VARIABLES ALÉATOIRES A DENSITÉ

VARIABLES ALÉATOIRES A DENSITÉ

► Si vous trouvez quelques "coquilles" dans ces feuilles merci de me les signaler (jean-francois.cossutta@wanadoo.fr).

P Mentionne des résultats particulièrement utiles et souvent oubliés dans la pratique des variables aléatoires à densité.

★ Mentionne des erreurs à ne pas faire ou des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SD Mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

! Notions ou résultats qui ne semblent pas toujours très importants mais qui figurent explicitement dans le programme donc qui sont exigibles.

Dans toute la suite $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé et les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ (sauf mention du contraire) ; nous ne le redirons pas toujours.

Ce résumé porte sur la réunion des programmes des deux années. Quelques résultats sont donnés pour des variables aléatoires réelles quelconques (et pas simplement à densité).

I QUELQUES DIFFÉRENCES AVEC LE PROGRAMME PRÉCEDENT (jusqu'au concours 2014)

Ce résumé de cours se rapporte au programme de première année de septembre 2013 et au programme de seconde année de septembre 2014. Il concerne donc les concours 2015. Il contient, sans séparation, la totalité des programmes des deux années.

Rappelons que le programme en vigueur jusqu'au concours 2005 était très sensiblement différent de celui de 2006 à 2014. Il faut donc faire très attention à cela lorsque l'on fait un problème (ou lorsque l'on lit une correction) d'avant 2005.

Le nouveau programme est très proche du précédent. Notons cependant quelques changements.

• Au niveau des intégrales impropres, le critère de comparaison au niveau de la négligeabilité a changé.

Il est moins contraignant et c'est heureux pour le travail que nous avons à faire au niveau des variables aléatoires réelles à densité. Ce critère est par exemple devenu :

$-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f et g sont deux applications de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a, b[$.

On suppose que :

1. il existe un réel c tel que : $\boxed{\forall t \in [c, b[,\ g(t) \geqslant 0}$ (★★)
2. $f = \mathrm{o}(g)$ au voisinage de b.

Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument** convergente.

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

On a un résultat analogue sur $]a, b]$.

★★★ Notons que des concours 2006 au concours 2014 le résulat du programme était :

$-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f et g sont deux applications de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a,b[$.

On suppose que :

1. il existe un réel c tel que : $\boxed{\forall t \in [c,b[,\ f(t) \geqslant 0 \ \boxed{\text{et}}\ g(t) \geqslant 0}$ (★★)
2. $f = \mathrm{o}(g)$ au voisinage de b.

Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Ce résultat est largement contenu dans le précédent. Dans les corrections jusqu'aux concours 2014 c'est celui qui est utilisé. Qu'on se le dise.

• On a rajouté de l'absolue convergence au niveau de l'espérance d'une variable aléatoire réelle à densité. Notons que cela est totalement inutile ! !

• On a ajouté l'existence d'une espérance par domination dans un cadre général...

• On a ajouté le résultat parlant de l'espérance d'un produit d'un nombre fini de variables aléatoires réelles indépendantes, dans un cadre général...

• On a supprimé la loi Gamma à "deux" paramètres. Ce n'est pas gênant sauf pour traiter des problèmes intéressants des années précédentes. Il est sans doute utile de faire un petit effort pour étudier le lien entre la loi Gamma à "deux" paramètres et la loi Gamma à un paramètre.

• La loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$ doit être connue.

Mais pour étudier la loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ on demande de se ramener, après multiplication par λ, à une somme de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$.

II GÉNÉRALITÉS

▶ 1. Définition d'une variable aléatoire réelle à densité

Déf. 1 On appelle **variable aléatoire réelle à densité** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ toute variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont la fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points, éventuellement vide.

▶ 2. Densité S d'une variable aléatoire réelle à densité

Déf. 2 Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de fonction de répartition F_X.

Notons que F'_X est positive ou nulle là où elle est définie (F_X est croissante).

On appelle **densité de X** toute fonction numérique de la variable réelle, à valeurs positives ou nulles et qui coïncide avec F'_X sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points (éventuellement vide).

Prop. 1 Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- Une densité de X n'est pas nécessairement définie sur tout $\mathbb{R}$.
- Une densité de X est positive ou nulle sur son domaine de définition.
- L'ensemble des points de discontinuité d'une densité de X est fini.

★ Le dernier point est fondamental. Si X est une variable aléatoire réelle à densité de densité f, F'_X est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points D_1 et f coïncide avec F'_X sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points D_2. Alors f est continue sur $\mathbb{R} - (D_1 \cup D_2)$ et $D_1 \cup D_2$ est fini...

★ Dans les exercices et problèmes il faut essayer de bien identifier le domaine de définition des densitées proposées, ce qui n'est pas toujours très simple...

Prop. 2 Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de fonction de répartition F_X.

- F'_X est une densité de X.

P • Soit f une densité de X. L'ensemble des densités de X est l'ensemble des fonctions numériques de la variable réelle, positives ou nulles sur leur domaine de définition et qui coïncident avec f en tout point de $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points éventuellement vide.

P • Deux densités de X coïncident en tout point de $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points éventuellement vide.

- X possède au moins une densité définie sur $\mathbb{R}$; et même une infinité !

PP Lorsque l'on travaille sur une variable aléatoire réelle à densité X on a intérêt à utiliser une densité de X définie sur $\mathbb{R}$ et la “plus continue possible ”.

★ Soit X une variable aléatoire réelle à densité. Il est n'est pas gênant de noter F_X sa fonction de répartition (qui est unique). Noter f_X une de ses densités est un peu plus ambigu. Nous le ferons sans trop en abuser...

▶ 3. Reconnaître une variable aléatoire réelle à densité et en trouver une densité

PPP Voici les 4 étapes usuelles pour montrer qu'une variable aléatoire réelle X est à densité et pour en trouver une densité.

E1 On cherche la fonction de répartition F_X de X.

E2 On montre que F_X est continue sur $\mathbb{R}$.

E3 On montre que F_X est (au moins) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini D éventuellement vide (il n'est pas indispensable de faire une étude complète de la dérivabilité de F_X).

E4 On obtient une densité de X en prenant une fonction numérique de la variable réelle, **positive ou nulle** sur son domaine et qui coïncide avec F'_X sauf éventuellement en un nombre fini de points.

PP Dans la pratique nous nous efforcerons au niveau du point 4 de construire une densité définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante.

- **E4 A** On dérive F_X là où on a dit qu'elle était de classe $\mathcal{C}^1$.
- **E4 B** On construit une fonction g définie et positive sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec la dérivée précédente.
- **E4 C** **On dit :** g est une fonction positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ qui coïncide avec F'_X sur $\mathbb{R}$ privé d'une ensemble fini de point donc g est une densité de X.

Notons que définir g sur $\mathbb{R}$ n'est pas une obligation mais de la prudence...

★★ La question peut aussi être : montrer que X est une variable aléatoire réelle à densité. Dans ce cas il faudra d'abord montrer que X est une variable aléatoire réelle. À noter que les énoncés des concours sont souvent imprécis à ce niveau.

▶ 4. Propriétés d'une variable aléatoire réelle à densité

Th. 1 Soient X une variable aléatoire réelles à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f une densité de X.

- f est positive sur son domaine de définition.
- f est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1.
- $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t}$.

Cor. La fonction de répartition, donc la loi, d'une variable aléatoire réelle à densité est entièrement déterminée par une de ses densités.

Th. 2 **PP** Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f une densité de X.

- Pour tout réel x : $\boxed{P(X = x) = 0}$.
- Pour tout réel x : $P(X \leqslant x) = P(X < x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Pour tout réel x : $P(X > x) = P(X \geqslant x) = \displaystyle\int_{x}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si a et b sont deux réels tels que $a < b$:

$$P(a < X < b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

P Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour montrer que X n'est pas à densité il suffit de trouver un réel x_0 tel que $P(X = x_0) \neq 0$.

Th. 3 **PP** Soient X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f une densité de X continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini D.

- La fonction de répartition F_X de X est de classe $\mathcal{C}^1$ **au moins** sur $\mathbb{R} - D$;
- $\forall x \in \mathbb{R} - D,\ F_X'(x) = f(x)$.

★ Par définition la "régularité" de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité donne de la "régularité" à ses densités. Ce résultat indique qu'inversement les densités ne sont pas ingrates avec la fonction de répartition ! Il est à savoir et il justifie l'idée de travailler avec une densité la plus continue possible.

Notons qu'il permet de faire un lien précis ente F_X' et f.

▶ 5. Caractérisations de la fonction de répartition et des densités d'une variable aléatoire réelle à densité

Rappel du résultat fondamental de 4.

Soient X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f une densité de X.

- f est positive sur son domaine de définition.
- f est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1.
- $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t}$.

Th. 4 **Sa réciproque.**

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

S'il existe une fonction numérique de la variable réelle f vérifiant :

- f est positive sur son domaine de définition.
- f est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

alors X est une variable aléatoire à densité et f en est une de ses densités.

★★ Le troisième point est plus exigeant qu'il n'y parait.

Si f est continue sur $\mathbb{R}$-$\{x_1, x_2, \cdots x_q\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_q$, dire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1 c'est dire que :

1. Les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t$, ..., $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$, ..., $\displaystyle\int_{x_{q-1}}^{x_q} f(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{x_q}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existent.
2. Leur somme est 1.

Cor. 1 **Caractérisation de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle densité.**

Une application F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité si et seulement si il existe une fonction numérique de la variable réelle f telle que :

1. f est positive sur son domaine de définition ;

2. f est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points ;

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1.

4. $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Si f vérifie les quatre points précédents, F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité et **f en est une densité**.

Cor. 2 **P** **Caractérisation des densités d'une variable aléatoire réelle à densité.**

Soit f une fonction numérique de la variable réelle.

f est une densité d'une variable aléatoire à densité si et seulement si elle a les qualités suivantes :

1. f est positive sur son domaine de définition ;

2. f est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points ;

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1.

★ Ce résultat indique que les densités des variables aléatoires réelles à densité sont les fonctions numérique f de la variable réelle vériant **1.**, **2.** et **3.**. Dans la suite nous appellerons **densité de probabilité** toute fonction numérique de la variable réelle vérifiant **1.**, **2.** et **3.**.

Notons que l'application F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité si et seulement si il existe une densité de probabilité f telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

▸ 6. Une dernière caractérisation de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité

Rappel Soit F une application de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ ou dans $\mathbb{R}$... (voir les deux premiers points).

F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle si et seulement si :

1. F est croissante sur $\mathbb{R}$;

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$;

3. F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

Th. 5 **P** Soit F une application de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ ou dans $\mathbb{R}$... (voir les deux premiers points).

F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité si et seulement si :

1. F est croissante sur $\mathbb{R}$;

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$;

3. F est continue sur $\mathbb{R}$;

4. F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points éventuellement vide.

★ Ceci est une simple conséquence de la définition d'une variable aléatoire réelle à densité et de la caractérisation de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

★ Ceci est très utile dans les problèmes de convergence.

★ **P** Notons encore que si F est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie **1.** et **2.**, nécessairement F prend ses valeurs dans $[0, 1]$. Voila qui peut faire gagner du temps...

7. Variable aléatoire à densité prenant presque sûrement ses valeurs dans I

Déf. 3 Une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, prend presque sûrement ses valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ si $P(X \in I) = P(X^{-1}(I)) = 1$ (ou $P(X \notin I) = 0$). *On peut étendre cette définition aux boréliens de* $\mathbb{R}$.

Prop. 3 Soient X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si X prend ses valeurs dans I ou si X prend presque sûrement ses valeurs dans I alors X admet une densité nulle sur $\mathbb{R} - I$.

Si X admet une densité nulle sur $\mathbb{R} - I$ alors X prend presque sûrement ses valeurs dans I.

★ Si X admet une densité nulle sur $\mathbb{R} - I$ on a souvent tendance à dire que X prend ses valeurs dans I...

III QUELQUES IMAGES DE VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉS PAR UNE FONCTION

Cette partie du programme est vraiment plus floue...

• En première année on dit au niveau de la transformation affine d'une variable aléatoire à densité "les étudiants devront savoir calculer la fonction de répartition et la (**! ! !**) densité de $a\,X + b$ $(a \neq 0)$".

En seconde année on parle de "rappels de première année pour des densités de variables aléatoires de la forme $a\,X + b$ $(a \neq 0)$."

On ne peut pas dire que tout cela soit bien rédigé et cohérent. La question importante est de savoir si, X étant une variable aléatoire réelle de densité f et si a étant un réel non nul, on peut affirmer directement que $a\,X + b$ est une variable aléatoire à densité et que $x \to \dfrac{1}{|a|}\, f\Big(\dfrac{x-b}{a}\Big)$ est une densité.

• En seconde année cela continue par " en complément de la première année, les étudiants devront savoir retrouver les lois de X^2 et $\varphi(X)$ avec φ de classe $\mathcal{C}^1$ strictement monotone sur $X(\Omega)$ ". Encore bien flou.

• Finalement il n'y a rien à savoir ! On ne demande que du savoir faire ! ! Le problème est que si X est une variable aléatoire réelle à densité il est souvent long et pas toujours très simple de montrer que $\varphi(X)$ est une variable aléatoire à densité (si elle l'est) et d'en trouver une densité.

• Personnellement je pense qu'il faut d'abord connaître les résultats classiques : $a\,X + b$, X^2, $|X|$, e^X et $\ln X$, et apprendre à les retrouver rapidement (pas forcément simple...). Mais je pense aussi qu'en fonction du contexte on pourra parfois donner directement le résultat pour $a\,X + b$ voir pour X^2 surtout dans le top 3.

★★ Dans une question du type "montrer que $\varphi \circ X$ est une variable aléatoire à densité" il y a deux questions. D'abord il faut montrer que $\varphi \circ X$ est une variable aléatoire, puis il faut montrer que $\varphi \circ X$ est à densité.

Certain concepteur évite la première question en disant "montrer que la variable aléatoire $\varphi \circ X$ est à densité"...

Nous allons néanmoins rappeler les trois résultats évoqués par le programme et nous donnerons trois compléments.

▶ 1. $\mathbf{Y = aX + b}$

Th. 6 **SD** Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f.

Si a est un réel non nul et b un réel, $Y = aX + b$ est une variable aléatoire réelle à densité admettant pour densité la fonction $\boxed{g : x \to \dfrac{1}{|a|}\, f\Big(\dfrac{x-b}{a}\Big)\cdot}$

▶ 2. $\mathbf{Y = X^2}$

Th. 7 $\boxed{\text{SD}}$ Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f une densité de X **définie sur** $\mathbb{R}$.

$Y = X^2$ est une variable aléatoire réelle à densité admettant pour densité g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{\forall x \in \,]-\infty, 0],\ g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \,]0, +\infty[,\ g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\Big).}$$

★ Notons que pour afficher un résultat simple nous avons choisi une densité de X définie sur $\mathbb{R}$.

★ Notons également qu'obtenir ce résultat n'est pas compliqué mais le justifier sérieusement est moins simple.

▶ 3. Un peu de généralité

Th. 8 Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prenant ses valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit f une densité de X **définie sur** $\mathbb{R}$.

Soit φ une fonction numérique strictement monotone et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, telle que φ' ne s'annule que sur un sous-ensemble fini Δ (éventuellement vide) de I.

$\varphi \circ X$ est une variable aléatoire réelle à densité et admet pour densité la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f\big(\varphi^{-1}(x)\big)}{\left|\varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)\right|} & \text{si } x \text{ appartient à } \varphi(I - \Delta) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

▶ 4. Complément 1 : $\mathbf{Y = |X|}$

Th. 9 $\boxed{\text{SD}}$ Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f une densité de X **définie sur** $\mathbb{R}$.

$|X|$ est une variable aléatoire réelle à densité admettant pour densité g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \,]-\infty, 0[,\ g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \ [0, +\infty[,\ g(x) = f(x) + f(-x).$$

★ Notons que pour afficher un résultat simple nous avons choisi une densité de X définie sur $\mathbb{R}$.

▶ 5. Complément 2 : $\mathbf{Y = e^X}$

Th. 10 $\boxed{\text{SD}}$ Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f une densité de X **définie sur** $\mathbb{R}$.

$Y = e^X$ est une variable aléatoire réelle à densité admettant pour densité g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \,]-\infty, 0],\ g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \,]0, +\infty[,\ g(x) = \frac{1}{x}\ f(\ln x).$$

★ Notons que pour afficher un résultat simple nous avons choisi une densité de X définie sur $\mathbb{R}$.

▶ 6. Complément 3 : $\mathbf{Y = \ln X}$

Th. 11 $\boxed{\text{SD}}$ Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f, prenant presque sûrement ses valeurs dans $]0, +\infty[$.

$Y = \ln X$ est une variable aléatoire réelle à densité admettant pour densité la fonction :

$$g :\ x \to e^x\, f\left(e^x\right).$$

▶ 7. Deux mots sur la pratique

P X est une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prenant ses valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. φ est une fonction numérique de la variable réelle définie sur I (ou sur I privé d'un ensemble fini de points). f est une densité de X. On suppose que $Y = \varphi \circ X$ est une variable aléatoire (attention dans certains concours on vous demande de le démonter parfois implicitement) et on souhaite montrer que c'est une variable aléatoire à densité.

E1 On cherche dans quel ensemble Y prend ses valeurs (pour cela on peut déterminer $\varphi(I)$).

E2 On cherche la fonction de répartition F_Y de Y en fonction de la fonction de répartition F_X de X.

E3 On montre que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de point.

Le tout est assez simple si l'on connaît explicitement F_X. Supposons le contraire.

La continuité de F_X sur $\mathbb{R}$ rend la preuve de la continuité de F_Y relativement aisée.

Pour l'aspect $\mathcal{C}^1$ il est fortement conseillé de commencer par dire que f est continue sur $\mathbb{R} - D$ où D est fini.

Alors F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - D$ (au moins) et en plus $\forall x \in \mathbb{R} - D,\ F'_X(x) = f(x)$.

Ceci suffit le plus souvent pour montrer que F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'une ensemble fini Δ et pour la dériver sur $\mathbb{R} - \Delta$. La construction d'une densité de Y résulte de cette dérivation.

IV MOMENTS D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE RÉELLE À DENSITÉ

▶ 1. Espérance d'une variable aléatoire réelle à densité

Déf. 4 Une variable aléatoire réelle X de densité f possède une **espérance** si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente**.

En cas d'existence, l'espérance de X est le réel noté $E(X)$ et égal à $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\,\mathrm{d}t$.

★★ Les hypothèses sont celles de la définition précédente. Bien évidemment, l'existence et la valeur de $E(X)$ ne dépendent pas de la densité f choisie. En clair, si g est une autre densité de X, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, g(t)\,\mathrm{d}t$ sont simultanément absolument convergentes et ont même valeur en cas de convergence ou plutôt en cas d'absolue convergence...

Th. 12 Soit X une variable aléatoire réelle de densité f.

X possède une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente ! !

★ Ce résultat est une évidence car $t \to t\, f(t)$ garde un signe constant sur $]-\infty, 0] \cap \mathcal{D}_f$ et sur $[0, +\infty[\cap \mathcal{D}_f$.

★★ Notons qu'avant 2013-2014 la définition de l'espérance d'une variable aléatoire réelle à densité ne contenait qu'une hypothèse de convergence (et pas d'absolument convergence). Il convient d'en tenir compte tout en n'étant pas dupe...

PP X est une variable aléatoire réelle de densité f.

Supposons que f est continue sur $\mathbb{R}$-$\{x_1, x_2, \cdots x_q\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_q$. Rappelons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument et vaut 1.

A priori, pour montrer que $E(X)$ existe il convient de montrer que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{x_1} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$, ..., $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$, ..., $\displaystyle\int_{x_{q-1}}^{x_q} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{x_q}^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent absolument (ou convergent).

Si $b \in]-\infty, x_1[$ et $c \in]x_q, +\infty[$, $\displaystyle\int_{b}^{x_1} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$, ..., $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$, ..., $\displaystyle\int_{x_{q-1}}^{x_q} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{x_q}^{c} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ sont déja absolument convergentes ($\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente et $t \to t$ est bornée au voisinage des points x_1, x_2, ..., x_q) et donc pour montrer que $E(X)$ existe il suffit de montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ sont absolument convergentes (ou convergentes). Ce dernier résultat vaut encore si f est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi :

Prop. 4 **PP** Soit X une variable aléatoire réelle à densité de densité f.

X possède une espérance si et seulement si il existe deux réels b et c tels que $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent absolument (resp. convergent).

Prop. 5 **P** Soit X une variable aléatoire réelle à densité.

- Si $X(\Omega)$ est bornée, X possède une espérance.
- Si X possède une densité nulle en dehors d'un segment, X possède une espérance.

Prop. 6 **Variable aléatoire réelle à densité n'ayant pas d'espérance, pour être conforme au programme...**

On pose $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^2} & \text{si } t \in [1, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

f est une densité d'une variable aléatoire réelle à densité qui n'a pas d'espérance.

Prop. 7 **P** **Une évidence qui peut être intéressante sur le plan pratique...**

Soit X une variable aléatoire réelle à densité.

X possède une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,F_X'(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument (ou converge) et en cas d'existence $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,F_X'(t)\,\mathrm{d}t$!

P Ceci suggère de montrer l'existence et de trouver la valeur de $E(X)$ en utilisant une intégration par parties "sur" $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,F_X'(t)\,\mathrm{d}t$, car F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points. Comme d'habitude les problèmes se situent (éventuellement) en $-\infty$ et $+\infty$. Il peut alors être judicieux de dériver $t \to t$ et d'intégrer (proprement) $t \to F_X'(t)$ en $t \to F_X(t) - 1$, pourvu que $t \to t\,(F_X(t) - 1)$ ait une limite finie en $-\infty$ et $+\infty$...

▸ 2. Moments d'une variable aléatoire réelle à densité

Déf. 5 Soient X une variable aléatoire réelle de densité f et r un élément de $\mathbb{N}$.

X possède un **moment d'ordre** r si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r\, f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

En cas d'existence, le moment d'ordre r de X est le réel noté $m_r(X)$ et égal à $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\,\mathrm{d}t$.

★ Sous les hypothèses de la définition précédente le moment d'ordre 0 de X existe et vaut 1 ! !

★ Sous les hypothèses de la définition précédente le moment d'ordre 1 coïncide avec son l'espérance.

★★ Il est clair que les remarques faites pour l'espérance valent pour les moments d'une variable aléatoire réelle à densité. En particulier :

Prop. 8 Soit X une variable aléatoire réelle de densité f. Soit r dans $\mathbb{N}$.

X possède un moment d'ordre r si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r\, f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Prop. 9 Soit X une variable aléatoire réelle de densité f. Soit r dans $\mathbb{N}$.

X possède un moment d'ordre r si et seulement il existe deux réels b et c tels que $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} t^r\, f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} t^r\, f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent absolument (resp. convergent).

Prop. 10 **P** Soit X une variable aléatoire réelle de densité f. Soit r dans $\mathbb{N}$.

- Si $X(\Omega)$ est bornée, X possède un moment d'ordre r.
- Si X possède une densité nulle en dehors d'un segment, X possède un moment d'ordre r.

Prop. 11 Soit X une variable aléatoire réelle à densité. Soient r et r' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $r' \leqslant r$.

Si X possède un moment d'ordre r alors elle possède un moment d'ordre r'.

▸ 3. Théorème de transfert

Th. 13 X est une variable aléatoire réelle à densité. On suppose que :

- X possède une densité f nulle en dehors de l'intervalle $]a, b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$;
- φ est une fonction continue sur $]a, b[$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.

$\varphi \circ X$ possède une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$ est $\boxed{\textbf{absolument convergente}}$.

En cas d'existence $\boxed{E(\varphi \circ X) = \displaystyle\int_a^b \varphi(t)\, f(t)\,\mathrm{d}t.}$

★★★ Ici on n'oubliera pas l'absolue convergence.

★ On évitera d'écrire systématiquement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$ à la pace de $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$...

PP Ce résulat est très important dans la mesure où il permet d'obtenir l'existence et la valeur de $E(\varphi \circ X)$ uniquement avec φ et la loi de X. Autrement dit il dispense de déterminer la loi de $\varphi \circ X$.

★★ Sous les hypothèses du théorème précédent on se gardera bien de penser que $\varphi \circ X$ est une variable aléatoire à densité (ou même discrète). Il est donc bon de rappeler ce que dit le programme.

"La notion générale d'espérance ou de moments d'ordre supérieur d'une variable aléatoire réelle quelconque est hors d'atteinte dans le cadre de ce programme. Néanmoins, on admettra que le théorème de transfert permet de calculer l'espérance de $g(X)$ (bien maladroit...) dans le cas où X est une variable aléatoire à densité."

★ L'énoncé de ce résutat a sensiblement changé avec le nouveau programme de 2013 (2015 au concours).

Rappelons l'ancien énoncé et méditons les progrès ...

Soit X une variable aléatoire réelle à densité prenant ses valeurs dans un intervalle I d'extrémités a et b avec : $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Soit f une densité de X et φ une fonction définie et continue sur I éventuellement privé d'un nombre fini de points.

$\varphi \circ X$ possède une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$ est **absolument convergente**. En cas d'existence

$$\boxed{E(\varphi \circ X) = \int_a^b \varphi(t)\, f(t)\, \mathrm{d}t.}$$

Cor. 1 X est une variable aléatoire réelle à densité, a et b sont deux réels.

Si X possède une espérance, $aX + b$ aussi et : $\boxed{E(aX+b) = aE(X) + b}$.

Cor. 2 Soit X une variable aléatoire réelle à densité.

• X^2 possède une espérance si et seulement si X possède un moment d'ordre 2.

En cas d'existence : $E(X^2) = m_2(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\, \mathrm{d}t$.

• Plus généralement X^r possède une espérance ($r \in \mathbb{N}$) si et seulement si X possède un moment d'ordre r.

En cas d'existence : $E(X^r) = m_r(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\, \mathrm{d}t$.

▸ 4. Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle à densité

Déf. 6 Soit X une variable aléatoire réelle à densité. X possède une **variance** si X possède une espérance ainsi que $(X - E(X))^2$.

La variance de X est, si elle existe, le réel : $E\big((X - E(X))^2\big)$. On la note $V(X)$.

Prop. 12 Soit X une variable aléatoire réelle à densité qui possède une variance.

Cette variance est un réel **strictement positif**.

Déf. 7 Soit X une variable aléatoire réelle à densité possédant une variance.

L'écart-type de X est le réel strictement positif égal à $\sqrt{V(X)}$. On le note $\sigma(X)$.

Th. 14 Soit X une variable aléatoire réelle à densité. Soit f une densité de X. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) X possède une variance.

i') X possède une espérance ainsi que $(X - E(X))^2$.

ii) X possède une espérance et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

iii) X possède un moment d'ordre 2, c'est à dire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

vi) $E(X^2)$ existe.

Si l'une des assertions est vérifiée, X possède une variance et :

$$\boxed{V(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t}$$

P Les différentes expressions de la variance proposées ci-dessus sont à retenir.

Th. 15 X est une variable aléatoire réelle à densité, a et b sont deux réels.

Si X possède une variance, $aX + b$ aussi et : $\boxed{V(aX + b) = a^2\, V(X)}$ et $\boxed{\sigma(aX + b) = |a|\,\sigma(X).}$

Prop. 13 **Variable aléatoire réelle à densité n'ayant pas de variance, pour être conforme au programme...**

On pose $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{t^3} & \text{si } t \in [1, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

f est une densité d'une variable aléatoire réelle à densité qui n'a pas de variance (mais qui possède une espérance).

▶ 5. Variable aléatoire centrée (resp. centrée réduite) dans le cas général...

Déf. 8 Soit X une variable aléatoire réelle.

X est **centrée** si elle possède une espérance nulle.

X est **centrée réduite** si elle possède une espérance nulle et une variance égale à 1.

Th. 16 Soit X une variable aléatoire réelle .

• Si X possède une espérance $X - E(X)$ est une variable centrée.

• Si X possède une variance non nulle, $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable centrée réduite.

On parle de variable aléatoire réelle centrée réduite associée à X.

▶ 6. Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev dans le cas général...

Th. 17 **Inégalité de Markov**

Soit X une variable aléatoire réelle prenant presque sûrement ses valeurs dans $[0, +\infty[$ et admettant une espérance.

$$\forall \lambda \in]0, +\infty[,\ P(X \geqslant \lambda) \leqslant \frac{E(X)}{\lambda}\cdot$$

Cor. Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre r.

Pour tout réel ε strictement positif, $|X|$ possède un moment d'ordre r et : $\boxed{P(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{E(|X|^r)}{\varepsilon^r}\cdot}$

P Mentionnons une conséquence de ce résultat qui sera utile en estimation. Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2 et λ un réel.

$$\boxed{P(|X-\lambda| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E\big((X-\lambda)^2\big)}{\varepsilon^2} = \frac{V(X)+\big(E(X)-\lambda\big)^2}{\varepsilon^2}\cdot}$$

Th. 18 **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**

Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2 ou une variance. Pour tout réel ε strictement positif :

$$\boxed{P(|X-E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}\cdot}$$

V RAPPELS ET COMPLÉMENTS SUR LES SOMMES ET LES PRODUITS DE VARIABLES ALÉATOIRES...

▸ 1. Espérance d'une somme

Th. 19 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X et Y possèdent une espérance. Alors $X+Y$ en possède une et :

$$\boxed{E(X+Y) = E(X)+E(Y).}$$

★★ Notons que ce résultat du programme ne précise pas la nature des variables aléatoires. Qu'on se le dise et que l'on se l'utilise... Rappelons que la somme de deux variables aléatoires réelles à densité n'est pas nécessairement une variable aléatoire réelle à densité (ni même une variable discrète...).

Cor. Soient X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant une espérance.

$X_1+X_2+\cdots+X_n$ possèdent une espérance et

$$\boxed{E(X_1+X_2+\cdots+X_n) = E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)} \quad \text{ou} \quad \boxed{E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k).}$$

▸ 2. Croissance de l'espérance

Th. 20 Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui possède une espérance.

Si X prend presque sûrement ses valeurs dans $[0, +\infty[$ (autrement dit si $P(X \geqslant 0) = 1$) alors $E(X)$ est un réel positif ou nul.

Cor. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui possèdent une espérance.

Si l'on a presque sûrement $X \leqslant Y$ (autrement dit si $P(X \leqslant Y) = 1$) alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

▶ 3. Existence d'une espérance par domination

Th. 21 Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que presque sûrement $|X| \leqslant Y$ (autrement dit $P(|X| \leqslant Y) = 1$) et que Y possède une espérance.

Alors X possède une espérance et $|E(X)| \leqslant E(Y)$.

▶ 4. Espérance d'un produit de variables aléatoires réelles indépendantes

Th. 22 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que X et Y sont **indépendantes** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et qu'elles possèdent une espérance.

Alors XY possède une espérance et : $\boxed{E(XY) = E(X)\,E(Y)}$.

Cor. Soient X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que X_1, X_2, ..., X_n sont **mutuellement indépendantes** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et possèdent une espérance.

Alors $X_1 X_2 \dots X_n$ possèdent une espérance et $\boxed{E(X_1 X_2 \dots X_n) = E(X_1)\,E(X_2) \dots E(X_n).}$

★★ Notons que ces résultats du programme ne précisent pas la nature des variables aléatoires. Qu'on se le dise et que l'on se l'utilise...

▶ 5. Variance d'une somme de deux variables aléatoires réelles indépendantes

Th. 23 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X et Y sont **indépendantes** et qu'elles possèdent une variance.

Alors $X + Y$ en possède une variance et : $\boxed{V(X+Y) = V(X) + V(Y).}$

Cor. Soient X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que X_1, X_2, ..., X_n sont **mutuellement indépendantes** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et possèdent une variance.

Alors $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ possèdent une variance et

$$\boxed{V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n).}$$

★★ Notons que ces résultats du programme ne précisent pas la nature des variables aléatoires. Qu'on se le dise et que l'on se l'utilise...

▶ 6. Somme de deux variables aléatoires réelles à densité indépendantes

Th. 24 X et Y sont deux variables aléatoires réelles **indépendantes** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de densités respectives f_X et f_Y.

• Si $h : x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,f_Y(x-t)\,\mathrm{d}t$ (resp. $x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)\,f_Y(t)\,\mathrm{d}t$) est définie et continue sauf peut-être en un nombre fini de points alors $X + Y$ est une variable aléatoire à densité admettant h pour densité.

• Si x est dans $\mathbb{R}$, $x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,f_Y(x-t)\,\mathrm{d}t$ et $x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)\,f_Y(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

• h est la **convolée** de f_X et f_Y ou **le produit de convolution** de f_X et f_Y.

★★★ $\boxed{\textbf{PPP}}$ Le programme dit que : **en cas d'utilisation du produit de convolution, la preuve de sa légitimité n'est pas exigible des candidats**. Rien que du bonheur ! !

Th. 25 $\boxed{\textbf{PP}}$ X et Y sont deux variables aléatoires réelles $\boxed{\textbf{indépendantes}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de densités respectives f_X et f_Y.

On suppose que f_X ou que f_Y est bornée.

Alors $X + Y$ est une variable aléatoire à densité et $h : x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(x-t)\, \mathrm{d}t$

(resp. $x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)\, f_Y(t)\, \mathrm{d}t$) en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

★★ On s'efforcera d'utiliser le plus possible ce résultat. Si aucune densité n'est bornée on utilisera le joker du programme sauf si le texte en demande plus...

$\boxed{\textbf{P}}$ Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à densité **indépendantes** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui prennent presque sûrement des valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour étudier le produit $Z = XY$ de ces deux variables on peut étudier successivement $\ln X$, $\ln Y$, $S = \ln X + \ln Y$ (en utilisant le théorème convolution) et e^S.

$\boxed{\textbf{P}}$ Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à densité. On suppose que Y prend presque sûrement ses valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

L'étude de $\dfrac{X}{Y}$ peut se faire en remarquant que, si x est dans $\mathbb{R}$, $P\left(\dfrac{X}{Y} \leqslant x\right) = P(X - xY \leqslant 0)$ et en étudiant $X - xY = X + (-xY)$... En étant soigneux on doit pouvoir utiliser cette méthode lorsque Y prend presque sûrement ses valeurs dans $\mathbb{R}^*$.

Si X prend presque sûrement des valeurs positives, l'étude de $\dfrac{X}{Y}$ peut se faire en passant au log à condition d'avoir un peu d'indépendance...

VI LOIS USUELLES

▸ 1. Lois uniformes

Th. 26 et **déf. 9** a et b sont deux réels tels que $a < b$.

On pose : $\boxed{\forall t \in\,]-\infty, a[\, \cup\,]b, +\infty[,\ f(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in [a, b],\ f(t) = \dfrac{1}{b-a}}\cdot$

f est une densité de probabilité.

Une variable aléatoire réelle X suit la **loi uniforme** sur $[a, b]$ si elle admet pour densité la fonction f. On écrit alors $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])}$.

Th. 27 X est une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur $[a, b]$.

1. Sa fonction de répartition F_X est définie par :

$$\forall x \in]-\infty, a[,\ F_X(x) = 0 \qquad \forall x \in [a, b],\ F_X(x) = \frac{x-a}{b-a} \qquad \forall x \in]b, +\infty[,\ F_X(x) = 1.$$

2. X possède une espérance et une variance ;

$$\boxed{E(X) = \frac{a+b}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}\cdot}$$

Prop. 14 a et b sont deux réels. X est une variable aléatoire réelle.

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]) \quad \text{équivaut à} \quad a + (b-a)\,X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b]).}$$

▶ 2. Lois exponentielles

Th. 28 et **déf. 10** λ est un réel strictement positif.

On pose : $\boxed{\forall x \in]-\infty, 0[,\ f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}}$

f est une densité de probabilité.

Une variable aléatoire réelle X suit la **loi exponentielle** de paramètre λ si elle admet f pour densité. On écrit alors $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)}$.

Th. 29 X est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

1. Sa fonction de répartition F_X est définie par :

$$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_X(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, +\infty[,\ F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

2. X possède une espérance et une variance ;

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}} \quad \text{et} \quad \boxed{V(X) = \frac{1}{\lambda^2}\cdot}$$

Th. 30 $\boxed{!\,!}$ X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

X suit une loi exponentielle $\boxed{\text{si et seulement si}}$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,\ P(X > x) > 0 \quad \text{et} \quad P(X > x + y / X > x) = P(X > y).$$

On parle de processus sans mémoire.

Même si ce résultat n'est pas souvent utilisé, il convient de le savoir par coeur.

Prop. 15 $\boxed{\mathbf{P}}$ λ est un réel strictement positif et X est une variable aléatoire.

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \quad \text{équivaut à} \quad \frac{1}{\lambda}\, X \hookrightarrow \mathcal{E}\,(\lambda)}$$

Prop. 16 **P** λ est un réel strictement positif et X est une variable aléatoire.

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \quad \text{équivaut à} \quad \lambda\, X \hookrightarrow \mathcal{E}\,(1)}$$

▶ 3. Lois gamma

Déf. 11 La **fonction gamma** est la fonction numérique de la variable réelle $x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$.

Nous la noterons Γ.

Th. 31 1. $\Gamma : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ admet pour domaine de définition $]0, +\infty[$.

2. Pour tout réel x strictement positif : $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

3. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)\,!$

★ Notons, pour la suite, que $\forall x \in]0, +\infty[,\ \Gamma(x) > 0$.

★ Si l'on veut être honnête avec le programme on remplacera le 1. par gamma est définie sur $]0, +\infty[$ ce qui n'est pas tout à fait la même chose... En clair il ne semble pas que le programme dise que Γ n'est pas définie sur $]-\infty, 0]$. Notons que si x appartient à $]-\infty, 0]$, $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ diverge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ converge. Il est sans doute utile de savoir le démontrer.

Cor. **P** Pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ converge et $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = n\,!}$.

Th. 32 et **déf. 12** ν est un réel strictement positif.

On pose : $\boxed{\forall t \in]-\infty, 0],\ f(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in]0, +\infty[,\ f(t) = \dfrac{t^{\nu-1}\, e^{-t}}{\Gamma(\nu)}\cdot}$

f est une densité de probabilité.

Une variable aléatoire réelle X suit la **loi gamma** de paramètre ν si elle admet pour densité la fonction f. On écrit alors $\boxed{X \hookrightarrow \gamma(\nu)}$.

Th. 33 X est une variable aléatoire suivant la loi gamma de paramètre ν.

X possède une espérance et une variance ;

$$\boxed{E(X) = \nu} \qquad \text{et} \qquad \boxed{V(X) = \nu.}$$

Th. 34 Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles **indépendantes** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent respectivement une loi gamma de paramètres ν_1 et ν_2.

$X_1 + X_2$ suit la loi gamma de paramètre $\nu_1 + \nu_2$. $\boxed{X_1 + X_2 \hookrightarrow \gamma(\nu_1 + \nu_2)}$.

Cor. 1 X_1, X_2, ..., X_n sont des variables aléatoires réelles **mutuellement indépendantes** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$$\text{Si} \quad \forall i \in [\![1, n]\!],\ X_i \hookrightarrow \gamma(\nu_i) \quad \text{alors} \quad X_1 + X_2 + \cdots + X_n \hookrightarrow \gamma(\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n).$$

Cor. 2 X_1, X_2, ..., X_n sont des variables aléatoires réelles **mutuellement indépendantes** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit la loi gamma de paramètre n. $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \hookrightarrow \gamma(n)$.

★★ Le programme propose pour étudier la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, de se ramener après multiplication par λ à une somme de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$.

▶ 4. Lois normales

Th. 35 et **déf. 13** m est un réel et σ un réel strictement positif. On poses : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}$.

f est une densité de probabilité.

Une variable aléatoire réelle X suit la **loi normale** de paramètres m et σ^2 (ou de paramètre (m, σ^2)) si elle admet pour densité la fonction f. On écrit alors $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)}$. On parle encore de loi de **Laplace-Gauss** ou de loi **Gaussienne**.

★★ Avant 2004-2005, le deuxième paramètre d'une loi normale était son écart-type alors que maintenant c'est le carré de son écart-type (donc sa variance).

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ signifiait que X suit la loi normale d'espérance m et d'écart-type σ. Dans ces conditions nous écrirons aujourd'hui $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Donc attention aux anciens textes...

Il n'y a aucune ambiguïté si l'on donne explicitement l'espérance et l'écart-type ou l'espérance et la variance de la loi normale que l'on considère.

De toute évidence le cas particulier $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, 1^2)$ se transformera en $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, 1)$.

Th. 36 Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres m et σ^2.

X possède une espérance et une variance.

$$\boxed{E(X) = m} \quad \text{et} \quad \boxed{V(X) = \sigma^2.}$$

P Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, le premier paramètre m est l'espérance de X et le second σ^2 est sa variance.

Th. 37 Toute fonction affine non constante d'une variable aléatoire suivant une loi normale suit une loi normale. Précisons. a, b sont deux réels et X une variable aléatoire à densité. On suppose a non nul et on pose : $Y = aX + b$.

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \quad \text{donne} \quad Y = aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}\Big(am + b, (|a|\sigma)^2\Big).}$$

★ Seule la première phrase est à retenir car il est facile de retrouver les paramètres de $Y = aX + b$ a partir de ceux de X.

Th. 38 m est un réel et σ est un réel strictement positif.

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{équivaut à} \quad \sigma X + m \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2).}$$

PP

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \quad \text{équivaut à} \quad X^* = \frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1).}$$

P Ce dernier résultat est essentiel car il permet de ramener l'étude d'une variable aléatoire suivant une loi normale à l'étude d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Précisons encore.

Th. 39 Soit Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle suivant la loi normale centrée réduite.

Soit X une variable aléatoire réelle à densité de fonction de répartition F_X.

On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Alors pour tout réel x : $\boxed{F_X(x) = \Phi\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right).}$

Prop. 17 Soit X une variable aléatoire réelle à densité. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

- X est centrée réduite ; autrement dit $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$.
- X admet pour densité la fonction φ définie par : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}.}$
- φ est l'unique densité de X définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Th. 40 Soit Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle suivant la loi normale centrée réduite.

On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$.

- Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi'(x) = \varphi(x)$.
- Φ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

Prop. 18 Soit Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X suivant la loi normale centrée réduite.

Pour tout réel x :

- $\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$ ou $\boxed{P(X \leqslant -x) = 1 - P(X \leqslant x)}$ ou $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{-x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.}$
- $P(X \leqslant x) = P(X \geqslant -x)$ ou $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-x}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.
- $P(X \leqslant -x) = P(X \geqslant x)$ ou $\displaystyle\int_{-\infty}^{-x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.
- $\boxed{\Phi(0) = \dfrac{1}{2}}$ ou $\boxed{P(X \leqslant 0) = \dfrac{1}{2}}$ ou $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.}$

Prop. 19 Soit Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite.

Pour tout réel x positif ou nul : $\boxed{P(|X| \leqslant x) = 2\Phi(x) - 1}$ et $\boxed{P(|X| \geqslant x) = 2(1 - \Phi(x)).}$

Prop. 20 $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{x^2}{2}}$.

• φ est paire sur $\mathbb{R}$, strictement croissance sur $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

• φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

• $\boxed{\mathbf{P}}$ $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = -x\,\varphi(x)$.

• φ est convexe sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$, et concave sur $[-1, 1]$.

• La courbe représentative de φ admet l'axe $y'y$ pour axe de symétrie et admet deux points d'inflexion d'abscisses -1 et 1.

Prop. 21 Soit Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle suivant la loi normale centrée réduite.

• Φ est convexe sur $]-\infty, 0]$ et concave sur $[0, +\infty[$.

• La courbe représentative de Φ admet le points de coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ comme centre symétrie et ce point est un point d'inflexion.

Th. 41 **Stabilité de la loi normale**

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires **indépendantes** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent respectivement les lois normales de paramètres m_1 et σ_1^2, et m_2 et σ_2^2.

$X_1 + X_2$ suit la loi normale de paramètres $m_1 + m_2$ et $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ (ou $\left(\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)^2$!).

Cor. 1 **Stabilité de la loi normale again**

X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires réelles **mutuellement indépendantes** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$, X_i suit la loi normale de paramètres m_i et σ_i^2.

Alors $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit la loi normale de paramètres $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ et $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2$ (ou $\left(\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2}\right)^2$!).

Cor. 2 **Stabilité de la loi normale toujours**

Soient λ_1, λ_2, ..., λ_n n réels **non tous nuls** et X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires réelles **mutuellement indépendantes** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$, X_i suit la loi normale de paramètres m_i et σ_i^2.

Alors $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n$ suit la loi normale de paramètres $\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \cdots + \lambda_n m_n$ et $\lambda_1^2 \sigma_1^2 + \lambda_2^2 \sigma_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 \sigma_n^2$ (ou $\left(\sqrt{\lambda_1^2 \sigma_1^2 + \lambda_2^2 \sigma_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 \sigma_n^2}\right)^2$!).

▸ 5. Les moments exigés par le programme à partir des concours 2015 pour les variables aléatoires réelles à densité

• Espérance et variance des lois uniformes, exponentielles, γ et normales.

▶ 6. Récapitulatif

Nom de la loi	**Notations**	**Valeurs**		**Une densité**	$E(X)$	$V(X)$
Uniforme	$X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$	$[a,b]$	$a<b$	$f(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } t\in[a,b] \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$\lambda>0$	$f(t)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t\in[0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
Gamma	$X \hookrightarrow \gamma(\nu)$	$\mathbb{R}^+$	$\nu>0$	$f(t)=\begin{cases} \dfrac{t^{\nu-1}\,e^{-t}}{\Gamma(\nu)} & \text{si } t\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{si } t\in]-\infty,0]\end{cases}$	ν	ν
Normale centrée réduite	$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$	$\mathbb{R}$		$f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{t^2}{2}}$	0	1
Normale	$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\sigma>0$	$f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2

VII SAVOIR FAIRE

SF 1 Savoir montrer qu'une variable aléatoire est une variable aléatoire à densité et en trouver une densité.

SF 2 Savoir montrer qu'une application est une densité de probabilité.

SF 3 Savoir, si X est une variable aléatoire à densité, passer d'une densité de X à sa fonction de répartition et réciproquement.

SF 4 Savoir montrer qu'une variable aléatoire à densité possède une espérance (resp. une variance) et savoir la calculer.

SF 5 Savoir montrer qu'une variable aléatoire à densité possède un moment d'ordre r et savoir le calculer.

SF 6 Savoir utiliser $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, F_X'(t)\,\mathrm{d}t$ pour étudier l'existence de $E(X)$ et donner sa valeur.

SF 7 Utiliser les densités du cours pour calculer des intégrales.

SF 8 Utiliser des moments de variables classiques pour calculer des intégrales.

SF 9 Savoir utiliser les densités des lois normales pour calculer des intégrales du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2+bt+c)}\,\mathrm{d}t$ $(a > 0)$.

SF 10 Si X est une variable aléatoire à densité et φ est une fonction numérique d'une variable réelle, savoir montrer (si c'est le cas) que $\varphi \circ X$ est une variable aléatoire à densité et savoir en trouver une densité.

SF 11 Si X est une variable aléatoire à densité et φ est une fonction numérique d'une variable réelle, savoir montrer que $\varphi \circ X$ possède une espérance et savoir la calculer. En clair savoir utiliser le théorème de transfert.

SF 12 Savoir trouver une densité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes à densité. En clair savoir utiliser le théorème de convolution.

SF 13 X et Y sont deux variables aléatoires réelles à densité indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui prennent presque sûrement leurs valeurs dans $]0, +\infty[$. Savoir trouver une densité de XY en passant par $\ln X + \ln Y$

SF 14 X et Y sont deux variables aléatoires réelles à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Savoir étudier $\dfrac{X}{Y}$ en se ramenant à $X - t\,Y$.

SF 15 Savoir reconnaître une densité ou la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité usuelle.

SF 16 Savoir transformer une fonction pour faire apparaître une densité usuelle ou une densité usuelle multipliée par $t \to t^r$.

SF 17 Savoir utiliser la parité d'une densité d'une variable aléatoire pour en calculer les moments.

SF 18 Utiliser les théorèmes de stabilités.

SF 19 Passer d'une loi normale à la loi normale centrée réduite et réciproquement.

SF 20 Savoir exprimer la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi normale à l'aide de la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

SF 21 Savoir utiliser dans "les deux sens" la table de la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi normale normale centrée réduite.

SF 22 Savoir démontrer et utiliser les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

SF 23 Étudier un inf ou un sup d'un nombre fini de variables aléatoires réelles.

SF 24 Étudier une somme, un inf, un sup aléatoire de variables aléatoires réelles.

SF 25 Savoir étudier $Y = [X]$ (partie entière) et $Z = X - [X]$ où X est une variable aléatoire à densité.

VIII DES ERREURS À NE PAS FAIRE

★ Parler de LA densité d'une variable alétaoire à densité.

★ Confondre fonction de répartition et densité.

★ Afficher une densité négative.

★ Afficher une fonction de répartition nulle sur $[a, +\infty[$

X est une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition est la fonction F_X définie par :

$$\forall x \in \,]-\infty, 0[,\ F_X(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, +\infty[,\ F_X(x) = (1 - e^{-x})^3.$$

F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}^*$ donc X est une variable aléatoire à densité. Jusqu'ici pas de problème.

★ $\forall x \in [0, +\infty[,\ F_X(x) = (1 - e^{-x})^3$ donc $\forall x \in [0, +\infty[,\ F'_X(x) = 3\, e^{-x}\, (1 - e^{-x})^2$.

Écrire $\forall x \in]0, +\infty[,\ F_X(x) = (1 - e^{-x})^3$ donc $\forall x \in]0, +\infty[,\ F'_X(x) = 3\, e^{-x}\, (1 - e^{-x})^2$.

★ Faire des fautes sur les densités usuelles .

★ Soit X une variable aléatoire qui suit la loi xxx (loi connue). Soit f une densité de X. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cdots$

Illustration : X suit la loi exponentielle de paramètre λ.

★ Soit f une densité de X. $\forall x \in \,]-\infty, 0[,\ f(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Il faut écrire : posons : $\forall x \in \,]-\infty, 0[,\ f(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$; f est une densité de X.

★ Oublier l'ABSOLUE convergence dans le théorème de transfert.

★ Dire que si X est une variable aléatoire à densité et si φ est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont le domaine de définition contient $X(\Omega)$ alors $\varphi \circ X$ est une variable aléatoire à densité.

★ Dire que la somme de deux variables aléatoires à densité est une variable aléatoire à densité.

★ Écrire des fonctions de répartitions usuelles fausses.

★ Oublier L'INDÉPENDANCE lorsque l'on applique le théorème de convolution.

★ Oublier L'INDÉPENDANCE lorsque l'on applique les théorèmes de stabilités.

★ Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ à la place de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt$ pour obtenir $E(X)$.

IX QUELQUES COMPLÉMENTS ET QUELQUES BONS COUPS POUR AMÉLIORER TA VARAD ATTITUDE

▶ 1. La loi gamma à "deux" paramètres

★★ Notons que cette loi faisait partie du programme jusqu'au concours de 2014. Il est certainement utile d'avoir quelques idées sur le sujet...

Th. 42 et **déf. 14** b et ν sont deux réels strictement positifs.

On pose : $\boxed{\forall t \in]-\infty, 0],\ f(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in]0, +\infty[,\ f(t) = \dfrac{t^{\nu-1}\, e^{-\frac{t}{b}}}{b^{\nu}\Gamma(\nu)}}$.

f est une densité de probabilité.

Une variable aléatoire X suit la **loi gamma** de paramètres b et ν si elle admet pour densité la fonction f. On écrit alors $\boxed{X \hookrightarrow \Gamma(b, \nu)}$.

Prop. 22 La loi exponentielle de paramètre λ coïncide avec la loi gamma de paramètres $\dfrac{1}{\lambda}$ et 1.

Prop. 23 La loi gamma de paramètre ν coïncide avec la loi gamma de paramètres 1 et ν.

Prop. 24 b et ν sont deux réels strictement positifs . X est une variable aléatoire réelle.

$$\boxed{X \hookrightarrow \gamma(\nu) \quad \text{équivaut à} \quad b\,X \hookrightarrow \Gamma(b, \nu)} \qquad \boxed{X \hookrightarrow \Gamma(b, \nu) \quad \text{équivaut à} \quad \frac{1}{b}\,X \hookrightarrow \gamma(\nu)}$$

Th. 43 X est une variable aléatoire réelle suivant la loi gamma de paramètres b et ν.

X possède une espérance et une variance ;

$$\boxed{E(X) = b\,\nu} \qquad \text{et} \qquad \boxed{V(X) = b^2\nu}$$

Th. 44 • Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles **indépendantes** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent respectivement une loi gamma de paramètres b et ν_1, et b et ν_2.

$X_1 + X_2$ suit la loi gamma de paramètres b et $\nu_1 + \nu_2$.

• Plus généralement X_1, X_2, ..., X_n sont des variables aléatoires réelles **mutuellement indépendantes** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$$\text{Si} \quad \forall i \in [\![1, n]\!],\ X_i \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_i) \quad \text{alors} \quad X_1 + X_2 + \cdots + X_n \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n)$$

Cor. X_1, X_2, ..., X_n sont des variables aléatoires réelles **mutuellement indépendantes** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit la loi gamma de paramètre $\dfrac{1}{\lambda}$ et n.

▶ 2. Produit de deux variables aléatoires à densité indépendantes prenant des valeurs positives

P Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à densité **indépendantes** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui prennent presque sûrement des valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour étudier le produit $Z = XY$ de ces deux variables on peut étudier successivement $\ln X$, $\ln Y$, $S = \ln X + \ln Y$ (en utilisant le théorème convolution) et e^S.

▶ 3. Quotient de deux variables aléatoires à densité

P Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à densité. On suppose que Y prend presque sûrement ses valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

L'étude de $\dfrac{X}{Y}$ peut se faire en remarquant que, si x est dans $\mathbb{R}$, $P\left(\dfrac{X}{Y} \leqslant x\right) = P(X - xY \leqslant 0)$ et en étudiant $X - xY = X + (-xY)$... En étant soigneux on doit pouvoir utiliser cette méthode lorsque Y prend presque sûrement ses valeurs dans $\mathbb{R}^*$

Si X prend également des valeurs positives, l'étude de $\dfrac{X}{Y}$ peut se faire en passant au log à condition d'avoir un peu d'indépendance ...

▶ 4. Quelques moments usuels

Prop. 25 X est une variable aléatoire réelles suivant la loi uniforme sur $[a, b]$. r est un élément de $\mathbb{N}$.

X possède un moment d'ordre r qui vaut $\boxed{\dfrac{b^{r+1} - a^{r+1}}{(r+1)\,(b-a)}}$.

Prop. 26 Soit X une variable aléatoire réelles suivant la loi gamma de paramètre ν et r est un élément de $\mathbb{N}^*$.

X possède un moment d'ordre r qui vaut $\boxed{(r+\nu-1)\,(r+\nu-2)\cdots(\nu+1)\,\nu}$.

Prop. 27 Soit X une variable aléatoire réelles réelles suivant la loi gamma de paramètres b et ν et r est un élément de $\mathbb{N}^*$.

X possède un moment d'ordre r qui vaut $\boxed{b^r\,(r+\nu-1)\,(r+\nu-2)\cdots(\nu+1)\,\nu}$.

Prop. 28 Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Pour tout élément r de $\mathbb{N}$, X possède un moment d'ordre r.

$\forall k \in \mathbb{N},\ m_{2k}(X) = E(X^{2k}) = \dfrac{(2k)!}{2^k\,k!}$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ m_{2k+1}(X) = E(X^{2k+1}) = 0$.

▶ 5. Quelques résultats classiques

Prop. 29 λ est un réel strictement positif. X est une variable aléatoire réelle.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, $-\ln X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, $e^{-X} \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, $-\dfrac{1}{\lambda}\ln X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, $e^{-\lambda X} \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

★ On ne sera pas trop regardant avec les bornes...

P Ceci peut être utile pour simuler une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle.

Prop. 30 X_1, X_2,, ..., X_n sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la loi exponentielle de paramètre λ. Alors $\mathrm{Inf}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ suit la loi exponentielle de paramètre $n\lambda$.

Prop. 31 Si X suit la loi gamma de paramètres b et ν, pour tout réel λ strictement positif, λX suit la loi gamma de paramètres λb et ν

Prop. 32 **Loi du khi-deux**.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors $Y = X^2 \hookrightarrow \Gamma\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$.

Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent la loi normale centrée réduite alors $T = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \hookrightarrow \Gamma\left(2, \dfrac{n}{2}\right)$.

Prop. 33 b et ν sont deux réels strictement positifs. c est un réel (nécessairement positif). Si X est une variable aléatoire à densité admettant pour densité f définie par :

$$\forall t \in]-\infty, 0],\ f(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in]0, +\infty[,\ f(t) = c\, t^{\nu-1}\, e^{-\frac{t}{b}}$$

alors X suit une loi gamma de paramètres b et ν.

▶ 6. Utilisation des densités dans le calcul d'intégrales

La loi normale centrée réduite donne : $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}}$

Ce dernier résultat permet de justifier aisément que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}} \quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}} \quad \boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Dans le même ordre d'idée on peut par des changements de variable simples calculer des intégrales du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2+bt+c)}\,dt$ avec a strictement positif en utilisant une densité d'une loi normale. Plus précisément :

Prop. 34 **SD** a est un réel strictement positif. b et c sont deux réels.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a\,t^2+b\,t+c)}\,dt$ existe et vaut : $\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}$

★ Ce résultat n'est pas à apprendre mais à savoir retrouver.

Dans le même ordre d'idée encore on peut à l'aide des lois gamma calculer des intégrales du type $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^r\, e^{-at}\,\mathrm{d}t$ avec a dans $\mathbb{R}^{+*}$ et r dans $\mathbb{N}$.

▶ 7. Existence et calcul de $E(X)$ à partir de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, F'_X(t)\,\mathrm{d}t$

Prop. 35 Soit X une variable aléatoire à densité

X possède une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tF'_X(t)\,\mathrm{d}t$ existe ! En cas d'existence $E(X)$ sera égale à cette dernière intégrale !

★ 1. Ceci ne suppose pas que F_X soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

P 2. Ce résultat est une évidence mais peut être intéressant pour calculer $E(X)$ car il se prête à une intégration par parties.

Prudence car il s'agit d'intégrales généralisées. Notons que $\lim\limits_{t\to+\infty} t\,F_X(t) = +\infty$; on aura intérêt à ce niveau à primitiviser F'_X en $F_X - 1$...

▶ 8. Densité paire

Prop. 36 X est une variable aléatoire réelle à densité.

• Si X admet une densité paire, X et $-X$ ont même loi et réciproquement.

• Si X admet une densité paire et une espérance alors cette espérance est nulle. Même chose pour un moment d'ordre $2r+1$.

▶ 9. $\mathbf{F_X \circ X}$

Th. 45 X est une variable aléatoire réelle à densité. F_X est la fonction de répartition de X.

Alors $F_X \circ X$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$ ou sur un intervalle d'extrémités 0 et 1...

★ Ceci peut être utile pour simuler des lois en utilisant une loi uniforme sur un intervalle d'extrémités 0 et 1.

▶ 10. Quelques lois classiques

• **Loi de Pareto**

Th. 46 et **déf. 15** α et x_0 sont deux réels strictement positifs. On pose : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\, x_0^\alpha}{t^{\alpha+1}} & \text{si } t \in [x_0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

f est une densité de probabilité.

Une variable aléatoire réelle X suit **la loi de Pareto** de paramètres α et x_0 si elle admet pour densité f. On écrit alors $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{VP}(\alpha, x_0)}$.

Prop. 37 Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi de Pareto de paramètres α et x_0.

Soit F_X sa fonction de répartition. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^\alpha & \text{si } x \in [x_0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On ajoute parfois un paramètre C telle que $x_0 + C > 0$ (à la place de $x_0 > 0$).

f devient : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\,(x_0+C)^\alpha}{(t+C)^{\alpha+1}} & \text{si } t \in [x_0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

C'est la loi de Pareto à trois paramètres que l'on note $\mathcal{VP}(\alpha, x_0, C)$. La fonction de répartition est alors définie par

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{x_0+C}{x+C}\right)^\alpha & \text{si } x \in [x_0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Prop. 38 Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi de Pareto de paramètres α et x_0.

$E(X)$ existe si et seulement si $\alpha > 1$ et dans ce cas $E(X) = \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\, x_0$.

$V(X)$ existe si et seulement si $\alpha > 2$ et dans ce cas $V(X) = \dfrac{\alpha}{(\alpha-2)\,(\alpha-1)^2}\, x_0^2$.

Illustrations 1. λ et x_0 sont des réels strictement positifs et k est un réel strictement supérieur à 1.

$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ donne $x_0\, k^X \hookrightarrow \mathcal{VP}\left(\dfrac{\lambda}{\ln k}, x_0\right)$.

2. $X \hookrightarrow \mathcal{VP}(\alpha, x_0)$ donne $\sqrt{X} \hookrightarrow \mathcal{VP}(2\,\alpha, \sqrt{x_0})$.

• **Loi de Cauchy**

Th. 47 et **déf. 16** a est un réel strictement positif. On pose : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{a}{\pi(a^2+t^2)}\cdot$

f est une densité de probabilité.

Une variable aléatoire réelle X suit **la loi de Cauchy** de paramètre a si elle admet pour densité f. On écrit alors $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{C}(a)}$.

Prop. 39 Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi de Cauchy de paramètre a.

Soit F_X sa fonction de répartition. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\ \arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)\cdot$

On ajoute parfois un paramètre de dispersion x_0 (au paramètre d'échelle a) et f devient : $t \to \dfrac{a}{\pi(a^2+(t-x_0)^2)}\cdot$

C'est la loi de Cauchy de paramètres x_0 et a. La fonction de répartition est alors $x \to \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\ \arctan\left(\dfrac{x-x_0}{a}\right)\cdot$

Prop. 40 Une variable aléatoire réelle qui suit une loi de Cauchy n'a pas d'espérance.

Prop. 41 Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles $\boxed{\textbf{indépendantes}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent respectivement une loi de cauchy de paramètres a_1 et a_2.

$X_1 + X_2$ suit la loi de Cauchy de paramètre $a_1 + a_2$. $\boxed{X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{C}(a_1+a_2).}$

Illustrations. 1. Si X est uniforme sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\pi}{2}\right]$, $Y = \tan X$ suit la loi de Cauchy de paramètre 1.

2. Si X et Y sont des variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la loi normale centrée réduite, $\dfrac{X}{Y}$ suit loi de Cauchy de paramètre 1.

- **Loi Log-normale**

Déf. 17 Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

X suit **la loi Log-normale** de paramètres m et σ^2 ($\sigma > 0$) si il existe une variable aléatoire réelle Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi normale de paramètres m et σ^2 et telle que $X = e^Y$. On écrit $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{LN}(m, \sigma^2).}$

Prop. 42 Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(m, \sigma^2) \Longleftrightarrow \ln X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Prop. 43 X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi Log-normale de paramètres m et σ.

1. $t \to \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\sigma\, t)}\ e^{-\frac{(\ln t - m)^2}{2\,\sigma^2}}$ est une densité de X.

2. X possède une espérance et une variance. $E(X) = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$ et $V(X) = (e^{\sigma^2}-1)\, e^{2\,m+\sigma^2}$.

- **Loi Bêta**

Th. 48 et **déf. 18** α et β sont deux réels strictement positifs.

- $B(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente et strictement positive.
- $B(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\cdot$
- On pose $\forall t\in]-\infty,0]\cup[1,+\infty[,\ f(t)=0\quad$ et $\quad\forall t\in]0,1[,\ f(t)=\dfrac{t^{a-1}(1-t)^{b-1}}{B(\alpha,\beta)}\cdot$

f est une densité de probabilité.

Une variable aléatoire X suit une **la loi Bêta** de paramètres α et β si elle admet pour densité f. On écrit alors $\boxed{X\hookrightarrow\mathcal{B}(\alpha,\beta).}$

Illustration. Si X est uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}\,\frac{\pi}{2}]$, $Y=\sin^2 X$ suit la loi bêta de paramètres $\frac12$ et $\frac12$.

Prop. 44 Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi de Bêta de paramètres α et β.

- Pour tout r dans $\mathbb{N}$, X possède un moment d'ordre r.
- $E(X)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ et $V(X)=\dfrac{\alpha\,\beta}{(\alpha+\beta)^2\,(\alpha+\beta+1)}\cdot$
- $\forall r\in\mathbb{N}^*,\ E(X^r)=\displaystyle\prod_{i=0}^{r-1}\frac{\alpha+i}{\alpha+\beta+i}\cdot$

- **Loi de Weibull**

Th. 49 et **déf. 19** α et λ sont des réels strictement positifs. On pose $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\alpha\lambda x^{\alpha-1}e^{-\lambda\ x^{\alpha}} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\leqslant 0\end{cases}.$

f est une densité de probabilité.

Une variable aléatoire réelle X suit **la loi de Weibull** de paramètres α et λ si elle admet pour densité f. On écrit alors $\boxed{X\hookrightarrow\mathcal{W}(\alpha,\lambda)}$.

Prop. 45 Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi de Weibull de paramètres α et λ.

Soit F_X sa fonction de répartition. $\forall x\in\mathbb{R},\ F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda\,x^{\alpha}} & \text{si } x\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$

Prop. 46 Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi de Weibull de paramètres α et λ.

X possède une espérance qui vaut $\dfrac{1}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}\,\Gamma\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

X possède une variance qui vaut $\dfrac{1}{\lambda^{\frac{2}{\alpha}}}\left(\Gamma\left(1+\dfrac{2}{\alpha}\right)-\left(\Gamma\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)\right)^2\right)$.

À compléter