.

Ceci suffit le plus souvent pour montrer que F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'une ensemble fini Δ et pour la dériver sur $\mathbb{R} - \Delta$. La construction d'une densité de Y résulte de cette dérivation.

III MOMENTS D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE RÉELLE À DENSITÉ

▶ 1. Espérance et moment d'ordre r d'une variable aléatoire réelle à densité.

Déf. 5 Une variable aléatoire réelle X de densité f possède une **espérance** si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt$ est convergente.

En cas d'existence, l'espérance de X est le réel noté $E(X)$ et égal à $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt$.

★★ Les hypothèses sont celles de la définition précédente. Bien évidemment, l'existence et la valeur de $E(X)$ ne dépendent pas de la densité f choisie. En clair, si g est une autre densité de X, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, g(t)\, dt$ sont de même nature et ont même valeur en cas de convergence.

★ **P** Les hypothèses sont celles de la définition précédente. L'étude de la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt$ n'est à faire qu'en $+\infty$ et $-\infty$. En effet les points (éventuels) de discontinuité de f ne posent pas de problème car $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et $t \to t$ est bornée au voisinage de ces points (qu'on se le dise et qu'on se le médite).

Déf. 6 Soient X une variable aléatoire réelle de densité f et r un élément de $\mathbb{N}$.

X possède un **moment d'ordre** r si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\, dt$ est convergente.

En cas d'existence, le moment d'ordre r de X est le réel noté $m_r(X)$ et égal à $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\, dt$.

Prop. 3 Soit X une variable aléatoire réelle à densité. Soient r et r' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $r' \leqslant r$.

Si X possède un moment d'ordre r alors elle possède un moment d'ordre r'.

▶ 2. Théorème de transfert.

Th. 15 Soit X une variable aléatoire réelle à densité prenant ses valeurs dans un intervalle I d'extrémités a et b avec : $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Soit f une densité de X et φ une fonction définie et continue sur I éventuellement privé d'un nombre fini de points.

$\varphi \circ X$ possède une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. En cas d'existence

$$E(\varphi \circ X) = \int_a^b \varphi(t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$$

★★ On se gardera bien de dire que si φ est une fonction continue et X une variable aléatoire à densité, alors $\varphi \circ X$ est une variable aléatoire à densité.

Cor. 1 X est une variable aléatoire réelle à densité, a et b sont deux réels.

Si X possède une espérance, $aX + b$ aussi et : $\boxed{E(aX + b) = aE(X) + b}$.

Cor. 2 Soit X une variable aléatoire réelle à densité.

• X^2 possède une espérance si et seulement si X possède un moment d'ordre 2.

En cas d'existence : $E(X^2) = m_2(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.

• Plus généralement X^r possède une espérance ($r \in \mathbb{N}$) si et seulement si X possède un moment d'ordre r.
En cas d'existence : $E(X^r) = m_r(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\,\mathrm{d}t$.

▶ 3. Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle à densité.

Déf. 7 Soit X une variable aléatoire réelle à densité. X possède une **variance** si X possède une espérance ainsi que $(X - E(X))^2$.

La variance de X est, si elle existe, le réel : $E\big((X - E(X))^2\big)$. On la note $V(X)$.

Déf. 8 Soit X une variable aléatoire réelle à densité possèdant une variance.

L'écart-type de X est le réel, positif ou nul, égal à $\sqrt{V(X)}$. On le note $\sigma(X)$.

Th. 16 Soit X une variable aléatoire réelle à densité. Soit f une densité de X. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) X possède une variance.

i') X possède une espérance ainsi que $(X - E(X))^2$.

ii) X possède une espérance et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t)\, \mathrm{d}t$ converge.

iii) X possède un moment d'ordre 2, c'est à dire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\, \mathrm{d}t$ converge.

vi) $E(X^2)$ existe.

Si l'une des assertions est vérifiée, X possède une variance et :

$$\boxed{V(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\, \mathrm{d}t - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t)\, \mathrm{d}t}$$

Th. 17 X est une variable aléatoire réelle à densité, a et b sont deux réels.

Si X possède une variance, $aX + b$ aussi et : $\boxed{V(aX + b) = a^2 V(X)}$.

▶ 4. Variable aléatoire centrée (resp. centrée réduite).

Déf. 9 Soit X une variable aléatoire réelle à densité.

X est **centrée** si elle possède une espérance nulle.

X est **centrée réduite** si elle possède une espérance nulle et une variance égale à 1.

Th. 18 Soit X une variable aléatoire réelle à densité.

• Si X possède une espérance $X - E(X)$ est une variable centrée.

• Si X possède une variance non nulle $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable centrée réduite.

On parle de variable aléatoire réelle centrée réduite associée à X.

▶ 5. Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

Th. 19 Soit X une variable aléatoire réelle à densité prenant ses valeurs dans $[0, +\infty[$ et admettant une espérance.

$$\forall \lambda \in]0, +\infty[,\ P(X \geqslant \lambda) \leqslant \frac{E(X)}{\lambda}.$$

Cor. 1 Soit X une variable aléatoire réelle à densité admettant un moment d'ordre 2. Pour tout réel ε strictement positif :

$$\boxed{P(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E(X^2)}{\varepsilon^2}}$$

Cor. 2 Soit X une variable aléatoire réelle à densité admettant un moment d'ordre 2. Pour tout réel ε strictement positif :

$$\boxed{P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}}$$

SOMME DE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES...

▸ 1. Espérance d'une somme.

Th. 20 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X et Y possède une espérance.

Alors $X+Y$ en possède une et :

$$\boxed{E(X+Y)=E(X)+E(Y)}$$

★★ Notons que ce résultat du programme ne précise pas la nature des variables aléatoires. Qu'on se le dise et que l'on se l'utilise...

▸ 2. Croissance de l'espérance.

Th. 21 Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X prend presque sûrement ses valeurs dans $[0,+\infty[$ et que X possède une espérance. Alors $E(X)$ est un réel positif ou nul.

Cor. Soient X et Y deux variables aléatoires réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. qui possèdent une espérance.

Si l'on a presque sûrement $X \leqslant Y$ (autrement dit si $P(X \leqslant Y)=1$) alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

▸ 3. Variance d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes.

Th. 22 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X et Y sont $\boxed{\text{indépendantes}}$ et qu'elles possèdent une variance.

Alors $X+Y$ en possède une variance et :

$$\boxed{V(X+Y)=V(X)+V(Y)}$$

★★ Notons que ce résultat du programme ne précise pas la nature des variables aléatoires. Qu'on se le dise et que l'on se l'utilise...

▸ 4. Le théorème fondamental.

Th. 23 X et Y sont deux variables aléatoires réelle $\boxed{\textbf{indépendantes}}$ de densités respectives f_X et f_Y.

Si $h : x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(x-t)\, \mathrm{d}t$ (resp. $x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)\, f_Y(t)\, \mathrm{d}t$) est définie et continue sauf peut-être en un nombre fini de points alors $X+Y$ est une variable aléatoire à densité admettant h pour densité.

h est la convolée de f_X et f_Y ou le produit de convolution de f_X et f_Y.

★★★ $\boxed{\text{PPP}}$ Le programme dit que : **en cas d'utilisation du produit de convolution, la preuve de sa légitimité n'est pas exigible des candidats**. Rien que du bonheur ! !

Th. 24 X et Y sont deux variables aléatoires réelle $\boxed{\textbf{indépendantes}}$ de densités respectives f_X et f_Y.

On suppose que f_X ou f_Y est bornée.

Alors $X+Y$ est une variable aléatoire à densité et $h : x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(x-t)\, \mathrm{d}t$

(resp. $x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)\, f_Y(t)\, \mathrm{d}t$) en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

V LOIS USUELLES

▶ 1. Lois uniformes.

Déf. 10 a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur $[a, b]$, si X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\boxed{\forall t \in \,]-\infty, a[\, \cup \,]b, +\infty[,\ f(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in [a, b],\ f(t) = \frac{1}{b-a}}$$

On écrit alors $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])}$.

Th. 25 X est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$.

1. Sa fonction de répartition F_X est définie par :

$$\forall x \in \,]-\infty, a[,\ F_X(x) = 0 \qquad \forall x \in [a, b],\ F_X(x) = \frac{x-a}{b-a} \qquad \forall x \in \,]b, +\infty[,\ F_X(x) = 1.$$

2. X possède une espérance et une variance ;

$$\boxed{E(X) = \frac{a+b}{2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

Prop. 4 a et b sont deux réels. X est une variable aléatoire.

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1]) \quad \text{équivaut à} \quad a + (b-a)\,X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])}$$

▶ 2. Lois exponentielles.

Déf. 11 λ est un réel strictement positif.

Une variable aléatoire X suit une **loi exponentielle** de paramètre λ si X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\boxed{\forall x \in \,]-\infty, 0[,\ f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) = \lambda e^{-\lambda x}}$$

On écrit alors $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)}$.

Th. 26 X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Sa fonction de répartition F_X est définie par :

$$\forall x \in \,]-\infty, 0[,\ F_X(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, +\infty[,\ F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

2. X possède une espérance et une variance ;

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{V(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$$

Th. 27 $\boxed{!\,!}$ X est une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

X suit une loi exponentielle $\boxed{\text{si et seulement si}}$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,\ P(X > x) > 0 \quad \text{et} \quad P(X > x + y / X > x) = P(X > y)$$

On parle de processus sans mémoire.

Prop. 5 λ est un réel strictement positif et X est une variable aléatoire.

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \quad \text{équivaut à} \quad \frac{1}{\lambda} X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)}$$

▶ 3. Lois gamma.

Déf. 12 ν est un réel strictement positif.

Une variable aléatoire X suit une **loi gamma** de paramètre ν si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\boxed{\forall t \in]-\infty, 0],\ f(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in]0, +\infty[,\ f(t) = \frac{t^{\nu-1}\, e^{-t}}{\Gamma(\nu)}}$$

On écrit alors $\boxed{X \hookrightarrow \gamma(\nu)}$.

Déf. 13 b et ν sont deux réels strictement positifs.

Une variable aléatoire X suit une **loi gamma** de paramètres b et ν si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\boxed{\forall t \in]-\infty, 0],\ f(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in]0, +\infty[,\ f(t) = \frac{t^{\nu-1}\, e^{-\frac{t}{b}}}{b^\nu \Gamma(\nu)}}$$

On écrit alors $\boxed{X \hookrightarrow \Gamma(b, \nu)}$.

Prop. 6 La loi exponentielle de paramètre λ coïncide avec la loi gamma de paramètres $\frac{1}{\lambda}$ et 1.

Prop. 7 b et ν sont deux réels strictement positifs . X est une variable aléatoire.

$$\boxed{X \hookrightarrow \gamma(\nu) \quad \text{équivaut à} \quad b\,X \hookrightarrow \Gamma(b, \nu)}$$

Th. 28 X est une variable aléatoire suivant une loi gamma de paramètres b et ν.

X possède une espérance et une variance ;

$$\boxed{E(X) = b\,\nu} \qquad \text{et} \qquad \boxed{V(X) = b^2 \nu}$$

Th. 29 • Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires $\boxed{\text{indépendantes}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent respectivement une loi gamma de paramètres b et ν_1, et b et ν_2.

$X_1 + X_2$ suit une loi gamma de paramètres b et $\nu_1 + \nu_2$.

• Plus généralement X_1, X_2, ..., X_n sont des variables aléatoires réelles $\boxed{\text{mutuellement indépendantes}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$$\text{Si} \quad \forall i \in [\![1, n]\!],\ X_i \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_i) \quad \text{alors} \quad X_1 + X_2 + \cdots + X_n \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n)$$

Cor. X_1, X_2, ..., X_n sont des variables aléatoires réelles $\boxed{\text{mutuellement indépendantes}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit une loi gamma de paramètre $\frac{1}{\lambda}$ et n.

▶ 4. Lois normales.

Déf. 14 m est un réel et σ un réel strictement positif.

Une variable aléatoire X suit une **loi normale** de paramètres m et σ^2 si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}$$

On écrit alors $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)}$. On parle encore de loi de **Laplace-Gauss** ou de loi **Gaussienne**.

★★★ ATTENTION Avant 2004-2005, le deuxième paramètre d'une loi normale était son écart-type alors que maintenant c'est le carré de sont écart-type (donc sa variance).

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ signifiait que X suit une loi normale d'éspérance m et d'écart-type σ. Dans ces conditions nous écrirons aujourd'hui $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Donc attention aux anciens textes et surtout aux concepteurs qui ne lisent pas bien les nouveaux programmes.

Il n'y a aucune ambiguïté si l'on donne explicitement l'espérance et l'écart-type ou l'espérance et la variance de la loi normale que l'on considère.

De toute évidence le cas particulier $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, 1^2)$ se transformera en $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, 1)$.

Th. 30 Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres m et σ^2.

X possède une espérance et une variance.

$$\boxed{E(X) = m} \qquad \text{et} \qquad \boxed{V(X) = \sigma^2}$$

Prop. 8 Soit X une variable aléatoire à densité. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

- X est centrée réduite ; autrement dit $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$.
- X admet pour densité la fonction φ définie par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{x^2}{2}}}$$

- La courbe représentative de φ admet l'axe $y'y$ pour axe de symétrie et admet deux points d'inflexion d'abscisses -1 et 1.

Th. 31 Toute fonction affine non constante d'une variable aléatoire suivant une loi normale suit une loi normale. Précisons. a, b sont deux réels et X une variable aléatoire à densité. On suppose a non nul et on pose : $Y = aX + b$.

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \quad \text{donne} \quad Y = aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}\Big(am + b, (|a|\sigma)^2\Big)}$$

Th. 32 m est un réel et σ est un réel strictement positif.

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \quad \text{équivaut à} \quad \sigma\, X + m \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)}$$

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2) \quad \text{équivaut à} \quad X^* = \frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)}$$

P Ce dernier résultat est essentiel car il permet de ramener l'étude d'une variable aléatoire suivant une loi normale à l'étude d'une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

Th. 33 Soit Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire X suivant une loi normale centrée réduite.

Pour tout réel x :

- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ ou $P(X \leqslant -x) = 1 - P(X \leqslant x)$.
- $P(X \leqslant x) = P(X \geqslant -x)$.
- $P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0) = 1/2$.

Pour tout réel x positif :

- $P(|X| \leqslant x) = 2\Phi(x) - 1$.
- $P(|X| \geqslant x) = 2(1 - \Phi(x))$.

Th. 34 Soit Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. X est une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X.

On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Alors pour tout réel x :

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

Th. 35 • Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires $\boxed{\text{indépendantes}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent respectivement une loi normale de paramètres m_1 et σ_1^2, et m_2 et σ_2^2.

$X_1 + X_2$ suit une loi normale de paramètres $m_1 + m_2$ et $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

• Plus généralement soient λ_1, λ_2, ..., λ_n n réels non nuls et X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires réelles $\boxed{\text{mutuellement indépendantes}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$, X_i suit une loi normale de paramètres m_i et σ_i^2. Alors :

$$\lambda_1\, X_1 + \lambda_2\, X_2 + \cdots + \lambda_n\, X_n \hookrightarrow \mathcal{N}\Big(\lambda_1\, m_1 + \lambda_2\, m_2 + \cdots + \lambda_n\, m_n, \lambda_1^2\, \sigma_1^2 + \lambda_2^2\, \sigma_2^2 + \cdots + \lambda_n^2\, \sigma_n^2\Big)$$

★ Ceci vaut encore si on suppose les réels λ_1, λ_2, ..., λ_n non tous nuls.

▶ 5. Les moments exigés par le programme à partir des concours 2005.

• Espérance et variance des lois uniformes, exponentielles, gammas et normales.

▶ 6. Récapitulatif.

Nom de la loi	Notations	Valeurs		Une densité	$E(X)$	$V(X)$
Uniforme	$X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$	$[a,b]$	$a<b$	$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{si } t\in[a,b]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$\lambda>0$	$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t\in[0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
Gamma	$X \hookrightarrow \gamma(\nu)$	$\mathbb{R}^+$	$\nu>0$	$f(t)=\begin{cases}\dfrac{t^{\nu-1}\,e^{-t}}{\Gamma(\nu)} & \text{si } t\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{si } t\in]-\infty,0]\end{cases}$	ν	ν
Gamma	$X \hookrightarrow \Gamma(b,\nu)$	$\mathbb{R}^+$	$b>0$ $\nu>0$	$f(t)=\begin{cases}\dfrac{t^{\nu-1}\,e^{\frac{-t}{b}}}{b^\nu\Gamma(\nu)} & \text{si } t\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{si } t\in]-\infty,0]\end{cases}$	$b\,\nu$	$b^2\nu$
Normale centrée réduite	$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$	$\mathbb{R}$		$f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{t^2}{2}}$	0	1
Normale	$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\sigma>0$	$f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2

VI SAVOIR FAIRE

• 1. Savoir montrer qu'une application est une densité de probabilité.

• 2. Savoir, si X est une variable aléatoire à densité, passer d'une densité de X à sa fonction de répartition et réciproquement.

• 3. Savoir montrer qu'une variable aléatoire est une variable aléatoire à densité et en trouver une densité.

• 4. Savoir montrer qu'une variable aléatoire à densité possède une espérance (resp. une variance) et savoir la calculer.

• 5. Si X est une variable aléatoire à densité et φ est une fonction numérique d'une variable réelle, savoir montrer que $\varphi \circ X$ est une variable aléatoire à densité et savoir en trouver une densité.

• 6. Si X est une variable aléatoire à densité et φ est une fonction numérique d'une variable réelle, savoir montrer que $\varphi \circ X$ possède une espérance et savoir la calculer.

• 7. Savoir trouver une densité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes à densité.

• 8. Savoir trouver une densité du produit ou du quotient de deux variables aléatoires indépendantes à densité.

• 9. Savoir reconnaître une densité ou la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité usuelle.

• 10. Savoir utiliser la parité d'une densité d'une variable aléatoire pour en calculer les moments.

• 11. Savoir utiliser les moments des variables aléatoires du programme pour calculer des intégrales.

• 12. Savoir utiliser les densités des lois normales pour calculer des intégrales du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2+bt+c)}\,dt$ $(a>0)$.

- 13. Savoir étudier $Y = [X]$ (partie entière) et $Z = X - [X]$ où X est une variable aléatoire à densité.
- 14. Savoir démontrer et utiliser les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

VII QUELQUES COMPLÉMENTS ET QUELQUES BONS COUPS POUR AMÉLIORER TA VARAD ATTITUDE

▶ 1. Produit de deux variables aléatoires à densité indépendantes prenant des valeurs positives.

P Soient X et Y deux variables aléatoires à densité indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui prennent des valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ (ou $\mathbb{R}^{+}$).

Pour étudier le produit $Z = XY$ de ces deux variables on peut étudier successivement $\ln X$, $\ln Y$, $S = \ln X + \ln Y$ (en utilisant le théorème fondamental) et $Z = e^S$.

▶ 2. Quotient de deux variables aléatoires à densité.

P Soient X et Y deux variables aléatoires à densité. On suppose que Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ (ou $\mathbb{R}^{+}$).

L'étude de $\dfrac{X}{Y}$ peut se faire en remarquant que, si x est dans $\mathbb{R}$, $P\left(\dfrac{X}{Y} \leqslant x\right) = P(X - xY \leqslant 0)$ et en étudiant $X - xY = X + (-xY)$...

Si X prend également des valeurs positives, l'étude de $\dfrac{X}{Y}$ peut se faire en passant au log à condition d'avoir un peu d'indépendance ...

▶ 3. Quelques moments usuels.

Prop. 9 Soit X est une variable aléatoire suivant une loi gamma de paramètres b et ν et r est un élément de $\mathbb{N}$.

X possède un moment d'ordre r qui vaut $\boxed{b^r\,(r+\nu-1)(r+\nu-2)\cdots(\nu+1)\nu}$.

Prop. 10 Soit X est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

Pour tout élément r de $\mathbb{N}$, X possède un moment d'ordre r.

$\forall k \in \mathbb{N},\ m_{2k}(X) = E(X^{2k}) = \dfrac{(2k)!}{2^k\,k!}$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ m_{2k+1}(X) = E(X^{2k+1}) = 0$.

▶ 4. Quelques résultats classiques.

Prop. 11 λ est un réel strictement positif. X est une variable aléatoire réelle.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, $-\ln X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, $e^{-X} \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, $-\dfrac{1}{\lambda}\ln X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, $e^{-\lambda X} \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

P Ceci peut être utile pour simuler une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle.

Prop. 12 X_1, X_2,, ..., X_n sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi exponentielle de paramètre λ. Alors $\mathrm{Min}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ suit une loi exponentielle de paramètre $n\lambda$.

Prop. 13 Si X suit une loi gamma de paramètres b et ν, pour tout réel λ strictement positif, λX suit une loi gamma de paramètres λb et ν

Prop. 14 **Loi du khi-deux**.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors $Y = X^2 \hookrightarrow \Gamma(2, \frac{1}{2})$.

Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent une loi normale centrée réduite alors $T = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \hookrightarrow \Gamma(2, \frac{n}{2})$.

Prop. 15 b et ν sont deux réels strictement positifs. c est un réel (nécessairement positif). Si X est une variable aléatoire à densité admettant pour densité f définie par :

$$\forall t \in]-\infty, 0],\ f(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in]0, +\infty[,\ f(t) = c\, t^{\nu-1}\, e^{-\frac{t}{b}}$$

alors X suit une loi gamma de paramètres b et ν.

▶ 5. Caractérisation de la fonction de répartition d'une variable à densité.

Th. 36 Soit F une application de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ (ou dans $\mathbb{R}$... voir les deux premiers points).

F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité si et seulement si :

- ▷ F est croissante sur $\mathbb{R}$.
- ▷ $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- ▷ F est continue sur $\mathbb{R}$.
- ▷ Il existe un ensemble fini éventuellement vide D tel que F soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ - D.

▶ 6. Utilisation des densités dans le calcul d'intégrales.

La loi normale centrée réduite donne : $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}}$

Ce dernier résultat permet de justifier aisément l'existence et la valeur

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}} \quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}} \quad \boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Dans le même ordre d'idée on peut par des changements de variable simples calculer des intégrales du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2+bt+c)}\, dt$ avec a strictement positif en utilisant une densité d'une loi normale.

Plus précisément si a est un réel strictement positif et si b et c sont deux réels, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a\,t^2+b\,t+c)}\, dt$ existe et vaut :

$\displaystyle\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}$ (résultat qui n'est pas à apprendre mais à savoir retrouver.)

Dans le même ordre d'idée encore on peut à l'aide des lois gamma calculer des intégrales du type $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^r\, e^{-at}\, \mathrm{d}t$ avec a dans $\mathbb{R}^{+*}$ et r dans $\mathbb{N}$.

▶ 7. Existence de l'espérance.

Prop. 16 Si X est une variable aléatoire à densité et si $X(\Omega)$ est borné, X possède une espérance.

Prop. 17 Soit X une variable aléatoire à densité

X possède une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tF'_X(t)\,dt$ existe. En cas d'existence $E(X)$ sera égale à cette dernière intégrale.

Ceci ne suppose pas que F_X soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ce résultat peut être intéressant pour calculer $E(X)$ car il se prête à une intégration par parties (mais grande prudence car il s'agit d'intégrales généralisées et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t\,F_X(t) = +\infty$...).

▶ 8. Densité paire.

Prop. 18 X est une variable aléatoire à densité.

• Si X admet une densité paire X et $-X$ ont même loi et réciproquement.

• Si X admet une densité paire et une espérance alors cette espérance est nulle. Même chose pour un moment d'ordre $2r+1$.

▶ 9. Quelques lois classiques.

Déf. 15 **Loi Log-normale**

Une variable aléatoire X suit une loi Log-normale de paramètres m et σ^2 $(\sigma > 0)$ si $X = e^Y$ où Y est une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres m et σ^2.

Déf. 16 **Loi de Cauchy**

Une variable aléatoire X suit une loi de Cauchy de paramètre a $(a > 0)$ si X est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{a}{\pi(a^2+t^2)}$$

On écrit alors $x \hookrightarrow \mathcal{C}(a)$.

Illustration. Si X est uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}\,\frac{\pi}{2}]$, $Y = \tan X$ suit une loi de Cauchy de paramètre 1.

Déf. 17 **Loi de Pareto**. α et a sont deux réels strictement positifs. x_0 est un réel.

Une variable aléatoire X suit une **loi de Pareto** de paramètres α, a et x_0 si X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\boxed{\forall x \in\ ]-\infty, x_0+a],\ f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]x_0+a, +\infty[,\ f(x) = \frac{\alpha}{a}\left(\frac{a}{x-x_0}\right)^{\alpha+1}}$$

Déf. 18 **Loi Beta**

a et b sont deux réels strictements positifs. $B(a,b) = \displaystyle\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t$.

Une variable aléatoire X suit une loi Beta de paramètres a et b si X est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[,\ f(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in]0,1[,\ f(t) = \frac{t^{a-1}(1-t)^{b-1}}{B(a,b)}$$

On écrit alors $X \hookrightarrow\ \beta(a,b)$.

Illustration. Si X est uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}\,\frac{\pi}{2}]$, $Y=\sin^2 X$ suit une loi beta de paramètres $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

Déf. 19 **Loi exponentielle bilatérale et de Laplace**

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle bilatérale de paramètre a ($a>0$) si X est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=\frac{a}{2}\,e^{-a|t|}$$

Si $a=1$ on parle de loi de Laplace.

Déf. 20 **Loi de Rayleight**

Une variable aléatoire X suit une loi de Rayleight si X est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t\in]-\infty,0[,\ f(t)=0 \quad \text{et} \quad \forall t\in[0,+\infty[,\ f(t)=t\,e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Illustration. Si $X\hookrightarrow\mathcal{E}(1/2)$, $Y=\sqrt{X}$ suit une loi de Rayleight.

VIII DES ERREURS À NE PAS FAIRE

★ Confondre fonction de répartition et densité.

★ F_X étant la fonction de répartition d'une variable aléatoire (à densité) X arriver à : $\forall x\in[a,+\infty[,\ F_X(x)=0$.

X est une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition est la fonction F_X définie par :

$$\forall x\in\,]-\infty,0[,\ F_X(x)=0 \quad \text{et} \quad \forall x\in[0,+\infty[,\ F_X(x)=(1-e^{-x})^3.$$

F_X est continue sur $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}^*$ donc X est une variable aléatoire à densité. Jusqu'ici pas de problème.

★ $\forall x\in[0,+\infty[,\ F_X(x)=(1-e^{-x})^3$ donc $\forall x\in[0,+\infty[,\ F'_X(x)=3\,e^{-x}\,(1-e^{-x})^2$.

Écrire $\forall x\in]0,+\infty[,\ F_X(x)=(1-e^{-x})^3$ donc $\forall x\in]0,+\infty[,\ F'_X(x)=3\,e^{-x}\,(1-e^{-x})^2$.

★ Écrire des fonctions de répartitions ou densités usuelles fausses.

X suit la loi exponentielle de paramètre λ.

★ Soit f une densité de X. $\forall x\in\,]-\infty,0[,\ f(x)=0$ et $\forall x\in[0,+\infty[,\ f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$.

Écrire : posons : $\forall x\in\,]-\infty,0[,\ f(x)=0$ et $\forall x\in[0,+\infty[,\ f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$; f est une densité de X.

★ Dire que si X est une variable aléatoire à densité et si φ est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont le domaine de définition contient $X(\Omega)$ alors $\varphi\circ X$ est une variable aléatoire à densité.

★ Dire que la somme de deux variables aléatoires à densité est une variable aléatoire à densité.