

VARIABLES ALÉATOIRES A DENSITÉ

I GÉNÉRALITÉS

1. Définition d'une variable aléatoire réelle à densité
2. Densités d'une variable aléatoire réelle à densité
3. Reconnaître une variable aléatoire réelle à densité et en trouver une densité
4. Propriétés d'une variable aléatoire réelle à densité
5. Caractérisations de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité
6. Notion de densité de probabilité
7. Variable aléatoire à densité prenant ses valeurs dans I .

II QUELQUES VARIABLES DU TYPE $\varphi \circ X$

1. $Y = aX + b$
2. $Y = X^2$
3. Complément 1 : $Y = |X|$
4. Complément 2 : $Y = e^X$
5. Complément 3 : $Y = \ln X$
6. Complément 4 : un peu de généralité
7. Deux mots sur la pratique.

III MOMENTS D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE RÉELLE À DENSITÉ

1. Espérance et moment d'ordre r d'une variable aléatoire réelle à densité
2. Théorème de transfert
3. Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle à densité
4. Variable aléatoire centrée (resp. centrée réduite)
5. Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

IV SOMME DE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES...

1. Espérance d'une somme
2. Croissance de l'espérance
3. Variance d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes
4. Le théorème fondamental

V LOIS USUELLES

1. Loïs uniformes
2. Loïs exponentielles
3. Loïs gamma
4. Loïs normales
5. Les moments exigés par le programme
6. Récapitulatif

VI SAVOIR FAIRE

VII QUELQUES COMPLÉMENTS ET QUELQUES BONS COUPS POUR AMÉLIORER TA VARAD ATTITUDE

1. Produit de deux variables aléatoires à densité indépendantes prenant des valeurs positives.
2. Quotient de deux variables aléatoires à densité.
3. Quelques moments usuels.
4. Quelques résultats classiques.
5. Caractérisation de la fonction de répartition d'une variable à densité.
6. Utilisation des densités dans le calcul d'intégrales.
7. Existence d'un moment d'ordre r .
8. Calcul de l'espérance.
9. Densité paire.
10. Quelques lois classiques.

VIII DES ERREURS À NE PAS FAIRE

Ce résumé de cours se rapporte au programme de seconde année en vigueur à partir de 2004-2005 qui est très sensiblement différent des précédents. Il faut donc faire très attention à ces changements lorsque l'on fait un problème d'avant 2005 (ou lorsque l'on lit une correction).

P mentionne des résultats particulièrement utiles et souvent oubliés dans la pratique des variables aléatoires à densité.

★ mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SD mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

! Notions ou résultats qui ne semblent pas toujours très importants mais qui figurent explicitement dans le programme donc qui sont exigibles.

Dans toute la suite (Ω, \mathcal{A}, P) est un espace probabilisé et les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) (sauf mention du contraire) ; nous ne le redirons pas toujours.

I GÉNÉRALITÉS

► 1. Définition d'une variable aléatoire réelle à densité.

Déf. 1 On appelle **variable aléatoire réelle à densité** sur (Ω, \mathcal{A}, P) toute variable aléatoire réelle X sur (Ω, \mathcal{A}, P) dont la fonction de répartition est continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} privé d'un ensemble fini de points, éventuellement vide.

► 2. Densité **S** d'une variable aléatoire réelle à densité.

Déf. 2 Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) de fonction de répartition F_X .

Notons que F'_X est positive ou nulle là où elle est définie (F_X est croissante).

On appelle **densité de X** toute fonction numérique de la variable réelle, à valeurs positives ou nulles et qui coïncide avec F'_X en tout point de \mathbb{R} privé d'un ensemble fini de points (éventuellement vide).

★ Une densité de X n'est pas nécessairement définie sur tout \mathbb{R} . Néanmoins l'ensemble des points où elle n'est pas définie est fini.

Prop. 1 Rien que des évidences

Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) de fonction de répartition F_X .

1. F'_X est une densité de X .
2. Soit f est une densité de X . L'ensemble des densités de X est l'ensemble des fonctions numériques de la variable réelle, positives ou nulles et qui coïncident avec f en tout point de \mathbb{R} privé d'un ensemble fini de points éventuellement vide.
3. Deux densités de X coïncident en tout point de \mathbb{R} privé d'un ensemble fini de points éventuellement vide.
4. X possède au moins une densité définie sur \mathbb{R} ; et même une infinité !

★ Lorsque l'on travaille sur une variable aléatoire réelle à densité X on a intérêt à utiliser une densité de X définie sur \mathbb{R} et la "plus continue possible".

★ Il est usuel d'appeler **loi de probabilité** d'une variable aléatoire réelle à densité l'une de ses densités !

★★ Dans un problème lorsque l'on demande de trouver la loi de probabilité d'une variable aléatoire à densité il faut comprendre que l'on demande une densité de cette variable aléatoire.

► 3. Reconnaître une variable aléatoire réelle à densité et en trouver une densité.

PPP Voici les 4 étapes usuelles pour montrer qu'une variable aléatoire réelle X est à densité et pour en trouver une densité.

E1 On cherche la fonction de répartition F_X de X .

E2 On montre que F_X est continue sur \mathbb{R} .

E3 On montre que F_X est (au moins) de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} privé d'un ensemble fini D éventuellement vide (il n'est pas indispensable de faire une étude complète de la dérivabilité de F_X).

E4 On obtient une densité de X en prenant une fonction numérique de la variable réelle, **positive ou nulle** et qui coïncide avec F'_X sauf éventuellement en un nombre fini de points.

PP Dans la pratique nous nous efforcerons au niveau du point 4 de construire une densité définie sur \mathbb{R} de la manière suivante.

- **E4 A** On dérive F_X là où on a dit qu'elle était de classe \mathcal{C}^1 .
- **E4 B** On construit une fonction g définie et positive sur \mathbb{R} qui coïncide avec la dérivée précédente.
- **E4 C** On dit : g est une fonction positive sur son domaine de définition qui est \mathbb{R} qui coïncide avec F'_X sur \mathbb{R} privé d'un ensemble fini de points donc g est une densité de X .

► 4. Propriétés d'une variable aléatoire réelle à densité.

Th. 1 Soient X une variable aléatoire réelle à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) et f une densité de X .

- f est positive sur son domaine de définition.
- f est continue sur \mathbb{R} privé d'un ensemble fini de points.

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ existe et vaut 1.

- $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

Cor. La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité est entièrement déterminée par une de ses densités.

Th. 2 **PP** Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) et f une densité de X .

- Pour tout réel x : $P(X = x) = 0$.

- Pour tout réel x : $P(X \leq x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

- Pour tout réel x : $P(X > x) = P(X \geq x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$.

- Si a et b sont deux réels tels que $a < b$:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt.$$

Th. 3 Soient X une variable aléatoire réelle à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) et f une densité de X continue sur \mathbb{R} privé d'un ensemble fini D .

- La fonction de répartition F_X de X est de classe \mathcal{C}^1 **au moins** sur $\mathbb{R} - D$;
- $\forall x \in \mathbb{R} - D, F'_X(x) = f(x)$.

★ Par définition la “régularité” de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité donne de la “régularité” à ses densités. Ce résultat indique qu'inversement les densités ne sont pas ingrates avec la fonction de répartition ! Il est à savoir et il justifie l'idée de travailler avec une densité la plus continue possible.

► 5. Caractérisations de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité.

Th. 4 Soit F une application de \mathbb{R} dans $[0, 1]$ ou dans $\mathbb{R} \dots$ (voir les deux premiers points).

F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité si et seulement si :

1. F est croissante sur \mathbb{R} ;
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$;
3. F est continue sur \mathbb{R} ;
4. F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} privé d'un ensemble fini de points éventuellement vide.

★ Ceci est une simple conséquence de la définition d'une variable aléatoire réelle à densité et de la caractérisation de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

Th. 5 Une application F de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité si et seulement si il existe une fonction numérique de la variable réelle f telle que :

1. f est positive sur son domaine de définition ;
2. f est continue sur \mathbb{R} privé d'un ensemble fini de points ;
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ existe et vaut 1.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

► 6. Notion de densité de probabilité.

Déf. 3 On appelle **densité de probabilité** toute fonction numérique f , de la variable réelle, vérifiant les trois points suivants

1. f est positive sur son domaine ;
2. f est continue sur \mathbb{R} privé d'un ensemble fini de points ;
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ existe et vaut 1.

★★ Le troisième point est plus exigeant qu'il n'y paraît.

Si f est continue sur $\mathbb{R} - \{x_1, x_2, \dots, x_q\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_q$, dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ existe et vaut 1 c'est dire que :

1. Les intégrales $\int_{-\infty}^{x_1} f(t) dt, \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt, \dots, \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt, \dots, \int_{x_{q-1}}^{x_q} f(t) dt, \int_{x_q}^{+\infty} f(t) dt$ existent.
2. Leur somme est 1.

- Th. 6** 1. Toute densité d'une variable aléatoire à densité est une densité de probabilité.
2. Toute densité de probabilité est la densité d'une variable aléatoire à densité.

- Th. 7** Soit F une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité si et seulement si il existe une densité de probabilité f telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

- Th. 8** Soit X une variable aléatoire réelle sur (Ω, \mathcal{A}, P) de fonction de répartition F_X .
 X est une variable aléatoire réelle à densité si et seulement si il existe une densité de probabilité f telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Dans ce cas f est alors une densité de X .

★ Dans l'ancien programme ceci constituait la définition d'une variable aléatoire réelle à densité.

7. Variable aléatoire à densité prenant presque sûrement ses valeurs dans I .

- Déf. 4** Une variable aléatoire réelle X sur (Ω, \mathcal{A}, P) , prend presque sûrement ses valeurs dans un intervalle I de \mathbb{R} si $P(X \in I) = P(X^{-1}(I)) = 1$ (ou $P(X \notin I) = 0$). On peut étendre cette définition aux boréliens de \mathbb{R} .

- Prop. 2** Soient X une variable aléatoire réelle à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) et I un intervalle de \mathbb{R} .
Si X prend ses valeurs dans I ou si X prend presque sûrement ses valeurs dans I alors X admet une densité nulle sur $\mathbb{R} - I$.
Si X admet une densité nulle sur $\mathbb{R} - I$ alors X prend presque sûrement ses valeurs dans I .

★ Si X admet une densité nulle sur $\mathbb{R} - I$ on a souvent tendance à dire que X prend ses valeurs dans I ...

II QUELQUES VARIABLES $\varphi \circ X$

★ Le programme indique que "les candidats devront savoir retrouver les densités de $aX + b$, X^2 et $\varphi(X)$ (comprendre $\varphi \circ X$...) avec φ de classe \mathcal{C}^1 strictement monotone sur $X(\Omega)$ ". Qu'on se le médite!

► 1. $Y = aX + b$.

- Th. 9** **SD** Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) de densité f .
Si a est un réel non nul et b un réel, $Y = aX + b$ est une variable aléatoire réelle à densité admettant pour densité la fonction $g : x \rightarrow \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

► 2. $Y = X^2$.

- Th. 10** **SD** Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) et f une densité de X définie sur \mathbb{R} .
 $Y = X^2$ est une variable aléatoire réelle à densité admettant pour densité g définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in]-\infty, 0], g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[, g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x}) \right).$$

► **3. Complément 1 : $Y = |X|$.**

Th. 11 SD Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) et f une densité de X définie sur \mathbb{R} .
 $|X|$ est une variable aléatoire réelle à densité admettant pour densité g définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in]-\infty, 0[, g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, +\infty[, g(x) = f(x) + f(-x).$$

► **4. Complément 2 : $Y = e^X$.**

Th. 12 SD Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) et f une densité de X définie sur \mathbb{R} .
 $Y = e^X$ est une variable aléatoire réelle à densité admettant pour densité g définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in]-\infty, 0[, g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[, g(x) = \frac{1}{x} f(\ln x).$$

► **5. Complément 3 : $Y = \ln X$.**

Th. 13 SD Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) de densité f , prenant presque sûrement ses valeurs dans $]0, +\infty[$.

$Y = \ln X$ est une variable aléatoire réelle à densité admettant pour densité la fonction :

$$g : x \rightarrow e^x f(e^x).$$

► **6. Complément 4 : un peu de généralité.**

Th. 14 Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) prenant ses valeurs dans un intervalle I de \mathbb{R} .
 Soit f une densité de X définie sur \mathbb{R} .

Soit φ une fonction numérique strictement monotone et de classe \mathcal{C}^1 sur I , telle que φ' ne s'annule que sur un sous-ensemble fini Δ (éventuellement vide) de I .

$\varphi \circ X$ est une variable aléatoire réelle à densité et admet pour densité la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(\varphi^{-1}(x))}{|\varphi'(\varphi^{-1}(x))|} & \text{si } x \text{ appartient à } \varphi(I - \Delta) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

► 7. Deux mots sur la pratique.

P X est une variable aléatoire réelle à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) prenant ses valeurs dans un intervalle I de \mathbb{R} . φ est une fonction numérique de la variable réelle définie sur I (ou sur I privé d'un ensemble fini de points). f est une densité de X . On suppose que $Y = \varphi \circ X$ est une variable aléatoire et on souhaite montrer que c'est une variable aléatoire à densité.

E1 On cherche dans quel ensemble Y prend ses valeurs (pour cela on peut déterminer $\varphi(I)$).

E2 On cherche la fonction de répartition F_Y de Y en fonction de la fonction de répartition F_X de X .

E3 On montre que F_Y est continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} privé d'un ensemble fini de point.

- Le tout est assez simple si l'on connaît explicitement F_X . Supposons le contraire.
- La continuité de F_X sur \mathbb{R} rend la preuve de la continuité de F_Y relativement aisée.

Pour l'aspect \mathcal{C}^1 il est fortement conseillé de commencer par dire que f est continue sur $\mathbb{R} - D$ où D est fini.

Alors F_X est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} - D$ (au moins) et en plus $\forall x \in \mathbb{R} - D$, $F'_X(x) = f(x)$.

Ceci suffit le plus souvent pour montrer que F_Y est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} privé d'un ensemble fini Δ et pour la dériver sur $\mathbb{R} - \Delta$. La construction d'une densité de Y résulte de cette dérivation.

III MOMENTS D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE RÉELLE À DENSITÉ

► 1. Espérance et moment d'ordre r d'une variable aléatoire réelle à densité.

Déf. 5 Une variable aléatoire réelle X de densité f possède une **espérance** si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ est convergente.

En cas d'existence, l'espérance de X est le réel noté $E(X)$ et égal à $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$.

★★ Les hypothèses sont celles de la définition précédente. Bien évidemment, l'existence et la valeur de $E(X)$ ne dépendent pas de la densité f choisie. En clair, si g est une autre densité de X , $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t g(t) dt$ sont de même nature et ont même valeur en cas de convergence.

★ **P** Les hypothèses sont celles de la définition précédente. L'étude de la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ n'est à faire qu'en $+\infty$ et $-\infty$. En effet les points (éventuels) de discontinuité de f ne posent pas de problème car $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et $t \rightarrow t$ est bornée au voisinage de ces points (qu'on se le dise et qu'on se le médite).

Déf. 6 Soient X une variable aléatoire réelle de densité f et r un élément de \mathbb{N} .

X possède un **moment d'ordre** r si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t) dt$ est convergente.

En cas d'existence, le moment d'ordre r de X est le réel noté $m_r(X)$ et égal à $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t) dt$.

Prop. 3 Soit X une variable aléatoire réelle à densité. Soient r et r' deux éléments de \mathbb{N} tels que $r' \leq r$.
Si X possède un moment d'ordre r alors elle possède un moment d'ordre r' .

► **2. Théorème de transfert.**

Th. 15 Soit X une variable aléatoire réelle à densité prenant ses valeurs dans un intervalle I d'extrémités a et b avec : $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Soit f une densité de X et φ une fonction définie et continue sur I éventuellement privé d'un nombre fini de points.

$\varphi \circ X$ possède une espérance si et seulement si $\int_a^b \varphi(t) f(t) dt$ est absolument convergente. En cas d'existence

$$E(\varphi \circ X) = \int_a^b \varphi(t) f(t) dt$$

★★ On se gardera bien de dire que si φ est une fonction continue et X une variable aléatoire à densité, alors $\varphi \circ X$ est une variable aléatoire à densité.

Cor. 1 X est une variable aléatoire réelle à densité, a et b sont deux réels.

Si X possède une espérance, $aX + b$ aussi et : $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Cor. 2 Soit X une variable aléatoire réelle à densité.

• X^2 possède une espérance si et seulement si X possède un moment d'ordre 2.

En cas d'existence : $E(X^2) = m_2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$.

• Plus généralement X^r possède une espérance ($r \in \mathbb{N}$) si et seulement si X possède un moment d'ordre r .

En cas d'existence : $E(X^r) = m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t) dt$.

► **3. Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle à densité.**

Déf. 7 Soit X une variable aléatoire réelle à densité. X possède une **variance** si X possède une espérance ainsi que $(X - E(X))^2$.

La variance de X est, si elle existe, le réel : $E((X - E(X))^2)$. On la note $V(X)$.

Déf. 8 Soit X une variable aléatoire réelle à densité possédant une variance.

L'**écart-type** de X est le réel, positif ou nul, égal à $\sqrt{V(X)}$. On le note $\sigma(X)$.

Th. 16 Soit X une variable aléatoire réelle à densité. Soit f une densité de X . Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) X possède une variance.

i') X possède une espérance ainsi que $(X - E(X))^2$.

ii) X possède une espérance et $\int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t) dt$ converge.

iii) X possède un moment d'ordre 2, c'est à dire $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ converge.

vi) $E(X^2)$ existe.

Si l'une des assertions est vérifiée, X possède une variance et :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t) dt$$

Th. 17 X est une variable aléatoire réelle à densité, a et b sont deux réels.

Si X possède une variance, $aX + b$ aussi et : $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

► 4. Variable aléatoire centrée (resp. centrée réduite).

Déf. 9 Soit X une variable aléatoire réelle à densité.

X est **centrée** si elle possède une espérance nulle.

X est **centrée réduite** si elle possède une espérance nulle et une variance égale à 1.

Th. 18 Soit X une variable aléatoire réelle à densité.

• Si X possède une espérance $X - E(X)$ est une variable centrée.

• Si X possède une variance non nulle $X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable centrée réduite.

On parle de variable aléatoire réelle centrée réduite associée à X .

► 5. Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

Th. 19 Soit X une variable aléatoire réelle à densité prenant ses valeurs dans $[0, +\infty[$ et admettant une espérance.

$$\forall \lambda \in]0, +\infty[, P(X \geq \lambda) \leq \frac{E(X)}{\lambda}.$$

Cor. 1 Soit X une variable aléatoire réelle à densité admettant un moment d'ordre 2. Pour tout réel ε strictement positif :

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X^2)}{\varepsilon^2}$$

Cor. 2 Soit X une variable aléatoire réelle à densité admettant un moment d'ordre 2. Pour tout réel ε strictement positif :

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

IV SOMME DE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES...

► 1. Espérance d'une somme.

Th. 20 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On suppose que X et Y possèdent une espérance. Alors $X + Y$ en possède une et :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

★★ Notons que ce résultat du programme ne précise pas la nature des variables aléatoires. Qu'on se le dise et que l'on se l'utilise...

► 2. Croissance de l'espérance.

Th. 21 Soit X une variable aléatoire réelle sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On suppose que X prend presque sûrement ses valeurs dans $[0, +\infty[$ et que X possède une espérance. Alors $E(X)$ est un réel positif ou nul.

Cor. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur (Ω, \mathcal{A}, P) qui possèdent une espérance. Si l'on a presque sûrement $X \leq Y$ (autrement dit si $P(X \leq Y) = 1$) alors $E(X) \leq E(Y)$.

► 3. Variance d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes.

Th. 22 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On suppose que X et Y sont indépendantes et qu'elles possèdent une variance.

Alors $X + Y$ en possède une variance et :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

★★ Notons que ce résultat du programme ne précise pas la nature des variables aléatoires. Qu'on se le dise et que l'on se l'utilise...

► 4. Le théorème fondamental.

Th. 23 X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes de densités respectives f_X et f_Y .

Si $h : x \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt$ (resp. $x \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_Y(t) dt$) est définie et continue sauf peut-être en un nombre fini de points alors $X + Y$ est une variable aléatoire à densité admettant h pour densité. h est la convolée de f_X et f_Y ou le produit de convolution de f_X et f_Y .

★★★ PPP Le programme dit que : **en cas d'utilisation du produit de convolution, la preuve de sa légitimité n'est pas exigible des candidats.** Rien que du bonheur !!

Th. 24 X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes de densités respectives f_X et f_Y .

On suppose que f_X ou f_Y est bornée.

Alors $X + Y$ est une variable aléatoire à densité et $h : x \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt$

(resp. $x \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_Y(t) dt$) en est une densité définie sur \mathbb{R} .

V LOIS USUELLES

► 1. Loïs uniformes.

Déf. 10 a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur $[a, b]$, si X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in]-\infty, a[\cup]b, +\infty[, f(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in [a, b], f(t) = \frac{1}{b-a}$$

On écrit alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.

Th. 25 X est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$.

1. Sa fonction de répartition F_X est définie par :

$$\forall x \in]-\infty, a[, F_X(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b], F_X(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad \forall x \in]b, +\infty[, F_X(x) = 1.$$

2. X possède une espérance et une variance ;

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Prop. 4 a et b sont deux réels. X est une variable aléatoire.

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1]) \quad \text{équivalent à} \quad a + (b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$$

► 2. Loïs exponentielles.

Déf. 11 λ est un réel strictement positif.

Une variable aléatoire X suit une **loi exponentielle** de paramètre λ si X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in]-\infty, 0[, f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, +\infty[, f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

On écrit alors $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Th. 26 X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ .

1. Sa fonction de répartition F_X est définie par :

$$\forall x \in]-\infty, 0[, F_X(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, +\infty[, F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

2. X possède une espérance et une variance ;

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Th. 27 !! X est une variable aléatoire à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

X suit une loi exponentielle si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, P(X > x) > 0 \quad \text{et} \quad P(X > x + y / X > x) = P(X > y)$$

On parle de processus sans mémoire.

Prop. 5 λ est un réel strictement positif et X est une variable aléatoire.

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \quad \text{équivaut à} \quad \frac{1}{\lambda} X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$$

► 3. Lois gamma.

Déf. 12 ν est un réel strictement positif.

Une variable aléatoire X suit une **loi gamma** de paramètre ν si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in]-\infty, 0], f(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in]0, +\infty[, f(t) = \frac{t^{\nu-1} e^{-t}}{\Gamma(\nu)}$$

On écrit alors $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$.

Déf. 13 b et ν sont deux réels strictement positifs.

Une variable aléatoire X suit une **loi gamma** de paramètres b et ν si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in]-\infty, 0], f(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in]0, +\infty[, f(t) = \frac{t^{\nu-1} e^{-\frac{t}{b}}}{b^\nu \Gamma(\nu)}$$

On écrit alors $X \hookrightarrow \Gamma(b, \nu)$.

Prop. 6 La loi exponentielle de paramètre λ coïncide avec la loi gamma de paramètres $\frac{1}{\lambda}$ et 1.

Prop. 7 b et ν sont deux réels strictement positifs . X est une variable aléatoire.

$$X \hookrightarrow \gamma(\nu) \quad \text{équivaut à} \quad bX \hookrightarrow \Gamma(b, \nu)$$

Th. 28 X est une variable aléatoire suivant une loi gamma de paramètres b et ν .

X possède une espérance et une variance ;

$$E(X) = b\nu \quad \text{et} \quad V(X) = b^2\nu$$

Th. 29 • Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}, P) qui suivent respectivement une loi gamma de paramètres b et ν_1 , et b et ν_2 .

$X_1 + X_2$ suit une loi gamma de paramètres b et $\nu_1 + \nu_2$.

• Plus généralement X_1, X_2, \dots, X_n sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

$$\text{Si } \forall i \in [1, n], X_i \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_i) \quad \text{alors} \quad X_1 + X_2 + \dots + X_n \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n)$$

Cor. X_1, X_2, \dots, X_n sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}, P) suivant une loi exponentielle de paramètre λ .

$X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une loi gamma de paramètre $\frac{1}{\lambda}$ et n .

► 4. Lois normales.

Déf. 14 m est un réel et σ un réel strictement positif.

Une variable aléatoire X suit une **loi normale** de paramètres m et σ^2 si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

On écrit alors $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On parle encore de loi de **Laplace-Gauss** ou de loi **Gaussienne**.

★★★ ATTENTION

Avant 2004-2005, le deuxième paramètre d'une loi normale était son écart-type alors que maintenant c'est le carré de son écart-type (donc sa variance).

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ signifiait que X suit une loi normale d'espérance m et d'écart-type σ . Dans ces conditions nous écrirons aujourd'hui $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Donc attention aux anciens textes et surtout aux concepteurs qui ne lisent pas bien les nouveaux programmes.

Il n'y a aucune ambiguïté si l'on donne explicitement l'espérance et l'écart-type ou l'espérance et la variance de la loi normale que l'on considère.

De toute évidence le cas particulier $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, 1^2)$ se transformera en $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, 1)$.

Th. 30 Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres m et σ^2 .

X possède une espérance et une variance.

$$\boxed{E(X) = m} \quad \text{et} \quad \boxed{V(X) = \sigma^2}$$

Prop. 8 Soit X une variable aléatoire à densité. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

- X est centrée réduite ; autrement dit $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$.
- X admet pour densité la fonction φ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- La courbe représentative de φ admet l'axe $y'y$ pour axe de symétrie et admet deux points d'inflexion d'abscisses -1 et 1 .

Th. 31 Toute fonction affine non constante d'une variable aléatoire suivant une loi normale suit une loi normale. Précisons. a, b sont deux réels et X une variable aléatoire à densité. On suppose a non nul et on pose : $Y = aX + b$.

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \quad \text{donne} \quad Y = aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(am + b, (|a|\sigma)^2)}$$

Th. 32 m est un réel et σ est un réel strictement positif.

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \text{ équivaut à } \sigma X + m \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \text{ équivaut à } X^* = \frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

P Ce dernier résultat est essentiel car il permet de ramener l'étude d'une variable aléatoire suivant une loi normale à l'étude d'une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

Th. 33 Soit Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire X suivant une loi normale centrée réduite.

Pour tout réel x :

- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ ou $P(X \leq -x) = 1 - P(X \leq x)$.
- $P(X \leq x) = P(X \geq -x)$.
- $P(X \leq 0) = P(X \geq 0) = 1/2$.

Pour tout réel x positif :

- $P(|X| \leq x) = 2\Phi(x) - 1$.
- $P(|X| \geq x) = 2(1 - \Phi(x))$.

Th. 34 Soit Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. X est une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X .

On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Alors pour tout réel x :

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)$$

Th. 35 • Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires **indépendantes** sur (Ω, \mathcal{A}, P) qui suivent respectivement une loi normale de paramètres m_1 et σ_1^2 , et m_2 et σ_2^2 .

$X_1 + X_2$ suit une loi normale de paramètres $m_1 + m_2$ et $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

• Plus généralement soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n réels non nuls et X_1, X_2, \dots, X_n n variables aléatoires réelles **mutuellement indépendantes** sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

On suppose que pour tout élément i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, X_i suit une loi normale de paramètres m_i et σ_i^2 . Alors :

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \dots + \lambda_n m_n, \lambda_1^2 \sigma_1^2 + \lambda_2^2 \sigma_2^2 + \dots + \lambda_n^2 \sigma_n^2\right)$$

★ Ceci vaut encore si on suppose les réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ non tous nuls.

► **5. Les moments exigés par le programme à partir des concours 2005.**

- Espérance et variance des lois uniformes, exponentielles, gammas et normales.

► 6. Récapitulatif.

Nom de la loi	Notations	Valeurs		Une densité	$E(X)$	$V(X)$
Uniforme	$X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$	$[a, b]$	$a < b$	$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$	\mathbb{R}^+	$\lambda > 0$	$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gamma	$X \hookrightarrow \gamma(\nu)$	\mathbb{R}^+	$\nu > 0$	$f(t) = \begin{cases} \frac{t^{\nu-1} e^{-t}}{\Gamma(\nu)} & \text{si } t \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{si } t \in]-\infty, 0] \end{cases}$	ν	ν
Gamma	$X \hookrightarrow \Gamma(b, \nu)$	\mathbb{R}^+	$b > 0$ $\nu > 0$	$f(t) = \begin{cases} \frac{t^{\nu-1} e^{-\frac{t}{b}}}{b^\nu \Gamma(\nu)} & \text{si } t \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{si } t \in]-\infty, 0] \end{cases}$	$b\nu$	$b^2\nu$
Normale centrée réduite	$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$	\mathbb{R}		$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$	0	1
Normale	$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$	\mathbb{R}	$\sigma > 0$	$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2

VI SAVOIR FAIRE

- 1. Savoir montrer qu'une application est une densité de probabilité.
- 2. Savoir, si X est une variable aléatoire à densité, passer d'une densité de X à sa fonction de répartition et réciproquement.
- 3. Savoir montrer qu'une variable aléatoire est une variable aléatoire à densité et en trouver une densité.
- 4. Savoir montrer qu'une variable aléatoire à densité possède une espérance (resp. une variance) et savoir la calculer.
- 5. Si X est une variable aléatoire à densité et φ est une fonction numérique d'une variable réelle, savoir montrer que $\varphi \circ X$ est une variable aléatoire à densité et savoir en trouver une densité.
- 6. Si X est une variable aléatoire à densité et φ est une fonction numérique d'une variable réelle, savoir montrer que $\varphi \circ X$ possède une espérance et savoir la calculer.
- 7. Savoir trouver une densité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes à densité.
- 8. Savoir trouver une densité du produit ou du quotient de deux variables aléatoires indépendantes à densité.
- 9. Savoir reconnaître une densité ou la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité usuelle.
- 10. Savoir utiliser la parité d'une densité d'une variable aléatoire pour en calculer les moments.
- 11. Savoir utiliser les moments des variables aléatoires du programme pour calculer des intégrales.
- 12. Savoir utiliser les densités des lois normales pour calculer des intégrales du type $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2+bt+c)} dt$ ($a > 0$).

- 13. Savoir étudier $Y = [X]$ (partie entière) et $Z = X - [X]$ où X est une variable aléatoire à densité.
- 14. Savoir démontrer et utiliser les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

VII QUELQUES COMPLÉMENTS ET QUELQUES BONS COUPS POUR AMÉLIORER TA VARAD ATTITUDE

► 1. Produit de deux variables aléatoires à densité indépendantes prenant des valeurs positives.

P Soient X et Y deux variables aléatoires à densité indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}, P) qui prennent des valeurs dans \mathbb{R}^{+*} (ou \mathbb{R}^+).

Pour étudier le produit $Z = XY$ de ces deux variables on peut étudier successivement $\ln X$, $\ln Y$, $S = \ln X + \ln Y$ (en utilisant le théorème fondamental) et $Z = e^S$.

► 2. Quotient de deux variables aléatoires à densité.

P Soient X et Y deux variables aléatoires à densité. On suppose que Y prend ses valeurs dans \mathbb{R}^{+*} (ou \mathbb{R}^+).

L'étude de $\frac{X}{Y}$ peut se faire en remarquant que, si x est dans \mathbb{R} , $P\left(\frac{X}{Y} \leq x\right) = P(X - xY \leq 0)$ et en étudiant $X - xY = X + (-xY)$...

Si X prend également des valeurs positives, l'étude de $\frac{X}{Y}$ peut se faire en passant au log à condition d'avoir un peu d'indépendance ...

► 3. Quelques moments usuels.

Prop. 9 Soit X est une variable aléatoire suivant une loi gamma de paramètres b et ν et r est un élément de \mathbb{N} .
 X possède un moment d'ordre r qui vaut $b^r (r + \nu - 1)(r + \nu - 2) \cdots (\nu + 1)\nu$.

Prop. 10 Soit X est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

Pour tout élément r de \mathbb{N} , X possède un moment d'ordre r .

$$\forall k \in \mathbb{N}, m_{2k}(X) = E(X^{2k}) = \frac{(2k)!}{2^k k!} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, m_{2k+1}(X) = E(X^{2k+1}) = 0.$$

► 4. Quelques résultats classiques.

Prop. 11 λ est un réel strictement positif. X est une variable aléatoire réelle.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, $-\ln X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, $e^{-X} \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, $-\frac{1}{\lambda} \ln X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, $e^{-\lambda X} \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.

P Ceci peut être utile pour simuler une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle.

Prop. 12 X_1, X_2, \dots, X_n sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}, P) qui suivent une loi exponentielle de paramètre λ . Alors $\text{Min}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ suit une loi exponentielle de paramètre $n\lambda$.

Prop. 13 Si X suit une loi gamma de paramètres b et ν , pour tout réel λ strictement positif, λX suit une loi gamma de paramètres λb et ν

Prop. 14 Loi du khi-deux.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ alors $Y = X^2 \hookrightarrow \Gamma(2, \frac{1}{2})$.

Si X_1, X_2, \dots, X_n sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent une loi normale centrée réduite alors $T = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \hookrightarrow \Gamma(2, \frac{n}{2})$.

Prop. 15 b et ν sont deux réels strictement positifs. c est un réel (nécessairement positif). Si X est une variable aléatoire à densité admettant pour densité f définie par :

$$\forall t \in]-\infty, 0], f(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in]0, +\infty[, f(t) = ct^{\nu-1} e^{-\frac{t}{c}}$$

alors X suit une loi gamma de paramètres b et ν .

► **5. Caractérisation de la fonction de répartition d'une variable à densité.**

Th. 36 Soit F une application de \mathbb{R} dans $[0, 1]$ (ou dans \mathbb{R} ... voir les deux premiers points).

F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité si et seulement si :

- ▷ F est croissante sur \mathbb{R} .
- ▷ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
- ▷ F est continue sur \mathbb{R} .
- ▷ Il existe un ensemble fini éventuellement vide D tel que F soit de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} - D$.

► **6. Utilisation des densités dans le calcul d'intégrales.**

La loi normale centrée réduite donne : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$

Ce dernier résultat permet de justifier aisément l'existence et la valeur

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Dans le même ordre d'idée on peut par des changements de variable simples calculer des intégrales du type

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2+bt+c)} dt$ avec a strictement positif en utilisant une densité d'une loi normale.

Plus précisément si a est un réel strictement positif et si b et c sont deux réels, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2+bt+c)} dt$ existe et vaut :

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2-4ac}{4a}} \quad (\text{résultat qui n'est pas à apprendre mais à savoir retrouver.})$$

Dans le même ordre d'idée encore on peut à l'aide des lois gamma calculer des intégrales du type $\int_0^{+\infty} t^r e^{-at} dt$ avec a dans \mathbb{R}^{+*} et r dans \mathbb{N} .

► **7. Existence d'un moment d'ordre r .**

Prop. 16 Si X est une variable aléatoire à densité et si $X(\Omega)$ est borné, X possède un moment d'ordre r pour tout élément r de \mathbb{N} .

► **8. Calcul de l'espérance.**

Prop. 17 Soit X une variable aléatoire à densité
 X possède une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} tF'_X(t) dt$ existe. En cas d'existence $E(X)$ sera égale à cette dernière intégrale.

1. Ceci ne suppose pas que F_X soit dérivable sur \mathbb{R} .

2. Ce résultat est une évidence mais peut être intéressant pour calculer $E(X)$ car il se prête à une intégration par parties.

Prudence car il s'agit d'intégrales généralisées et $\lim_{t \rightarrow +\infty} tF_X(t) = +\infty$. On aura intérêt à primitiviser F'_X en $F_X - 1$.

► 9. Densité paire.

Prop. 18 X est une variable aléatoire à densité.

- Si X admet une densité paire X et $-X$ ont même loi et réciproquement.
- Si X admet une densité paire et une espérance alors cette espérance est nulle. Même chose pour un moment d'ordre $2r + 1$.

► 10. Quelques lois classiques.

Déf. 15 Loi Log-normale
 Une variable aléatoire X suit une loi Log-normale de paramètres m et σ^2 ($\sigma > 0$) si $X = e^Y$ où Y est une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres m et σ^2 .

Déf. 16 Loi de Cauchy
 Une variable aléatoire X suit une loi de Cauchy de paramètre a ($a > 0$) si X est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{a}{\pi(a^2 + t^2)}$$

On écrit alors $x \hookrightarrow \mathcal{C}(a)$.

Illustration. Si X est uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $Y = \tan X$ suit une loi de Cauchy de paramètre 1.

Déf. 17 Loi de Pareto. α et a sont deux réels strictement positifs. x_0 est un réel.
 Une variable aléatoire X suit une **loi de Pareto** de paramètres α , a et x_0 si X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in]-\infty, x_0 + a], f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]x_0 + a, +\infty[, f(x) = \frac{\alpha}{a} \left(\frac{a}{x - x_0} \right)^{\alpha+1}$$

Déf. 18 Loi Beta
 a et b sont deux réels strictements positifs. $B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$.

Une variable aléatoire X suit une loi Beta de paramètres a et b si X est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[, f(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in]0, 1[, f(t) = \frac{t^{a-1}(1-t)^{b-1}}{B(a, b)}$$

On écrit alors $X \hookrightarrow \beta(a, b)$.

Illustration. Si X est uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $Y = \sin^2 X$ suit une loi beta de paramètres $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

Déf. 19 Loi exponentielle bilatérale et de Laplace

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle bilatérale de paramètre a ($a > 0$) si X est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{a}{2} e^{-a|t|}$$

Si $a = 1$ on parle de loi de Laplace.

Déf. 20 Loi de Rayleight

Une variable aléatoire X suit une loi de Rayleight si X est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in]-\infty, 0[, f(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, +\infty[, f(t) = t e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Illustration. Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1/2)$, $Y = \sqrt{X}$ suit une loi de Rayleight.

VIII DES ERREURS À NE PAS FAIRE

★ Confondre fonction de répartition et densité.

★ F_X étant la fonction de répartition d'une variable aléatoire (à densité) X arriver à : $\forall x \in [a, +\infty[, F_X(x) = 0$.

X est une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition est la fonction F_X définie par :

$$\forall x \in]-\infty, 0[, F_X(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, +\infty[, F_X(x) = (1 - e^{-x})^3.$$

F_X est continue sur \mathbb{R} est de classe \mathcal{C}^1 au moins sur \mathbb{R}^* donc X est une variable aléatoire à densité. Jusqu'ici pas de problème.

★ $\forall x \in [0, +\infty[, F_X(x) = (1 - e^{-x})^3$ donc $\forall x \in [0, +\infty[, F'_X(x) = 3e^{-x}(1 - e^{-x})^2$.

Écrire $\forall x \in]0, +\infty[, F_X(x) = (1 - e^{-x})^3$ donc $\forall x \in]0, +\infty[, F'_X(x) = 3e^{-x}(1 - e^{-x})^2$.

★ Écrire des fonctions de répartitions ou densités usuelles fausses.

X suit la loi exponentielle de paramètre λ .

★ Soit f une densité de X . $\forall x \in]-\infty, 0[, f(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[, f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Écrire : posons : $\forall x \in]-\infty, 0[, f(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[, f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$; f est une densité de X .

★ Dire que si X est une variable aléatoire à densité et si φ est une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dont le domaine de définition contient $X(\Omega)$ alors $\varphi \circ X$ est une variable aléatoire à densité.

★ Dire que la somme de deux variables aléatoires à densité est une variable aléatoire à densité.