Exercice 1 ESCP 98 Pour tout élément x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2}{(1+x)^2}$ si x appartient à $[0,1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

P1

Q1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Q2. X est une variable aléatoire de densité f. Calculer $E(X)$.

Q3. On pose $Y = X + \dfrac{1}{X}$. t est un réel. Résoudre l'inéquation : $x \in \mathbb{R}$ et $x^2 - tx + 1 \leqslant 0$.

Etudier Y. Y admet-elle une espérance ?

Q1 f est continue et positive sur $]-\infty, 0[$, $[0,1]$ et $]1,+\infty[$ donc f est positive sur $\mathbb{R}$ et au moins continue sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$.

$\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$ existe et vaut 0, $\int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut 0, $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2}\,dt$ existe et vaut $\left[-\frac{2}{(1+t)}\right]_0^1 = -1 + 2 = 1$. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut 1.

ceci achève de prouver que <u>f est une densité de probabilité</u>.

Q2 $\int_{-\infty}^{0} t f(t)\,dt$ et $\int_{1}^{+\infty} t f(t)\,dt$ existent et valent 0.

$t \mapsto t f(t)$ étant continue sur $[0,1]$, $\int_0^1 t f(t)\,dt$ existe.

Ainsi $E(X)$ existe et vaut : $\int_0^1 t f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{2t}{(1+t)^2}\,dt = \int_0^1 \left[\frac{2(1+t)-2}{(1+t)^2}\right] dt = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t} - 2\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2}$

$E(X) = 2\left[\ln(1+t)\right]_0^1 + 2\left[\frac{1}{1+t}\right]_0^1 = 2\ln 2 + 2\left(\frac{1}{2} - 1\right) = 2\ln 2 - 1$. $\underline{E(X) = 2\ln 2 - 1}$.

Q3 Commençons par préciser l'ensemble des valeurs de Y. X prend ses valeurs dans $[0,1]$.

Posons $\forall x \in]0,1]$, $\varphi(x) = x + \frac{1}{x}$; $\forall x \in]0,1]$, $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \leqslant 0$

Ainsi <u>Y prend ses valeurs dans $[2,+\infty[$</u>.

Fixons t dans $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - tx + 1 = \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + 1 - \frac{t^2}{4} = \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 - \frac{t^2-4}{4}$.

1er cas.. $t^2 - 4 < 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - tx + 1 > 0$; l'inéquation proposée n'a pas de solution

2e cas.. $t^2 - 4 = 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - tx + 1 \geqslant 0$; l'inéquation proposée a une solution et une seule $\{\frac{t}{2}\}$

3e cas.. $t^2 - 4 > 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - tx + 1 \leqslant 0 \iff x \in \left[\frac{t}{2} - \frac{\sqrt{t^2-4}}{2}, \frac{t}{2} + \frac{\sqrt{t^2-4}}{2}\right]$. Notons que le 2e cas se coule dans le 3e cas !

$\forall t \in]-\infty, 2[$, $p(Y \leqslant t) = 0$ (Y prend ses valeurs dans $[2,+\infty[$).

Soit $t \in [2,+\infty[$. $p(Y \leqslant t) = p\left(X + \frac{1}{X} \leqslant t\right) \underset{\substack{\uparrow \\ X \text{ prend ses valeurs dans } [0,1]}}{=} p(X^2 + 1 \leqslant tX) = p(X^2 - tX + 1 \leqslant 0) = p\left(\frac{t}{2} - \frac{\sqrt{t^2-4}}{2} \leqslant X \leqslant \frac{t}{2} + \frac{\sqrt{t^2-4}}{2}\right)$

$$p(Y \leqslant t) = F_X\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}\right) - F_X\left(\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}\right).$$

$\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$ et $\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}$ sont les racines de $P = X^2 - tX + 1$ donc leur produit est 1 et leur somme est t $(t \geqslant 2)$

Ces deux racines sont donc positives. De plus $Q(1) = 1-t+1 = 2-t \leq 0$ donc 1 est entre ces deux racines. Ainsi $0 \leq \frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2} \leq 1 \leq \frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$.

Par conséquent $F_X\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}\right) = 1$ et $F_X\left(\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}\right) = \int_0^{\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}} \frac{2}{(1+x)^2}\,dx$

donc $p(Y \leq t) = 1 - \left[-\frac{2}{1+x}\right]_0^{\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}} = 1 + \frac{2}{1+\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}} - 2 = \frac{4}{2+t-\sqrt{t^2-4}} - 1$

$p(Y \leq t) = \frac{4\left[2+t+\sqrt{t^2-4}\right]}{(2+t)^2-(t^2-4)} - 1 = \frac{2+t+\sqrt{t^2-4}}{2+t} - 1 = \frac{\sqrt{t^2-4}}{t+2} = \sqrt{\frac{t-2}{t+2}}$.

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}$, $F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty, 2[\text{ ou } t \in]-\infty, 2] \\ \sqrt{\frac{t-2}{t+2}} & \text{si } t \in [2, +\infty[\end{cases}$

Notons que $t \mapsto \sqrt{\frac{t-2}{t+2}}$ est continue sur $[2,+\infty[$ et dérivable sur $]2,+\infty[$.

Ainsi F_Y est continue sur $]-\infty, 2]$ et sur $[2,+\infty[$ donc continue sur $\mathbb{R}$.

F_Y est dérivable sur $]-\infty, 2]$ et sur $]2,+\infty[$ donc dérivable sur $\mathbb{R} - \{2\}$

$\forall t \in]-\infty, 2[$, $F_Y'(t) = 0$ et $\forall t \in]2,+\infty[$, $F_Y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{t-2}{t+2}}} \frac{t+2-(t-2)}{(t+2)^2} = 2\sqrt{\frac{t+2}{t-2}} \frac{1}{(t+2)^2}$

Ainsi F_Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{2\}$

donc Y est une variable aléatoire à densité.

Posons $\forall t \in]-\infty, 2]$, $f_Y(t) = 0$ et $\forall t \in]2,+\infty[$, $f_Y(t) = \frac{2}{(t+2)\sqrt{t^2-4}}$;

f_Y est une densité de Y.

$t f_Y(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{2t}{t \times \sqrt{t^2}} = \frac{2}{t}$, $\forall t \in [3,+\infty[$, $\frac{2}{t} > 0$ et $\int_3^{+\infty} \frac{2}{t}\,dt$ diverge

Ainsi $\int_3^{+\infty} t f_Y(t)\,dt$ diverge et $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\,dt$ aussi. $E(Y)$ n'existe pas.

Exercice 2 ($H96$) Un baton de longueur 1 et d'extrémités A et B est cassé en deux au hasard. La longeur L du morceau d'extrémité A suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

Q1. Etudier la variable aléatoire X égale à la longueur du plus petit morceau et calculer son espérance.

Q2. Même chose avec la longeur du plus gand morceau.

Q3. Soit Z la variable aléatoire égale au rapport de la longueur du plus petit morceau à celle du plus grand. Déterminer la loi de Z et son espérance.

Pour mon cher S.D. que je trouve un peu las en ce moment (?)

Q1 $X = \min(L, 1-L)$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$F_X(x) = p(X \leq x) = 0$ si $x \in]-\infty, 0[$ et $F_X(x) = p(X \leq x) = 1$ si $x \in [\frac{1}{2}, +\infty[$ car $X = \min(L, 1-L)$ prend ses valeurs dans $[0, 1/2]$;

Supposons alors $x \in [0, \frac{1}{2}[$.

$F_X(x) = p(X \leq x) = 1 - p(X > x) = 1 - p(\{L > x\} \cap \{1-L > x\}) = 1 - p(x < L < 1-x)$

$F_X(x) = 1 - (F_L(1-x) - F_L(x)) = 1 - (1 - x - x) = 2x$.

$1-x \in]\frac{1}{2}, 1]$ et $x \in [0, \frac{1}{2}[$... et $L \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$

Donc $\forall x \in [0, \frac{1}{2}[$, $F_X(x) = 2x = \dfrac{x-0}{\frac{1}{2}-0}$.

Résumons : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x-0}{\frac{1}{2}-0} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\text{ ou } [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$. Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, \frac{1}{2}])$.

Q2 un raisonnement "analogue" donne $Y = \max(L, 1-L) \hookrightarrow \mathcal{U}([\frac{1}{2}, 1])$.

Q3 $Z = \dfrac{X}{Y} = \dfrac{X}{1-X}$. Posons $\forall t \in [0, 1/2]$, $\varphi(t) = \dfrac{t}{1-t} = -1 + \dfrac{1}{1-t}$. φ est continue et croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ donc $\varphi([0, \frac{1}{2}]) = [\varphi(0), \varphi(\frac{1}{2})] = [0, 1]$.

Ainsi Z prend ses valeurs dans $[0, 1]$.

Par conséquent $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_Z(x) = 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $F_Z(x) = 1$.

Soit $x \in [0, 1[$.

$1-X$ prend ses valeurs dans $[\frac{1}{2}, 1]$ $\qquad$ $x \in [0,1[$ donne $\dfrac{x}{1+x} \in [0, \frac{1}{2}[$

$F_Z(x) = p(Z \leq x) = p\left(\dfrac{X}{1-X} \leq x\right) = p(X \leq x(1-X)) = p\left(X \leq \dfrac{x}{1+x}\right) = F_X\left(\dfrac{x}{1+x}\right) = 2 \times \dfrac{x}{1+x}$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{2x}{1+x} & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty \end{cases}$ ou $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \dfrac{2x}{1+x} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$.

Ainsi F_Z est dérivable sur $]-\infty, 0]$, $[0,1]$ et $[1, +\infty[$.

F_Z est donc continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point de $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

$\forall x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, $F'_Z(x) = 0$ et $\forall x \in]0, 1[$, $F'_Z(x) = \dfrac{2}{(1+x)^2}$. F_Z est donc C^1 sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

Z est alors une variable aléatoire à densité admettant pour densité f_Z définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,1] \\ \dfrac{2}{\ldots} & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$

Exercice 3 .. X est une variable aléatoire à densité f continue et paire.
On suppose que $Y = X^2 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Trouver f.

Le cours indique que si l'on pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})) \end{cases}$ on obtient une densité de $X^2 = Y$.

Remarquons que : $\rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x})$ car f est paire.

$\rightarrow$ g est continue sur $\mathbb{R}^*$ (f est continue sur $\mathbb{R}$).

Ceci permet de dire que la fonction de répartition F_Y de Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F'_Y(x) = g(x)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x})$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F_Y(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x})$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(\sqrt{x}) = \lambda \sqrt{x}\, e^{-\lambda x}$.

Ce qui peut encore s'écrire $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \lambda x e^{-\lambda x^2}$.

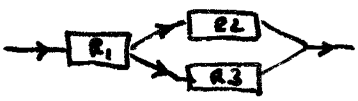
f est continue en 0 ; en particulier $f(0) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} (\lambda x e^{-\lambda x^2}) = 0$; $f(0) = 0$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \lambda x e^{-\lambda x^2}$. Ou encore : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \lambda |x| e^{-\lambda x^2}$!

f est paire donc $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $f(x) = f(-x) \underset{\underset{-x \geq 0}{\uparrow}}{=} \lambda(-x) e^{-\lambda x^2} = \lambda |x| e^{-\lambda x^2}$

Ainsi $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda |x| e^{-\lambda x^2}.}}$

Exercice 4.. Un circuit est composé de trois résistances montées de la manière suivante



La durée de vie de la résistance R_i est une var X_i suivant une loi exponentielle de paramètre λ. X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes.

Q1.. T est la var égale à la durée de vie du système. Prouver que T est une var ad, en trouver une densité.

Q2.. Déterminer $E(T)$.

Q1.. Remarquons que le système cesse de fonctionner si R_1 cesse de fonctionner $\boxed{\text{OU}}$ si R_2 et R_3 cessent de fonctionner (... ces deux événements n'étant pas disjoints). $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.

• $\forall x \in \mathbb{R}_-,\ F_T(x) = 0$

ici la réunion est disjointe

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F_T(x) = p(T \leq x) = p\left(\{X_1 \leq x\} \cup \left(\{X_1 > x\} \cap \{X_2 \leq x\} \cap \{X_3 \leq x\}\right)\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F_T(x) = p(X_1 \leq x) + p(X_1 > x)p(X_2 \leq x)p(X_3 \leq x)$ (incompatibilité et indépendance)

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F_T(x) = (1 - e^{-\lambda x}) + e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^2 = 1 - e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x} - 2e^{-2\lambda x} + e^{-3\lambda x} = 1 - 2e^{-2\lambda x} + e^{-3\lambda x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_-,\ F_T(x) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F_T(x) = 1 - 2e^{-2\lambda x} + e^{-3\lambda x}$

F_T est donc continue sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$. F_T est par conséquent continue en tout point de $\mathbb{R}$. F_T est dérivable sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$ donc au moins dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*_-,\ F'_T(x) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*_+,\ F'_T(x) = +4\lambda e^{-2\lambda x} - 3\lambda e^{-3\lambda x}$; F'_T est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

F_T est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$; T est donc une var à densité.

Posons $\forall t \in]-\infty, 0[,\ g(t) = 0$ et $\forall t \in [0, +\infty[,\ g(t) = 4\lambda e^{-2\lambda t} - 3\lambda e^{-3\lambda t}$; g est une densité de T.

Q2.. Rappel.. Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$ alors $E(X) = \int_0^{+\infty} t\alpha e^{-\alpha t}\,dt = \frac{1}{\alpha}$

Par conséquent : $\int_0^{+\infty} 2\lambda t e^{-2\lambda t}\,dt$ existe et vaut $\frac{1}{2\lambda}$ et $\int_0^{+\infty} 3\lambda t e^{-3\lambda t}\,dt$ existe et vaut $\frac{1}{3\lambda}$

ceci prouve alors que : $\int_0^{+\infty} t(4\lambda e^{-2\lambda t} - 3\lambda e^{-3\lambda t})\,dt$ existe et vaut $2 \times \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{3\lambda} = \frac{2}{3\lambda}$

Donc $\int_0^{+\infty} t g(t)\,dt$ existe et vaut : $\frac{2}{3\lambda}$; comme $\int_{-\infty}^{0} t g(t)\,dt$ existe et vaut 0 :

$\int_{-\infty}^{+\infty} t g(t)\,dt$ existe et vaut $\frac{2}{3\lambda}$

Finalement T possède une espérance qui vaut $\frac{2}{3\lambda}$.

Exercice 5 -- ESCP 98.. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On suppose que : $\forall k \in [\![1,n]\!], X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

Q1.. Etudier $Y_1 = -\ln X_1$ Q2.. Etudier $Z_n = X_1 X_2 \cdots X_n$.

Q1.. Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_{Y_1}(x) = P(Y_1 \leq x) = P(-\ln X_1 \leq x) = P(\ln X_1 \geqslant -x) = P(X_1 \geqslant e^{-x}) = 1 - P(X < e^{-x})$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Y_1}(x) = 1 - F_X(e^{-x})$. Si $x \in]-\infty, 0[$, $e^{-x} > 1$ donc $F_X(e^{-x}) = 1$ et $F_Y(x) = 0$.

Si $x \in [0, +\infty[$, $e^{-x} \in]0,1]$ et $F_{Y_1}(x) = 1 - F_X(e^{-x}) = 1 - e^{-x}$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$. Ceci suffit pour dire que $\underline{Y_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)}$.

Q2) Posons $\forall k \in [\![2,n]\!]$, $Y_k = -\ln X_k$ ($Y_1 = -\ln X_1$!!)

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes donc $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ aussi.

Or $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $Y_k \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, le cours montre alors que $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \hookrightarrow \gamma(1;n)$ donc $W = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ est une variable aléatoire à densité de densité f_W définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{e^{-x} x^{n-1}}{1^n \,\Gamma(n)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$-W$ est alors une variable aléatoire à densité de densité $\hat{f}_W : x \mapsto \frac{1}{|-1|} f_W\left(\frac{x-0}{-1}\right)$ ou $\hat{f}_W : x \mapsto f_W(-x)$.

Donc $Z_n = e^{-W}$ est une variable aléatoire à densité de densité f_{Z_n} définie par :

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $f_{Z_n}(x) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $f_{Z_n}(x) = \frac{1}{x} \hat{f}_W(\ln x) = \frac{1}{x} f_W(-\ln x)$

Si $x \in [1, +\infty[$, $f_{Z_n}(x) = \frac{1}{x} f_W(-\ln x) = 0$ car $-\ln x \leq 0$

Si $x \in]0,1[$, $f_{Z_n}(x) = \frac{1}{x} f_W(-\ln x) = \frac{1}{x} \dfrac{e^{-(-\ln x)}(-\ln x)^{n-1}}{1^n \,\Gamma(n)} = \dfrac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!} = \dfrac{|\ln x|^{n-1}}{(n-1)!}$.

Ainsi Z_n est une variable aléatoire de densité f_{Z_n} définie par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \; f_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\\ \dfrac{|\ln x|^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x \in]0,1[. \end{cases}}$$

Normal, non ? ... $E(X_i) = \dots$

Exercice 6.– X_1 et X_2 sont deux v.a. à densité indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

On suppose que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$

Montrer que $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_1 + m_2, \left(\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2\right)$ (on pourra commencer par le cas $m_1 = m_2 = 0$).

1er Cas.– $m_1 = m_2 = 0$. Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-t^2/2\sigma_1^2}$ et $f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-t^2/2\sigma_2^2}$

f_1 (resp. f_2) est une densité de X_1 (resp. X_2) bornée sur $\mathbb{R}$. Ainsi $X_1 + X_2$ est une variable aléatoire à densité.

Posons alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(x-t)\,dt$. h est alors une densité de $X_1 + X_2$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ ... fixé.

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-t)^2}{2\sigma_2^2}}\,dt = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u(t)}{2}}\,dt \text{ avec}$$

$u : t \mapsto \frac{t^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x-t)^2}{\sigma_2^2}$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$u(t) = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[t^2\sigma_2^2 + \sigma_1^2(x-t)^2\right] = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2 - 2xt\sigma_1^2 + x^2\sigma_1^2\right]$$

$$u(t) = \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(t^2 - 2t\,\frac{x\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} + \frac{x^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$$

$$u(t) = \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[\left(t - \frac{x\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2 + \underbrace{\frac{x^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} - \frac{x^2\sigma_1^4}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}}\right]$$

$$= \frac{x^2\sigma_1^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1^2\right] = \frac{x^2\sigma_1^2\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}.$$

$$u(t) = \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(t - \frac{x\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2 + \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2} \times \frac{x^2\sigma_1^2\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}$$

$$u(t) = \left(\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}}\left(t - \frac{x\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)\right)^2 + \frac{x^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$; revenons alors à h.

$$h(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u(t)}{2}}\,dt = \frac{1}{\ldots} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}}\left(t - \frac{x\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)\right)^2} \times e^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\,dt$$

$$h(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}}\left(t-\frac{x\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)\right)^2} dt$$

Posons $u = \sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}}\left(t - \frac{x\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$; $du = \sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}}\, dt$; $dt = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\, du$

$$h(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\, du$$

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\, du}_{=\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} e^{-\frac{x^2}{2(\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})^2}}.$$

Et par conséquent $X_1+X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, (\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})^2)$

<u>génécas..</u>

Revenons au cas général.

$X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ et X_1 et X_2 sont indépendantes.

donc $^*X_1 - m_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ et $^*X_2 - m_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$ et $X_1 - m_1$ et $X_2 - m_2$ sont indépendantes.

D'après ce qui précède : $X_1 + X_2 - (m_1+m_2) = X_1 - m_1 + X_2 - m_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, (\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})^2)$.

Par conséquent : $^*X_1+X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1+m_2, (\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})^2)$.

* si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma)$, pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, $Y = aX+b \hookrightarrow \mathcal{N}(am+b, |a|\sigma)$ ...

<u>Remarque</u>.. Par récurrence on montre très simplement que si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont n var sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ mutuellement indépendantes :

$$\left(\forall i \in [\![1,n]\!],\ X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)\right) \Rightarrow X_1+X_2+\dots+X_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_1+m_2+\dots+m_n, (\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\dots+\sigma_n^2})^2\right)$$

Exercice 7 α est réel. $\forall x \in]-\infty, 0[$, $f(x) = \alpha 2^{x}$ et $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \alpha 2^{-x}$

Q1. Trouver α pour que f soit une densité de probabilité.

Q2. X est une variable aléatoire de densité f. Trouver la fonction de répartition de X et calculer $E(X)$.

Q3. x est un réel. Calculer $p(X < x / X \geqslant -1)$.

Q4. Etudier $Y = 2^{X/2}$.

(Q1) Notons déjà que f est positive sur $\mathbb{R}$ si et seulement si α est positif.

f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ donc au moins continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Observons également que f est paire sur $\mathbb{R}$! $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha\, 2^{-|x|})$.

$\forall A \in \mathbb{R}^*_+$, $\int_0^A f(t)\,dt = \alpha \int_0^A e^{-t\ln 2}\,dt = \frac{\alpha}{\ln 2}\left[1 - e^{-A\ln 2}\right]$; $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A f(t)\,dt = \frac{\alpha}{\ln 2}$.

$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut $\frac{\alpha}{\ln 2}$.

Par parité $\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt$ existe et vaut $\frac{\alpha}{\ln 2}$. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut $\frac{2\alpha}{\ln 2}$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$ si et seulement si $\frac{2\alpha}{\ln 2} = 1$; c'est à dire, si et seulement si $\alpha = \frac{\ln 2}{2}$

$\alpha = \frac{\ln 2}{2} = \ln\sqrt{2}$ est une condition nécessaire pour que f soit une densité de probabilité.

Montrons qu'elle est suffisante. Posons $\alpha = \frac{\ln 2}{2}$.

→ f est positive sur $\mathbb{R}$ car $\alpha \in \mathbb{R}_+$

→ f est continue sur $\mathbb{R}^*$

→ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut 1 car $\alpha = \frac{\ln 2}{2}$.

Finalement <u>f est une densité de probabilité si et seulement si $\alpha = \frac{\ln 2}{2}$</u>.

(Q2) Notons F la fonction de répartition de X.

Soit $x \in]-\infty, 0]$. $F(x) = \lim_{A \to -\infty}\left[\int_A^x f(t)\,dt\right] = \lim_{A \to -\infty}\left(\frac{\ln 2}{2}\int_A^x e^{t\ln 2}\,dt\right) = \lim_{A \to -\infty}\left(\frac{\ln 2}{2}\left[\frac{e^{t\ln 2}}{\ln 2}\right]_A^x\right)$

$F(x) = \lim_{A \to -\infty}\left(\frac{1}{2}\left(e^{x\ln 2} - e^{A\ln 2}\right)\right) = \frac{1}{2} e^{x\ln 2} = \frac{1}{2} 2^x = 2^{x-1}$

Soit $x \in]0, +\infty[$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \underset{\text{parité}}{=} \int_{-x}^{+\infty} f(t)\,dt = p(X \geqslant -x) = 1 - F_X(-x) = 1 - \frac{1}{2} e^{-x\ln 2}$

$= 1 - 2^{-1} \times 2^{-x}$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F(x)=\begin{cases} 2^{x-1} & \text{si } x\in]-\infty,0] \\ 1-2^{-x-1} & \text{si } x\in[0,+\infty[\end{cases}.$$

Si $E(X)$ existe, $E(X)=0$ car $t\mapsto tf(t)$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

Montrons l'existence de $E(X)$. Il suffit de prouver la convergence de $\int_0^{+\infty} t\frac{\ln 2}{2}e^{-t\ln 2}\,dt$ ou la convergence de $\int_0^{+\infty} te^{-t\ln 2}\,dt$. $t\mapsto te^{-t\ln 2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et

$\lim\limits_{t\to+\infty}\left(t^2(te^{-t\ln 2})\right)=0$; $\exists A\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall t\in[A,+\infty[,\ 0\leq t^2(te^{-t\ln 2})\leq 1$.

$\forall t\in[A,+\infty[,\ 0\leq te^{-t\ln 2}\leq \frac{1}{t^2}$. La positivité de $t\mapsto te^{-t\ln 2}$ sur $\mathbb{R}_+$ et la convergence de $\int_A^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt$ donnent la convergence de $\int_A^{+\infty} te^{-t\ln 2}\,dt$ donc de $\int_0^{+\infty} te^{-t\ln 2}\,dt$.

Ainsi <u>$E(X)$ existe et vaut 0</u>.

(Q3) Soit $x\in\mathbb{R}$. $p(X<x\,/\,X\geq -1)=\dfrac{p(\{X<x\}\cap\{X\geq -1\})}{p(X\geq -1)}$.

Si $x\in]-\infty,-1[$, $p(X<x\,/\,X\geq-1)=0$

Soit $x\in[-1,+\infty[$, $p(X<x\,/\,X\geq -1)=\dfrac{p(-1\leq X<x)}{p(X\geq -1)}=\dfrac{F(x)-F(-1)}{1-F(-1)}=\dfrac{F(x)-2^{-2}}{1-2^{-2}}$.

$$p(X<x\,/\,X\geq -1)=\begin{cases}\dfrac{2^{x-1}-2^{-2}}{1-2^{-2}} & \text{si } x\in[-1,0]\\[2mm] \dfrac{1-2^{-x-1}-2^{-2}}{1-2^{-2}} & \text{si } x\in[0,+\infty[\end{cases}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ p(X<x\,/\,X\geq -1)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in]-\infty,-1[\\[2mm] \dfrac{2^{x+1}-1}{3} & \text{si } x\in[-1,0]\\[2mm] \dfrac{3-2^{-x+1}}{3} & \text{si } x\in[0,+\infty[.\end{cases}$$

(94) Notons F_Y la fonction de répartition de $Y=2^{X/2}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$. $F_Y(x)=p(Y\le x)=p(2^{X/2}\le x)=p(e^{\frac{X}{2}\ln 2}\le x)$

1er cas.. $x\in]-\infty,0]$. $F_Y(x)=0$

2e cas.. $x\in]0,+\infty[$. $F_Y(x)=p(\frac{X}{2}\ln 2\le \ln x)=p(X\le \frac{2\ln x}{\ln 2})=F(\frac{2\ln x}{\ln 2})$

- $x\in]0,1[$. $F_Y(x)=2^{\frac{2\ln x}{\ln 2}-1}=e^{(\frac{2\ln x}{\ln 2}-1)\ln 2}=e^{2\ln x-\ln 2}=e^{\ln\frac{x^2}{2}}=\frac{x^2}{2}$.
- $x\in[1,+\infty[$, $F_Y(x)=1-2^{-\frac{2\ln x}{\ln 2}-1}=1-e^{-[\frac{2\ln x}{\ln 2}+1]\ln 2}=1-e^{-(\ln x^2+\ln 2)}=1-\frac{1}{2x^2}$

Ainsi $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_Y(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in]-\infty,0]\\ \frac{x^2}{2} & \text{si } x\in]0,1[\quad \underline{\underline{\text{ou}}}\ x\in[0,1]\\ 1-\frac{1}{2x^2} & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}$

F_Y est alors continue et dérivable sur $]-\infty,0]$, $[0,1]$ et $[1,+\infty[$.

F_Y est alors continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable au moins sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$.

$\forall x\in]-\infty,0[$, $F_Y'(x)=0$; $\forall x\in]0,1[$, $F_Y'(x)=x$ et $\forall x\in]1,+\infty[$, $F_Y'(x)=\frac{1}{x^3}$

F_Y' est continue sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$.

F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$.

Y est une alors une variable aléatoire à densité.

Posons $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in]-\infty,0[\\ x & \text{si } x\in[0,1[\\ \frac{1}{x^3} & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}$; g est une densité de Y.

<u>Remarque</u>.. <u>g est continue sur $\mathbb{R}$ donc F_Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.</u>

Exercice 8 Q1. $\forall x \in]-\infty, 1[, f(x) = 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[, f(x) = 1/x^2$

Montrer que f est une densité de probabilité.

X est une variable aléatoire de densité f. Etudier l'existence de $E(X)$.

Q2. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes de densité f.

Etudier $U = \text{Min}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $W = \text{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Etudier l'existence de $E(U)$, $E(W)$, $V(U)$ et $V(W)$.

Q1 f est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}-\{1\}$.

$\int_{-\infty}^{1} f(t)\,dt$ existe et vaut 0.

f est continue sur $[1,+\infty[$ et $\lim_{A\to+\infty}\left(\int_1^A f(t)\,dt\right) = \lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{t}\right]_1^A = 1$; $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut 1. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut 1.

Ceci achève de prouver que f est une densité de probabilité.

$x \mapsto x f(x)$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$. $\forall x \in [1,+\infty[$, $x f(x) = \frac{1}{x}$; ainsi $\int_1^{+\infty} t f(t)\,dt$ est divergente ; $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ également. X n'a pas d'espérance.

Q2 Soit $x \in \mathbb{R}$. $p(U \leq x) = 1 - p(U > x) = 1 - p((X_1 > x) \cap \cdots \cap (X_n > x))$. Par indépendance il vient :

$p(U \leq x) = 1 - p(X_1 > x) \cdots p(X_n > x) = 1 - (p(X > x))^n = 1 - (1 - p(X \leq x))^n$.

$p(U \leq x) = 1 - (1 - F(x))^n$ où F est la fonction de répartition de X.

Notons F_U la fonction de répartition de U. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_U(x) = 1 - (1 - F(x))^n$.

F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}-\{1\}$ donc F_U est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}-\{1\}$. U est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $F_U'(x) = -n(-F'(x))(1-F(x))^{n-1} = n f(x)(1-F(x))^{n-1}$.

$\forall x \in]-\infty, 1[$, $F(x) = 0$. $\forall x \in [1,+\infty[$, $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = n f(x)(1-F(x))^{n-1}$. g est une densité de U.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ \dfrac{n}{x^{n+1}} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

$\int_{-\infty}^{1} t g(t) dt$ existe et vaut 0 ; ainsi $E(U)$ existe si et seulement si $\int_1^{+\infty} t g(t) dt$ converge ; autrement dit si $\int_1^{+\infty} \frac{n}{t^n} dt$ converge.

Ainsi $E(U)$ existe si et seulement si $n > 1$.

$E(U) = \int_1^{+\infty} t g(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{n}{t^n} dt = \lim\limits_{A \to +\infty} \left[-\frac{n}{n-1} t^{-n+1} \right]_1^A = \frac{n}{n-1}$.

$\forall n \in [\![2, +\infty [\![, \; E(U) = \frac{n}{n-1}$.

De la même manière $E(U^2)$ existe si et seulement si $\int_1^{+\infty} t^2 g(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{n}{t^{n-1}} dt$ existe.
$E(U^2)$ existe si et seulement si $n \geqslant 3$.

Alors $V(U)$ existe si et seulement si $n \geqslant 3$.

$\forall n \in [\![3, +\infty [\![, \; V(U) = E(U^2) - (E(U))^2 = \int_0^{+\infty} \frac{n}{t^{n-1}} dt - \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 = \lim\limits_{A \to +\infty} \left[\frac{-n}{n-2} t^{-n+2} \right]_1^A - \frac{n^2}{(n-1)^2}$.

$\forall n \in [\![3, +\infty [\![, \; V(U) = \frac{n}{n-2} - \frac{n^2}{(n-1)^2} = \frac{n}{(n-2)(n-1)^2}$. $\forall n \in [\![3, +\infty [\![, \; V(U) = \frac{n}{(n-2)(n-1)^2}$.

Étudions $W = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$F_W(x) = p(\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant x) = p(\{X_1 \leqslant x\} \cap \dots \cap \{X_n \leqslant x\}) \overset{\text{par indépendance}}{=} p(X_1 \leqslant x) \dots p(X_n \leqslant x) = (p(X \leqslant x))^n = (F(x))^n$.
F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{1\}$ donc F_W également. Alors W est une var ad.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, \; F'_W(x) = n F'(x) (F(x))^{n-1} = n f(x) (F(x))^{n-1}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}, \; h(x) = n f(x) (F(x))^{n-1}$. h est une densité de W.

$\forall x \in]-\infty, +1[, \; h(x) = 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[, \; h(x) = \frac{n}{x^2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{n-1}$.

$x h(x) \underset{+\infty}{\sim} x \frac{n}{x^2} = \frac{n}{x}$, $x \mapsto x h(x)$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$, $\int_1^{+\infty} \frac{n}{x}$ diverge.

Ainsi $\int_1^{+\infty} t h(t) dt$ diverge.

Alors W n'a pas d'espérance encore moins de variance.

Exercice 9 **Partie entière d'une variable aléatoire à densité.**

Q1. X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, p)$ qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

a) Etudier la variable aléatoire Y égale à la partie entière de X ($Y = [X]$).

b) Etudier $Z = X - Y = X - [X]$.

Q2. Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, X_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, p)$ qui suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{n}$.

Montrer que la suite de terme général $X_n - [X_n]$ converge en loi.

Q1 a) X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Ainsi $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $p(Y=k) = p([X]=k) = p(k \leq X < k+1) = \int_k^{k+1} (\lambda e^{-\lambda t})\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_k^{k+1}$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $p(Y=k) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} = (1-e^{-\lambda})\, e^{-\lambda k}$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $p(Y=k) = (1-e^{-\lambda})(e^{-\lambda})^k$.

__Remarque__. $Y+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1-e^{-\lambda})$. En particulier $E(Y) = \frac{1}{1-e^{-\lambda}} - 1 = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} = \frac{1}{e^{\lambda}-1}$.

b) $Z(\Omega) = [0,1[$. Notons F_Z la fonction de répartition de Z.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_Z(x) = 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $F_Z(x) = 1$.

Soit $x \in [0,1[$. $(\{Y=k\})_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet (ou quasi-complet) d'événements,

donc $F_Z(x) = p(Z \leq x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(\{X-Y \leq x\} \cap \{Y=k\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(\underbrace{\{X \leq x+k\} \cap \{k \leq X < k+1\}}_{\{k \leq X \leq x+k\} \text{ car } x \in [0,1[})$.

$F_Z(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(k \leq X \leq x+k) = \sum_{k=0}^{+\infty} (F_X(x+k) - F_X(k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - e^{-\lambda(x+k)} - 1 + e^{-\lambda k})$

$F_Z(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-\lambda})^k (1 - e^{-\lambda x}) = (1-e^{-\lambda x}) \frac{1}{1-e^{-\lambda}} = \frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\text{ ou }]-\infty, 0] \\ \frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} & \text{si } x \in [0,1[\text{ ou } [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

F_Z est alors continue et dérivable sur $]-\infty,0]$, $[0,1]$ et $[1,+\infty[$ donc F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et au moins dérivable sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$.

$\forall x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, $F_Z'(x) = 0$ et $\forall x \in]0,1[$, $F_Z'(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}}$.

F_Z est alors continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$.

Ainsi Z est une variable aléatoire à densité.

Pour $\forall x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$, $g(x)=0$ et $\forall x \in [0,1]$, $g(x) = \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}}$;

g est une densité de $\mathbb{R}$.

Q2) Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n la fonction de répartition de $Z_n = X_n - [X_n]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0[\\ \dfrac{1-e^{-x/n}}{1-e^{-1/n}} & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}$

Soit $x \in [0,1[$. $\dfrac{1-e^{-x/n}}{1-e^{-1/n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x/n}{1/n} = x$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0[\\ x & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}$.

$(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 10 On tire un nombre au hasard dans l'intervalle $[0,1]$ et on recommence jusqu'à ce que la somme des résultats obtenus soit strictement supérieure à 1. X est la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués. Pour tout élément i de $\mathbb{N}^*$, U_i est la variable aléatoire égale au résultat du $i^{\text{ème}}$ tirage.

Q1. Ecrire une fonction en TP4 qui simule cette expérience.

Q2. Faire des hypothèses raisonnables sur les U_i.

Q3. Trouver la loi de $U_1 + U_2$.

Q4. Montrer que, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ est une variable aléatoire à densité et qu'il existe une densité f_n de cette variable vérifiant :

$$\forall x \in]-\infty, 0[,\ f_n(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Q5. Déterminer, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $p(X > n)$. En déduire la loi de X, son espérance et sa variance.

```
program essai;

var i,moy,p:integer;

function compte :integer;
var n:integer; s,t:real;

begin
n:=0;s:=0;
repeat
n:=n+1;s:=s+random;
until s>1;
compte:=n;

end;


begin
randomize;

moy:=0;
write('Donner le nombre p de simulation. p=');readln(p);
for i:=1 to p do
moy:=moy+compte;


writeln('La moyenne arithmétique de ',p,' simulation est : ',moy/p:4:2);
writeln('Pour mémoire l''espérance est : ', exp(1))

end.
```

```
Donner le nombre p de simulation. p=10000
La moyenne arithmétique de 10000 simulation est : 2.72
Pour mémoire l'espérance est :  2.7182818285E+00

Donner le nombre p de simulation. p=10
La moyenne arithmétique de 10 simulation est : 2.50
Pour mémoire l'espérance est :  2.7182818285E+00

Donner le nombre p de simulation. p=100
La moyenne arithmétique de 100 simulation est : 2.72
Pour mémoire l'espérance est :  2.7182818285E+00
```

(Q2) On suppose les variables aléatoires U_i mutuellement indépendantes.

(Q3) Pour $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\\ 1 \text{ si } t \in [0,1] \end{cases}$. Pour tout i dans $\mathbb{N}^*$,

f est une densité de U_i.

U_1 et U_2 sont indépendantes donc $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(x-t)\,dt$ est une densité de $U_1 + U_2$.

$$\forall x \in [0,1],\ h(x) = \int_0^1 f(x-t)\,dt \underset{u=x-t}{=} \int_x^{x-1} f(u)(-du) = \int_{x-1}^{x} f(u)\,du.$$

Alors $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$, $h(x) = 0$ (si $x \in]-\infty, 0[$, $[x-1, x] \subset]-\infty, 0[$ et si $x \in]2, +\infty[$, $[x-1, x] \subset]1, +\infty[$).

Soit $x \in [0, 1[$; $x - 1 \in [-1, 0[$. $h(x) = \int_{x-1}^{x} f(u)\,du = \int_0^x 1\,du = x$.

Soit $x \in [1, 2]$; $x - 1 \in [0, 1]$. $h(x) = \int_{x-1}^{x} f(u)\,du = \int_{x-1}^{1} 1\,du = 1 - (x-1) = 2 - x$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[\text{ ou } x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[\\ x \text{ si } x \in [0, 1[\text{ ou } x \in [0, 1] \\ 2 - x \text{ si } x \in [1, 2] \end{cases}$

(Q4) → Montrons la propriété par récurrence.

→ La propriété est vraie pour $n = 1$ (et $n = 2$)

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$U_1, U_2, \dots, U_n, U_{n+1}$ sont mutuellement indépendantes donc $U_1 + \dots + U_n$ et U_{n+1} sont indépendantes.

Soit f_n une densité de $U_1 + U_2 + \dots + U_n$ telle que : $\forall x \in]-\infty, 0[$, $f_n(x) = 0$ et $\forall x \in [0, 1]$, $f_n(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$.

L'indépendance de $U_1 + \dots + U_n$ et de U_{n+1} permet de dire que $f_{n+1} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x-t) f(t)\,dt$ est une densité de $U_1 + U_2 + \dots + U_n + U_{n+1}$.

⚠

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \int_0^1 f_n(x-t)\,dt \underset{u=x-t}{=} \int_{x-1}^{x} f_n(u)\,du$$

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $f_{n+1}(x) = \int^{x} f_n(u)\,du = 0$.

$\forall x \in [0,1]$, $f_{n+1}(x) = \int_{x-1}^{x} f_n(u)\,du = \int_0^x \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\,du = \left[\frac{u^n}{n!}\right]_0^x = \frac{x^n}{n!}$

Ceci achève la récurrence !

Q5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $p(X>n) = p(U_1+U_2+\dots+U_n \leq 1) = \int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = \frac{1}{n!}$.

$p(X>0) = 1 = \frac{1}{0!}$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(X>n) = \frac{1}{n!}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p(X=n) = p(X>n-1) - p(X>n)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p(X=n) = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p(X=n) = \frac{n-1}{n!}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n\,p(X=n) = \frac{n(n-1)}{n!}$. $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $n\,p(X=n) = \frac{1}{(n-2)!}$.

Ainsi la série de terme général $n\,p(X=n)$ est convergente et même absolument convergente.

Alors $E(X)$ existe. $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,p(X=n) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,p(X=n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$

$E(X) = e$.

$\forall n \in [\![3,+\infty[\![$, $n(n-2)\,p(X=n) = \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} = \frac{1}{(n-3)!}$.

La série de terme général $n(n-2)p(X=n)$ est convergente et même absolument convergente !

Ainsi $E(X(X-2))$ existe. $E(X(X-2)) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-2)\,p(X=n) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-3)!} = \dots = e$!

Comme $X^2 = X(X-2) + 2X$, $E(X^2)$ existe et vaut $e + 2e = 3e$.

Alors X possède une variance qui vaut $3e - e^2$.

Finalement $V(X) = e(3-e)$.

Exercice 11 **Inégalité de Markov.**

Soit X une variable aléatoire à densité possèdant une espérance et prenant des valeurs positives. Montrer que si a est réel positif :

$$p(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc X possède une densité f nulle sur $]-\infty, 0[$.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. $a\,p(X \geq a) = a\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_a^{+\infty} a f(t)\,dt \underset{\uparrow}{\leq} \int_a^{+\infty} t f(t)\,dt \underset{\uparrow}{\leq} \int_0^{+\infty} t f(t)\,dt = E(X)$.

$f(t) \geq 0$! $\quad \forall t \in \mathbb{R}_+,\ t f(t) \geq 0$ et $a > 0$.

Ainsi $\underline{\underline{p(X \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}}}$.

Exercice 12 a est un réel strictement positif. Soit X une variable aléatoire à densité possèdant un moment d'ordre 2 et prenant ses valeurs dans $[-a, a]$. Montrer que si α est réel strictement positif :

$$p(|X| \geqslant \alpha) \geqslant \frac{E(X^2) - \alpha^2}{a^2}$$

X prend ses valeurs dans $[-a, a]$. X possède alors une densité f nulle sur $]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[$.

Soit α un réel strictement positif. L'inégalité est claire si $E(X^2) - \alpha^2 \leq 0$.

Supposons alors que $\alpha^2 < E(X^2)$.

$E(X^2) = \int_{-a}^{a} t^2 f(t)\,dt \leq \int_{-a}^{a} a^2 f(t)\,dt = a^2 \int_{-a}^{a} f(t)\,dt = a^2$; $\alpha^2 < E(X^2) \leq a^2$; $\alpha < a$.

$a^2 p(|X| \geq \alpha) = \int_{-a}^{-\alpha} a^2 f(t)\,dt + \int_{\alpha}^{a} a^2 f(t)\,dt \underset{\uparrow}{\geq} \int_{-a}^{-\alpha} t^2 f(t)\,dt + \int_{\alpha}^{a} t^2 f(t)\,dt = \int_{-a}^{a} t^2 f(t)\,dt - \int_{-\alpha}^{\alpha} t^2 f(t)\,dt$

$\begin{cases} -a \leq t \leq -\alpha \\ \alpha \leq t \leq a \end{cases} \Rightarrow a^2 \geq t^2$

$a^2 p(|X| \geq \alpha) \geq E(X^2) - \int_{-\alpha}^{\alpha} t^2 f(t)\,dt$. $\quad \int_{-\alpha}^{\alpha} t^2 f(t)\,dt \leq \alpha^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\,dt \leq \alpha^2 \int_{-a}^{a} f(t)\,dt = \alpha^2$.

Alors $a^2 p(|X| \geq \alpha) \geq E(X^2) - \int_{-\alpha}^{\alpha} t^2 f(t)\,dt \geq E(X^2) - \alpha^2$.

Ainsi $\underline{\underline{p(|X| \geq \alpha) \geq \dfrac{E(X^2) - \alpha^2}{a^2}}}$.

Exercice 13 N est une variable aléatoire suivant une loi binômiale de paramètres n et p ($n \in \mathbb{N}^*$).

$X_0, X_1, \ldots, X_n$ sont $n+1$ variables aléatoires qui suivent une loi uniforme sur $[0,1]$.

On suppose encore que $X_0, X_1, \ldots, X_n, N$ sont mutuellement indépendantes.

Q1. k est un élément de $[\![0,n]\!]$. Etudier $T_k = \text{Min}(X_0, X_1, \ldots, X_k)$.

Q2. Déterminer la loi de $T = \text{Min}(X_0, X_1, \ldots, X_N)$.

Q1 Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Notons F_k la fonction de répartition de T_k.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_k(x) = p(T_k \leq x) = 1 - p(T_k > x) = 1 - p(\text{Min}(X_0, \ldots, X_k) > x)$

$F_k(x) = 1 - p(\{X_0 > x\} \cap \ldots \cap \{X_k > x\}) = 1 - p(X_0 > x) \cdots p(X_k > x) = 1 - (p(X_0 > x))^{k+1}$

$F_k(x) = 1 - (1 - p(X_0 \leq x))^{k+1}$.

Rappelons que $p(X_0 \leq x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\\ x \text{ si } x \in [0,1] \\ 1 \text{ si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$.

Alors $F_k(x) = \begin{cases} 1 - (1-0)^{k+1} \text{ si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - (1-x)^{k+1} \text{ si } x \in [0,1] \\ 1 - (1-1)^{k+1} \text{ si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$ $F_k(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\text{ ou } x \in [0, +\infty[\\ 1 - (1-x)^{k+1} \text{ si } x \in [0,1] \\ 1 \text{ si } x \in]1, +\infty[\text{ ou } x \in [1, +\infty[\end{cases}$

F_k est de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$, $[0,1]$ et $[1, +\infty[$.

Alors F_k est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$.

Ainsi <u>T_k est une variable aléatoire à densité.</u>

$\forall x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, $F_k'(x) = 0$ et $\forall x \in]0,1[$, $F_k'(x) = (k+1)(1-x)^k$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\\ (k+1)(1-x)^k \text{ si } x \in [0,1] \end{cases}$; f_k est une densité de T_k.

Q2 Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_T(x) = p(T \leq x) = \sum_{k=0}^{n} p(\{T \leq x\} \cap \{N = k\}) = \sum_{k=0}^{n} p(T_k \leq x)\, p(N = k) = \sum_{k=0}^{n} p(N=k) F_k(x)$.

indépendance

$F_T = \sum_{k=0}^{n} p(N=k) F_k$.

Alors F_T est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$ ... d'après Q1.

T est une variable aléatoire à densité. $\forall x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$, $F_T'(x) = \sum_{k=0}^{n} p(N=k) f_k(x)$.

Posons $f = \sum_{k=0} p(N=k) f_k$. f est une densité de T.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} f_k(x)$. <u>$\forall x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, $f(x) = 0$.</u>

$\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} (k+1)(1-x)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} k(1-x)^k + (p(1-x)+q)^n$.

$\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} n C_{n-1}^{k-1} p^k q^{n-k} (1-x)^k + (p(1-x)+q)^n$.

$\forall x \in [0,1]$, $f(x) = n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} p^{k+1} q^{n-1-k} (1-x)^{k+1} + (p - px + q)^n$

$\forall x \in [0,1]$, $f(x) = np(1-x)(p(1-x)+q)^{n-1} + (1-px)^n$

$\forall x \in [0,1]$, $f(x) = np(1-x)(1-px)^{n-1} + (1-px)^n$.

Exercice 14 ESCP 1999

Soient X et Y deux variable aléatoires indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Z = \dfrac{X}{X+Y}$.

Q1. Pour tout t dans $[0,1]$ déterminer une densité de la variable aléatoire $t(X+Y) - X$.

Q2. En déduire la loi de Z.

Q1 Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ e^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$. f est une densité de X et de Y.

Soit a un élément de $\mathbb{R}^*$, $f_a : x \mapsto \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x}{a}\right)$ est une densité de aX (cours... classique !)

Soit $t \in [0,1]$. Posons $U_t = t(X+Y) - X = (t-1)X + tY$.

1er cas.. $t = 0$. $U_t = U_0 = -X$. $x \mapsto f(-x)$ est une densité de $U_t = U_0$.

2e cas.. $t = 1$ $U_t = U_1 = Y$. f est une densité de $U_t = U_1$

3e cas.. $t \in]0,1[$. $(t-1)X$ et tY sont deux variables aléatoires indépendantes ; f_{t-1} et f_t en sont des densités respectives.

Alors $h_t : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{t-1}(u) f_t(x-u)\, du$ est une densité de $U_t = (t-1)X + tY$.

Déterminons h_t. Pour cela précisons f_{t-1} et f_t.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_t(x) = \frac{1}{t} f\left(\frac{x}{t}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \frac{1}{t} e^{-\frac{x}{t}} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$

Notons que $t-1$ est négatif.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f_{t-1}(x)=\frac{1}{|t-1|}f\left(\frac{x}{t-1}\right)=\frac{1}{1-t}f\left(\frac{x}{t-1}\right)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\,]0,+\infty[\\ \frac{1}{1-t}e^{-\frac{x}{t-1}} & \text{si } x\in\,]-\infty,0]\end{cases}.$$

Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{t-1}(u)\,f_t(x-u)\,du=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1-t}e^{-\frac{u}{t-1}}f_t(x-u)\,du\underset{v=x-u}{=}\int_{x}^{+\infty}\frac{1}{1-t}e^{-\frac{x-v}{t-1}}f_t(v)\,dv.$$

- $x\in\,]-\infty,0[$. $h(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1-t}e^{-\frac{x-v}{t-1}}\frac{1}{t}e^{-\frac{v}{t}}\,dv=\frac{1}{t(1-t)}e^{-\frac{x}{t-1}}\int_0^{+\infty}e^{-\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}\right)v}\,dv$

$$h(x)=\frac{1}{t(1-t)}e^{-\frac{x}{t-1}}\lim_{A\to+\infty}\left[\frac{e^{-\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}\right)v}}{-\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}\right)}\right]_0^A=\frac{e^{-\frac{x}{t-1}}}{t(1-t)}\,\frac{1}{\frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}}=e^{-\frac{x}{t-1}}.$$

- $x\in[0,+\infty[$

$$h(x)=\int_x^{+\infty}\frac{1}{1-t}e^{-\frac{x-v}{t-1}}\frac{1}{t}e^{-\frac{v}{t}}\,dv\underset{\text{voir plus haut}}{=}\frac{e^{-\frac{x}{t-1}}}{t(t-1)}\lim_{A\to+\infty}\left[\frac{e^{-\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}\right)v}}{-\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}\right)}\right]_x^A$$

$$h(x)=\frac{e^{-\frac{x}{t-1}}}{t(1-t)}\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}\right)x}}{\frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}}=e^{-\frac{x}{t}}.$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=\begin{cases}e^{-\frac{x}{t-1}} & \text{si } x\in\,]-\infty,0[\\ e^{-\frac{x}{t}} & \text{si } x\in[0,+\infty[\end{cases}$$

Q2 Notons que Z prend ses valeurs dans $[0,1]$ car X et Y prennent leurs valeurs dans $[0,+\infty[$ (ok?)

Ainsi $\forall t\in\,]-\infty,0[,\ F_Z(t)=0$ et $\forall t\in\,]1,+\infty[,\ F_Z(t)=1$.

$F_Z(0)=P\left(\frac{X}{X+Y}\le 0\right)\overset{(*)}{=}0$. $\quad F_Z(1)=P\left(\frac{X}{X+Y}\le 1\right)\overset{(*)}{=}P(0\le Y)=1$.

Soit $t\in\,]0,1[$. $\quad F_Z(t)=P\left(\frac{X}{X+Y}\le t\right)\underset{P(X+Y>0)=1\ (*)}{\overset{(*)}{=}}P(X\le t(X+Y))=P(0\le t(X+Y)-X)=P(0\le U_t)$

$$F_Z(t)=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{t}}\,dx=\lim_{A\to+\infty}\left[-t\,e^{-\frac{x}{t}}\right]_0^A=t.$$

$\forall t\in\mathbb{R},\ F_Z(t)=\left|\begin{array}{l}0 \text{ si } t\in\,]-\infty,0[\\ t \text{ si } t\in[0,1]\end{array}\right.$ $\qquad Z\hookrightarrow\mathcal{U}([0,1])$! Beau, hein?

Exercice 15 ESCP 98 X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, p)$ qui suit une loi normale centrée réduite et Y est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{B}, p)$ qui suit une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On suppose que X et Y sont indépendantes.

Q1. Etudier $Z = XY$.

Q2. Déterminer une densité g de X^2.

Q3. Etudier $T = XZ$. Calculer $E(T)$. Que vaut $E(XZ) - E(X)E(Z)$?

(Q1) Cherchons la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = XY$.

Notons F_Z cette fonction de répartition. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$F_Z(x) = p(XY \leq x) = p(\{XY \leq x\} \cap \{Y=1\}) + p(\{XY \leq x\} \cap \{Y=-1\})$

$F_Z(x) = p(\{X \leq x\} \cap \{Y=1\}) + p(\{X \geq -x\} \cap \{Y=-1\})$. Par indépendance il vient :

$F_Z(x) = p(X \leq x)p(Y=1) + p(X \geq -x)p(Y=-1) = \frac{1}{2} F_X(x) + \frac{1}{2}(1 - F_X(-x))$

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ donc $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$.

Alors $F_Z(x) = \frac{1}{2} F_X(x) + \frac{1}{2} F_X(x) = F_X(x)$. Ainsi $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

(Q2) Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. f est une densité de X.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$. g est une densité de X^2.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} 2 f(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $g(x) = 0$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{1}{2}-1}}{2^{1/2}\Gamma(\frac{1}{2})} & \text{si } x > 0 \end{cases}$. h est une densité d'une variable aléatoire qui suit une loi gamma de paramètres 2 et $1/2$.

Alors $1 = \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)} \int_0^{+\infty} e^{-t/2} t^{1/2-1} dt = \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)} \times \sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t/2} dt$.

Or $1 = \int_0^{+\infty} g(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t/2} dt$; ainsi $1 = \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)} \sqrt{2\pi}$.

Alors $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)}$ et alors $g = h$. Par conséquent $X^2 \hookrightarrow \gamma(2, \frac{1}{2})$.

Au passage on trouve ou on retrouve $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

(Q3) Notons F_{X^2} et F_T les fonctions de répartition de X^2 et T. Notons que $T = X^2 Y$

comme dans Q1 on montre que :

$\forall x \in \mathbb{R}, \; F_T(x) = \frac{1}{2}\left[F_{X^2}(x) + 1 - F_{X^2}(-x)\right]$

F_{X^2} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ (g est continue sur $\mathbb{R}^*$).

Alors F_T est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

T est alors une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \; F_T'(x) = \frac{1}{2}\left[F'_{X^2}(x) + F'_{X^2}(-x)\right] = \frac{1}{2}\left(g(x) + g(-x)\right).$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}, \; \varphi(x) = \frac{1}{2}\left(g(x)+g(-x)\right)$. φ est une densité de T.

$\forall x \in]-\infty, 0[, \; \varphi(x) = \frac{1}{2} g(-x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi(-x)}} e^{x/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi|x|}} e^{-|x|/2}$

$\varphi(0) = 0$

$\forall x \in]0, +\infty[, \; \varphi(x) = \frac{1}{2} g(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi|x|}} e^{-|x|/2}.$

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \; \varphi(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi|x|}} e^{-|x|/2}$ et $\varphi(0) = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*_+, \; \varphi(x) = \frac{1}{2} g(x)$. $\quad X^2 \hookrightarrow \Gamma(2, \frac{1}{2})$ donc $E(X^2)$ existe.

Ainsi $\int_0^{+\infty} t g(t)\,dt$ converge ; $\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,dt$ converge également.

La $t \mapsto t\varphi(t)$ est impaire sur $\mathbb{R}$ donc $\int_{-\infty}^{0} t\varphi(t)\,dt$ existe et vaut $-\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,dt$.

Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)\,dt$ existe et vaut 0.

Ainsi $E(T)$ existe et vaut 0.

$E(XZ) - E(X)E(Z) = E(T) - E(X)E(Z) = 0 - 0 \times 0$. $\quad E(XZ) - E(X)E(Z) = 0$.

Exercice 16 X est une variable aléatoire de densité f continue et telle que $E(X^2)$ existe.

Q1. Montrer que si x est un réel strictement positif :

$$0 \leqslant x^2 p(|X| \geqslant x) \leqslant \int_{-\infty}^{-x} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 p(|X| \geqslant x)\right) = 0.$

Q2. Soit x un réel positif. Montrer que :

$$\int_0^x t\,p(|X| \geqslant t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} p(|X| \geqslant x) + \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

(utiliser la fonction de répartition F et une intégration par parties).

En déduire que $\int_0^{+\infty} t\,p(|X| \geqslant t)\,dt$ converge et vaut $E(X^2)/2$.

(Q1) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ converge et vaut $E(X^2)$.

Alors $\int_{-\infty}^{-x} t^2 f(t)\,dt$ et $\int_{x}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ converge également.

$x^2 p(|X| \geq x) = x^2 \left(\int_{-\infty}^{-x} f(t)\,dt + \int_{x}^{+\infty} f(t)\,dt \right) = \int_{-\infty}^{-x} x^2 f(t)\,dt + \int_{x}^{+\infty} x^2 f(t)\,dt \leq \int_{-\infty}^{-x} t^2 f(t)\,dt + \int_{x}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt.$

$(|X| \geq x) = (X \geq x) \cup (X \leq -x)$

Si $t \leq -x$: $t^2 \geq x^2$

Si $t \geq x$: $t^2 \geq x^2$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq x^2 p(|X| \geq x) \leq \int_{-\infty}^{-x} t^2 f(t)\,dt + \int_{x}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{-x} t^2 f(t)\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_{x}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = 0$; par encadrement il vient alors :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 p(|X| \geq x) \right) = 0$.

(Q2) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $\int_0^x t\,p(|X| \geq t)\,dt = \int_0^x t(1 - p(|X| < t))\,dt = \int_0^x t(1 - p(-t < X < t))\,dt$

$\int_0^x t\,p(|X| \geq t)\,dt = \int_0^x t(1 - F(t) + F(-t))\,dt = \left[\frac{t^2}{2}(1 - F(t) + F(-t)) \right]_0^x - \int_0^x \frac{t^2}{2}(-F'(t) - F'(-t))\,dt$

F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car f est continue sur $\mathbb{R}$.

$\int_0^x t\,p(|X| \geq t)\,dt = \frac{x^2}{2}(1 - F(x) + F(-x)) + \frac{1}{2}\int_0^x t^2 f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^x t^2 f(-t)\,dt$

$= \frac{x^2}{2}(1 - p(-x \leq X \leq x)) + \frac{1}{2}\int_0^x t^2 f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{-x} u^2 f(u)(-du)$

$= \frac{x^2}{2}(1 - p(|X| \leq x)) + \frac{1}{2}\int^x t^2 f(t)\,dt$

$$\int_0^x t\,p(|X|\geq t)\,dt = \frac{x^2}{2}p(|X|\geq x) + \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} t^2 f(t)\,dt \text{ pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}_+$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ existe et vaut $E(X^2)$; ainsi $\lim_{x\mapsto+\infty}\int_{-x}^{x} t^2 f(t)\,dt = E(X^2)$.

Alors $\lim_{x\mapsto+\infty}\int_0^x t\,p(|X|\geq t)\,dt = 0 + \frac{1}{2}E(X^2)$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} t\,p(|X|\geq t)\,dt$ existe et vaut $\frac{1}{2}E(X^2)$.

Remarque .. il fallait sans doute parler au départ de la continuité sur $\mathbb{R}_+$ de $t\mapsto t\,p(|X|\geq t)$, ceci est clair car $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $t\,p(|X|\geq t) = t(1-F(t)+F(-t))$!

Exercice 17 Un point M se promène au hasard à l'intérieur d'une boule de centre O et de rayon de R. La probabilité pour que M se trouve dans une portion de la boule est proportionnelle au volume de cette portion. Etudier la variable aléatoire X égale à la distance de O à M (... $4\pi R^3/3$).

Soit $x\in\mathbb{R}$. $p(X\leq x)=0$ si $x\in]-\infty,0[$ et $p(X\leq x)=1$ si $x\in]R,+\infty[$.

Soit $x\in[0,R]$. $p(X\leq x) = \lambda\,\frac{4}{3}\pi x^3$ ($\{X\leq x\}$ est réalisé si le point se trouve dans la sphère de centre O et de rayon x).

Or $p(X\leq R)=1$ donc $\lambda\frac{4}{3}\pi R^3=1$; $\lambda=\frac{3}{4\pi R^3}$. Alors $p(X\leq x)=\frac{x^3}{R^3}$.

Finalement $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_X(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x\in]-\infty,0[\text{ ou }]-\infty,0] \\ x^3/R^3 \text{ si } x\in[0,R] \\ 1 \text{ si } x\in]R,+\infty[\text{ ou } [R,+\infty[\end{cases}$.

F_X est de classe C^1 sur $]-\infty,0]$, $[0,R]$ et $[R,+\infty[$. F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}-\{0,R\}$. X est une variable aléatoire à densité.

$\forall x\in]-\infty,0[\cup]R,+\infty[$, $F'_X(x)=0$ et $\forall x\in]0,R[$, $F'_X(x)=3x^2/R^3$.

Posons $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x\in]-\infty,0[\cup]R,+\infty[\\ 3x^2/R^3 \text{ si } x\in[0,R]\end{cases}$; f est une densité de X.

X prend ses valeurs dans $[0,R]$ donc $E(X)$ existe et vaut $\int_0^R t\,\frac{3t^2}{R^3}\,dt = \frac{3}{R^3}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^R = \frac{3}{4}R$.

$E(X)=\frac{3}{4}R$. On montre sans difficulté que $E(X^2)=\frac{3}{5}R^2$ et $V(X)=\frac{3}{80}R^2$.

Exercice 18 ESCP 98

Q1. X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent une loi uniforme sur $[0,1]$. Etudier $X-Y$ et XY.

Q2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|}$. Montrer que f est une densité de probabilité. X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes ayant f pour densité. Etudier $S = X+Y$.

Q1 Pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\\ 1 \text{ si } x \in [0,1] \end{cases}$. f est une densité de X et de Y.

$g : x \mapsto \frac{1}{|-1|} f\left(\frac{x}{-1}\right)$ est alors une densité de $-Y$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[\\ 1 \text{ si } x \in [-1, 0] \end{cases}$

X et Y sont indépendantes donc X et $-Y$ aussi.

Ainsi $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t)\,dt$ est une densité de $X-Y$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \int_0^1 g(x-t)\,dt \underset{u=x-t}{=} \int_{x-1}^{x} g(u)\,du$.

$\forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $h(x) = 0$ car g est nulle sur $\mathbb{R} \setminus [0,1]$.

$\forall x \in [-1, 0[$, $h(x) = \int_{x-1}^{x} g(u)\,du = \int_{-1}^{x} du = x+1$.

$\forall x \in [0,1]$, $h(x) = \int_{x-1}^{x} g(u)\,du = \int_{x-1}^{0} g(u)\,du = 1-x$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ x+1 \text{ si } x \in [-1, 0[\\ 1-x \text{ si } x \in [0,1] \end{cases}$; h est une densité de $X-Y$

X et Y prennent leurs valeurs dans $[0,1]$. XY également.

Posons $L = \ln(XY) = \ln X + \ln Y$.

Posons $U = \ln X$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_U(x) = p(U \leq x) = p(\ln X \leq x) = p(X \leq e^x) = F_X(e^x) = \begin{cases} e^x \text{ si } x \in]-\infty, 0] \\ 1 \text{ si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$

car $F_X(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in]-\infty, 0[\\ t \text{ si } t \in [0,1] \\ 1 \text{ si } t \in]1, +\infty[\end{cases}$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F_U(x)=\begin{cases} e^x \text{ si } x\in]-\infty,0] \\ 1 \text{ si } x\in]0,+\infty[\text{ ou si } x\in[0,+\infty[\end{cases}$$

Alors F_U est de classe C^1 sur $]-\infty,0]$ et sur $[0,+\infty[$. F_U est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. U est une variable aléatoire à densité.

$\forall x\in]-\infty,0[,\ F'_U(x)=e^x$ et $\forall x\in]0,+\infty[,\ F_U(x)=0$.

Posons $\forall x\in]-\infty,0],\ f_U(x)=e^x$ et $\forall x\in]0,+\infty[,\ f_U(x)=0$.

f_U est une densité de $U=\ln X$ et de $\ln Y$.

X et Y sont indépendantes donc $\ln X$ et $\ln Y$ également.

$h_L : x\mapsto\int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t)\, f_U(x-t)\,dt$ est une densité de $L=\ln X+\ln Y=\ln XY$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h_L(x)=\int_{-\infty}^{0} e^t f_U(x-t)\,dt \underset{v=x-t}{=} \int_x^{+\infty} e^{x-v} f_U(v)\,dv.$$

$\forall x\in]0,+\infty[,\ h_L(x)=0$

$\forall x\in]-\infty,0],\ h_L(x)=\int_x^0 e^{x-v}e^v\,dv=-x e^x$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h_L(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x\in]0,+\infty[\\ -xe^x \text{ si } x\in]-\infty,0]\end{cases}.$$

$XY=e^L$. D'après le cours ou presque en posant $\forall x\in\mathbb{R},\ f_{XY}(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x\in]-\infty,0]\\ \frac{1}{x}f_L(\ln x) \text{ si } x\in]0,+\infty[\end{cases}$ on obtient une densité de $XY=e^L$.

$\forall x\in]0,+\infty[,\ f_{XY}(x)=\frac{1}{x}f_L(\ln x)$.

$\forall x\in]0,1],\ f_{XY}(x)=\frac{1}{x}(-\ln x)e^{\ln x}=-\ln x$.

$\forall x\in]1,+\infty[,\ f_{XY}(x)=\frac{1}{x}f_L(\ln x)=0$

$\forall x\in]0,1],\ f_{XY}(x)=-\ln x$ et $\forall x\in]-\infty,0]\cup[1,+\infty[,\ f_{XY}(x)=0$.

(Q2) f est continue et paire sur $\mathbb{R}$.

$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ existe et vaut $\Gamma(1)=0!=1$; $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut $1/2$.

Comme f est paire : $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$ existe et vaut $1/2$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut 1. Ceci achève de montrer que <u>f est une densité de probabilité.</u>

X et Y étant indépendantes, $S=X+Y$ est une variable aléatoire à densité qui admet pour densité $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)f(t)\,dt$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-|x-t|}\frac{1}{2}e^{-|t|}\,dt=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{x}e^{t-x-|t|}\,dt+\frac{1}{4}\int_{x}^{+\infty}e^{+x-t-|t|}\,dt.$$

Soit $x\in[0,+\infty[$.

$$h(x)=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{0}e^{2t-x}\,dt+\frac{1}{4}\int_{0}^{x}e^{-x}\,dt+\frac{1}{4}\int_{x}^{+\infty}e^{x-2t}\,dt.$$

$$4h(x)=e^{-x}\lim_{A\to-\infty}\left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_A^0+xe^{-x}+e^{x}\lim_{A\to+\infty}\left[\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_x^A=e^{-x}\frac{1}{2}+xe^{-x}+e^{x}\frac{e^{-2x}}{2}.$$

$4h(x)=(x+1)e^{-x}$. $h(x)=\frac{1}{4}(x+1)e^{-x}$.

Notons alors que : $\forall x\in\mathbb{R},\ h(-x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(-x-t)f(t)\,dt\underset{u=-t}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}f(-x+u)f(-u)\,du\underset{f\text{ est paire}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-u)f(u)\,du=h(x)$

Ainsi h est paire.

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=\frac{1}{4}(|x|+1)e^{-|x|}$.