Exercice 19 ESCP 98 X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{B}, p)$ qui suivent une loi uniforme sur $]0, r]$. On pose $U = \ln(X/r)$ et $V = -\ln(Y/r)$.

Q1. a) Etudier U et V.
b) Trouver une densité de $U + V$.
c) Etudier $Q = X/Y$ et $Q' = 1/Q$.

Q2. Z_1, Z_2, ..., Z_n sont n variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{B}, p)$ qui suivent une loi uniforme sur $]0, r]$. Pour tout i on pose $W_i = 1/Z_i$.
a) Montrer que W_1 suit une loi de Pareto.
b) Même chose pour $W = \mathrm{Min}(W_1, W_2, \dots, W_n)$. Trouver l'espérance et la variance de W.

Q1 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_U(x) = p(\ln(X/r) \leq x) = p(X \leq r e^x) = F_X(re^x)$.

Notons que $F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty, 0[\\ \frac{t}{r} & \text{si } t \in [0, r] \\ 1 & \text{si } t \in]r, +\infty[\end{cases}$. Notons que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty, 0],\ re^x \in [0, r] \text{ et} \\ \forall x \in]0, +\infty[,\ re^x \in]r, +\infty[\end{cases}$

Ainsi $F_X(re^x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 1 & \text{si } x \in]0, +\infty[\text{ ou } x \in [0, +\infty[\end{cases}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 1 & \text{si } x \in]0, +\infty[\text{ ou } x \in [0, +\infty[\end{cases}$.

F_U est de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$ donc F_U est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. <u>U est une variable aléatoire à densité.</u>

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F'_U(x) = e^x$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $F'_U(x) = 0$.

Posons $\forall x \in]-\infty, 0]$, $f_U(x) = e^x$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $f_U(x) = 0$. <u>f_U est une densité de U.</u>

$V = -U$ donc $f_V : x \mapsto \frac{1}{|-1|} f_U\left(\frac{x}{-1}\right)$ est une densité de V.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_V(x) = f_U(-x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\end{cases}$. <u>Alors $V \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.</u>

b) X et Y sont indépendantes donc U et V également.

Alors $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x-t)\, dt$ est une densité de $U+V$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \int_{-\infty}^{0} e^t f_V(x-t)\, dt \overset{u = x-t}{=} \int_{x}^{+\infty} e^{x-u} f_V(u)\, du$.

Soit $x \in]-\infty, 0[$. $h(x) = \int_0^{+\infty} e^{x-u} e^{-u} du = \lim_{A \to +\infty} \left[e^x \frac{e^{-2u}}{-2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} e^x$.

Soit $x \in [0, +\infty[$, $h(x) = \int_x^{+\infty} e^{x-u} e^{-u} du = \lim_{A \to +\infty} \left[e^x \frac{e^{-2u}}{-2} \right]_x^{+\infty} = \frac{1}{2} e^{-x}$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$. h est une densité de $U+V$.

c) $\varphi = \frac{X}{Y} = \frac{re^U}{re^{-V}} = e^{U+V}$. h est une densité de $U+V$. Le cours ou presque

montre qu'on peut : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_\varphi(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0] \\ \frac{1}{x} h(\ln x) \text{ si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$ on obtient une

densité de φ.

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $f_\varphi(x) = 0$. $\forall x \in]0, +\infty[$, $f_\varphi(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{2} e^{-|\ln x|}$.

$\forall x \in]0, 1]$, $f_\varphi(x) = \frac{1}{2x} e^{\ln x} = \frac{1}{2}$. $\forall x \in]1, +\infty[$, $f_\varphi(x) = \frac{1}{2x} e^{-\ln x} = \frac{1}{2x^2}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_\varphi(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0] \\ \frac{1}{2} \text{ si } x \in]0, 1] \\ \frac{1}{2x^2} \text{ si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$

φ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ donc $\varphi' = \frac{1}{\varphi}$ aussi.

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_{\varphi'}(x) = p(\varphi' \leq x) = 0$.

Soit $x \in]0, +\infty[$. $F_{\varphi'}(x) = p(\frac{1}{\varphi} \leq x) = p(\frac{1}{x} \leq \varphi) = 1 - F_\varphi(\frac{1}{x}) = 1 - \int_0^{1/x} f_\varphi(t) dt$.

$\underline{p(\varphi > 0) = 1}$

- $x \in [1, +\infty[$. $F_{\varphi'}(x) = 1 - \int_0^{1/x} \frac{1}{2} dt = 1 - \frac{1}{2x}$ car $\frac{1}{x} \in]0, 1]$

- $x \in]0, 1[$. $F_{\varphi'}(x) = 1 - \int_0^1 \frac{1}{2} dt - \int_1^{1/x} \frac{1}{2t^2} dt = 1 - \frac{1}{2} - \left[-\frac{1}{2t} \right]_1^{1/x} = \frac{1}{2} x$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{\varphi'}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0] \\ \frac{1}{2} x \text{ si } x \in]0, 1[\text{ ou } [0,1] \\ 1 - \frac{1}{2x} \text{ si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$.

$F_{Q'}$ est de classe C^1 sur $]-\infty,0]$, $[0,1]$ et $[1,+\infty[$ donc $F_{Q'}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$.

Q' est une variable aléatoire à densité.

$\forall x\in]-\infty,0[$, $F'_{Q'}(x)=0$; $\forall x\in]0,1[$, $F'_{Q'}(x)=\frac{1}{2}$ et $\forall x\in]1,+\infty[$, $F'_{Q'}(x)=\frac{1}{2x^2}$.

Ainsi f_Q est encore une densité de Q' non ? Q et Q' ont même loi.

Quelle surprise !! Et si on avait d'abord remarqué que $Q'=\frac{Y}{X}$?!

Q2 a) $W_1=\frac{1}{Z_1}$. Z_1 prend ses valeurs dans $]0,r]$ donc W_1 prend ses valeurs dans $[\frac{1}{r},+\infty[$. Soit $x\in\mathbb{R}$.

Si $x\in]-\infty,\frac{1}{r}[$, $P(W_1\leq x)=0$; $F_{W_1}(x)=0$.

Soit $x\in[\frac{1}{r},+\infty[$.

$$F_{W_1}(x)=P\left(\frac{1}{Z_1}\leq x\right) \underset{P(Z_1>0)=1}{=} P\left(\frac{1}{x}\leq Z_1\right)=1-P\left(Z_1<\frac{1}{x}\right)=1-F_{Z_1}\left(\frac{1}{x}\right).$$

$x\in[\frac{1}{r},+\infty[$; $\frac{1}{x}\in]0,r]$. $F_{W_1}(x)=1-\dfrac{\frac{1}{x}-0}{r-0}=1-\dfrac{1}{rx}$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F_{W_1}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in]-\infty,\frac{1}{r}[\text{ ou }]-\infty,\frac{1}{r}]\\ 1-\frac{1}{rx} & \text{si } x\in[\frac{1}{r},+\infty[\end{cases}$$

F_{W_1} est de classe C^1 sur $]-\infty,\frac{1}{r}]$ et sur $[\frac{1}{r},+\infty[$ donc F_{W_1} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{\frac{1}{r}\}$. W_1 est une variable aléatoire à densité.

$\forall x\in]-\infty,\frac{1}{r}[$, $F'_{W_1}(x)=0$ et $\forall x\in]\frac{1}{r},+\infty[$, $F'_{W_1}(x)=\frac{1}{rx^2}$.

Posons $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_1(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in]-\infty,\frac{1}{r}[\\ \frac{1}{rx^2} & \text{si } x\in[\frac{1}{r},+\infty[\end{cases}$; f_1 est une densité de W_1.

Ainsi W_1 suit une loi de Pareto ; plus précisément $W_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(1,\frac{1}{r},0)$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_W(x) = P(W \leqslant x) = 1 - P(W > x) = 1 - P(\min(W_1, \dots, W_n) \geqslant x)$.

$F_W(x) = 1 - P(\{W_1 \geqslant x\} \cap \dots \cap \{W_n \geqslant x\}) = 1 - (P(W_1 \geqslant x))^n$.

$F_W(x) = 1 - (1 - P(W_1 < x))^n = 1 - (1 - F_{W_1}(x))^n$.

$\forall x \in]-\infty, \frac{1}{r}[$, $F_W(x) = 1 - (1-0)^n = 0$

$\forall x \in [\frac{1}{r}, +\infty[$, $F_W(x) = 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{rx}\right)\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{rx}\right)^n$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, \frac{1}{r}[\text{ ou si } x \in]-\infty, \frac{1}{r}] \\ 1 - \left(\frac{1}{rx}\right)^n & \text{si } x \in [\frac{1}{r}, +\infty[\end{cases}$$

F_W est de classe C^1 sur $]-\infty, \frac{1}{r}]$ et sur $[\frac{1}{r}, +\infty[$.

F_W est donc continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{1/r\}$

$\forall x \in]-\infty, \frac{1}{r}[$, $F_W(x) = 0$ et $\forall x \in]\frac{1}{r}, +\infty[$, $F'_W(x) = \frac{n}{r^n} \frac{1}{x^{n+1}}$

<u>Pour $\forall x \in]-\infty, \frac{1}{r}[$, $f_W(x) = 0$ et $\forall x \in [\frac{1}{r}, +\infty[$, $f_W(x) = \frac{n}{1/r} \left(\frac{1/r}{x}\right)^{n+1}$ est une densité</u>

<u>de W et W suit une loi de Pareto.</u> <u>$W \hookrightarrow P(n, \frac{1}{r}, 0)$</u>

Exercice 20 ESCP 98 Z et T sont deux variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, p)$ indépendantes suivant toutes les deux une loi uniforme sur $[0,1]$. p 34

Q1. Donner la fonction de répartition et une densité de la variable $-T$.

Q2. Donner la fonction de répartition et une densité de la variable Z^2.

Q3. Donner une densité et la fonction de répartition de la variable $Z^2 - T$. Représenter graphiquement cette densité.

Q1 Pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\\ 1 \text{ si } x \in [0,1] \end{cases}$. f est une densité de T.

Alors $g : x \mapsto \frac{1}{|-1|} f\left(\frac{x}{-1}\right)$ est une densité de $-T$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(-x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [-1, 0] \\ 0 \text{ si } x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[\end{cases}$.

Ceci prouve que $-T \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,0])$ ce qui n'est pas une grosse surprise.

Q2 Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_{Z^2}(x) = p(Z^2 \leq x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\\ p(-\sqrt{x} \leq Z \leq \sqrt{x}) \text{ si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$.

$\forall x \in [0, +\infty[$, $F_{Z^2}(x) = F_Z(\sqrt{x}) - F_Z(-\sqrt{x}) = \begin{cases} \sqrt{x} \text{ si } x \in [0,1] \\ 1 \text{ si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$ $\left(F_Z(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in]-\infty, 0[\\ t \text{ si } t \in [0,1] \\ 1 \text{ si } t \in]1, +\infty[\end{cases} \right)$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Z^2}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\text{ ou }]-\infty, 0] \\ \sqrt{x} \text{ si } x \in [0,1] \\ 1 \text{ si } x \in]1, +\infty[\text{ ou } [1, +\infty[\end{cases}$.

F_{Z^2} est donc de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$, $[0,1]$ et $[1, +\infty[$.

Ainsi F_{Z^2} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$; Z^2 est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, $F'_{Z^2}(x) = 0$ et $\forall x \in]0,1[$, $F'_{Z^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{Z^2}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[\\ 1/2\sqrt{x} \text{ si } x \in]0,1[\end{cases}$; f_{Z^2} est une densité de Z^2.

Q3 Z et T sont indépendantes donc Z^2 et $(-T)$ également.

Alors $Z^2 - T$ est une variable aléatoire à densité et admet pour densité $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z^2}(t) g(x-t) dt$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} g(x-t) dt = \int_{x-1}^{x} \frac{1}{2\sqrt{x-u}} g(u) du$. Rappelons que $\forall u \in \mathbb{R}$, $g(u) = \begin{cases} 0 \text{ si } u \notin [-1, 0] \\ 1 \text{ si } u \in [-1, 0] \end{cases}$

Si $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $h(x) = \int_{x-1}^{x} \frac{1}{2\sqrt{x-u}} \times 0 \, du = 0$.

Si $x \in [-1, 0[$, $h(x) = \int_{x-1}^{x} \frac{1}{2\sqrt{x-u}} g(u) du = \int_{-1}^{x} \frac{1}{2\sqrt{x-u}} du = \left[-\sqrt{x-u}\right]_{-1}^{x} = \sqrt{x+1}$.

Si $x \in [0, 1]$, $h(x) = \int_{x-1}^{x} \frac{1}{2\sqrt{x-u}} g(u) du = \int_{x-1}^{0} \frac{1}{2\sqrt{x-u}} du = \left[\sqrt{x-u}\right]_{x-1}^{0} = 1 - \sqrt{x}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \in [-1,0[\\ 1-\sqrt{x} & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$. h est une densité de Z^2-T.

Rat nulle en dehors de $[-1,1]$.

Notons F la fonction de répartition de Z^2-T. $\forall x \in]-\infty,-1[$, $F(x)=0$ et $\forall x \in]1,+\infty[$, $F(x)=1$

Soit $x \in [-1,0[$. $F(x) = \int_{-1}^{x} h(t)dt = \int_{-1}^{x} (\sqrt{t+1})dt = \left[\frac{2}{3}(t+1)^{3/2}\right]_{-1}^{x} = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$.

Soit $x \in [0,1]$; $F(x) = \int_{-1}^{x} h(t)dt = \int_{-1}^{0} \sqrt{t+1}\,dt + \int_{0}^{x}(1-\sqrt{t})dt = \left[\frac{2}{3}(t+1)^{3/2}\right]_{-1}^{0} + \left[t - \frac{2}{3}t^{3/2}\right]_{0}^{x}$

$F(x) = \frac{2}{3} + x - \frac{2}{3}x^{3/2}$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,-1[\\ \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} & \text{si } x \in [-1,0[\\ \frac{2}{3} + x - \frac{2}{3}x\sqrt{x} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$

Exercice 21 n particules se désintègrent de façon indépendante.

Pour i élément de $[\![1,n]\!]$, la durée de vie X_i de la $i^{\text{ème}}$ particule suit une loi exponentielle de paramètre λ.

On pose $M = \text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $I = \text{Min}(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Q1. Etudier M et I. Calculer $E(I)$.

Q2. Montrer que $E(M) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Q3. t est un réel strictement positif. Etudier la variable aléatoire N_t égale au nombre de particules désintégrées entre les instants 0 et t.

Q1 Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_M(x) = p(M \leq x) = p(\{X_1 \leq x\} \cap \dots \cap \{X_n \leq x\}) \underset{\text{indépendance}}{=} p(X_1 \leq x) \cdots p(X_n \leq x) = (p(X_1 \leq x))^n$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_M(x) = (F_{X_1}(x))^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0[\text{ ou} \\ (1-e^{-\lambda x})^n & \text{si } x \in [0,+\infty[. \end{cases}$

Alors F_M est de classe C^1 sur $]-\infty,0[$ et $[0,+\infty[$; F_M est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}^*$. M est une variable aléatoire à densité. $\forall x \in]-\infty,0[$, $F_M'(x)=0$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $F_M'(x) = n\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}$. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0[\\ n\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x \in [0,+\infty[\end{cases}$. f_M est une densité de M.

$\forall x \in \mathbb{R}, F_I(x) = p(I \leq x) = 1 - p(I > x) = 1 - p(\{X_1 > x\} \cap \dots \cap \{X_n > x\}) = 1 - p(X_1 > x) \cdots p(X_n > x) = 1 - (1 - F_{X_1}(x))^n$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F_J(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\,]-\infty,0[\\ 1-e^{-n\lambda x} & \text{si } x\in[0,+\infty[\end{cases}$$

Ainsi J suit une loi exponentielle de paramètre λn et $E(J)=\dfrac{1}{n\lambda}$.

(Q2) $\forall t\in\,]-\infty,0[,\ tg(t)=0$. $\int_{-\infty}^{0} tg(t)\,dt$ existe et vaut 0.

$$\forall t\in[0,+\infty[,\quad tg(t)=tn\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}=n\lambda\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}(-1)^k t\,(e^{-\lambda t})^{k+1}$$

$$\forall t\in[0,+\infty[,\quad tg(t)=n\lambda\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}(-1)^k\,t\,e^{-\lambda(k+1)t}.$$

$$\forall t\in[0,+\infty[,\quad tg(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{k+1}C_{n-1}^{k}(-1)^k\,\lambda(k+1)\,t\,e^{-\lambda(k+1)t}$$

Or $\int_0^{+\infty}\lambda(k+1)t\,e^{-\lambda(k+1)t}\,dt$ existe et vaut $\dfrac{1}{\lambda(k+1)}$ comme espérance d'une variable qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda(k+1)$.

Ainsi $\int_0^{+\infty}tg(t)\,dt$ converge comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes

$$\int_0^{+\infty}tg(t)\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{\frac{n}{k+1}C_{n-1}^{k}}_{C_n^{k+1}}(-1)^k\int_0^{+\infty}\lambda(k+1)t\,e^{-\lambda(k+1)t}\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}C_n^{k+1}(-1)^k\frac{1}{\lambda(k+1)}.$$

Finalement $E(T)$ existe et vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}C_n^{k+1}(-1)^k\frac{1}{\lambda(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}C_n^{k}(-1)^{k-1}\frac{1}{\lambda k}$

$$E(T)=\sum_{k=1}^{n}C_n^k(-1)^{k-1}\frac{1}{\lambda}\int_0^1 t^{k-1}\,dt=\frac{1}{\lambda}\int_0^1\sum_{k=1}^{n}C_n^k(-t)^{k-1}\,dt=\frac{1}{\lambda}\int_0^1\frac{1}{-t}\Big[\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-t)^k-1\Big]dt$$

$$E(T)=\frac{1}{\lambda}\int_0^1\frac{(1-t)^n-1}{-t}\,dt=\frac{1}{\lambda}\int_0^1\frac{(1-t)^n-1}{(1-t)-1}\,dt=\frac{1}{\lambda}\int_0^1\sum_{k=0}^{n-1}(1-t)^k\,dt$$

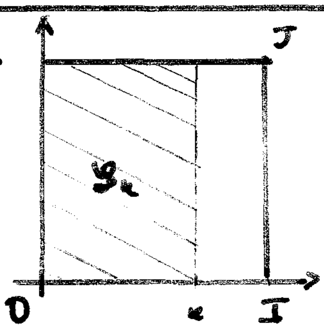
$$E(T)=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1(1-t)^k\,dt=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\Big[-\frac{(1-t)^{k+1}}{k+1}\Big]_0^1=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Donc $\underline{\underline{E(T)=\dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}}}$.

cet exercice est extrait du ECRICOME 97-PB mais on en reste à $E(T)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}C_n^{k+1}\frac{(-1)^k}{\lambda(k+1)}$ ... les pleutres!

Exercice 22 ESCP 95 On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$. On tire sur la cible représentée par le carré de sommets O, I, K, J de coordonnées respectives $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$. On suppose que pour toute partie A de la cible, la probabilité que le point d'impact soit dans A est égale à l'aire de A.
On note X et Y les coordonnées aléatoires du point d'impact.
Q1. Etudier X et Y.
Q2. Soit Z la variable aléatoire égale au produit XY. Déterminer $Z(\Omega)$. Pour tout t dans $Z(\Omega)$, que représente graphiquement $\{Z \leqslant t\}$.
Trouver la loi de Z. Calculer, si possible son espérance et sa variance.
Q3. Même chose avec $T = Y/X$.
Q4. Etudier $U = [T]$ (partie entière).

Q1



Q1 X prend ses valeurs dans $[0,1]$.

$\forall x \in]-\infty,0[$, $F_X(x) = p(X \leq x) = 0$

$\forall x \in]1,+\infty[$, $F_X(x) = p(X \leq x) = 1$

Soit $x \in [0,1]$. $F_X(x) = p(X \leq x) = S_x$ où S_x est l'aire du carré $\mathcal{S}_x$ ~~de sommets~~ O, le point de coord. $(x,0)$, le point de coordonnées $(x,1)$ et K. $S_x = x \times 1 = x$.

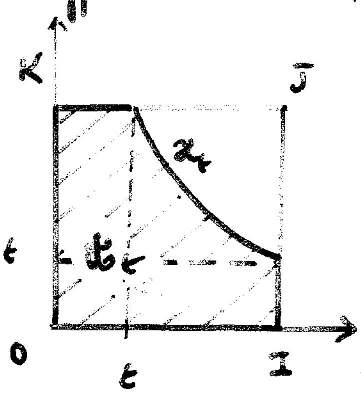
Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty,0[\\ x \text{ si } x \in [0,1] \\ 1 \text{ si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$. $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. De même $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

Q2 Z prend ses valeurs dans $[0,1]$.

Soit $t \in [0,1]$. Si $t = 0$, $F_Z(t) = p(Z \leq t) = 0$; supposons donc $t \in]0,1]$.

$F_Z(t) = p(Z \leq t) = p(XY \leq t) = A_t$ où A_t est l'aire de la partie du plan $\mathcal{D}_t = \{M(x,y) \in \mathcal{P} \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \text{ et } xy \leq t\}$.

$\mathcal{D}_t$ est aussi la partie du plan limitée par les demi-droites $[OI)$, $[OK)$, $[KJ$, $[IJ]$ et l'hyperbole $\mathcal{H}_t$ d'équation $xy = t$.



Ainsi $F_Z(t) = p(XY \leq t) = A_t = S_t + \int_t^1 \frac{t}{x}\,dx$

$F_Z(t) = t \times 1 + t\left[\ln x\right]_t^1 = t - t\ln t$.

Finalement $\forall t \in \mathbb{R}$, $F_Z(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in]-\infty,0] \\ t - t\ln t \text{ si } t \in]0,1] \\ 1 \text{ si } t \in]1,+\infty[\text{ ou } [1,+\infty[\end{cases}$

Ainsi F_Z est continue et même de classe C^1 sur $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

Alors F_Z est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$, continue à gauche en 0 et de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$.

$\lim_{t\to 0^+} F_Z(t) = \lim_{t\to 0^+} (t - t\ln t) = 0 = F_Z(0)$; F_Z est continue à droite en 0.

Ainsi F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$. <u>Z est une var à densité.</u>

$\forall t\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$, $F_Z'(t)=0$ et $\forall t\in]0,1[$, $F_Z'(t) = 1-\ln t - t\times\frac{1}{t} = -\ln t$.

Posons $\forall t\in\mathbb{R}$, $f_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t\in]-\infty,0]\cup]1,+\infty[\\ -\ln t & \text{si } t\in]0,1] \end{cases}$; f_Z est une densité de Z.

Soit $k\in\mathbb{N}$. $t\mapsto t^k f_Z(t)$ est continue en tout point de $\mathbb{R}-\{0,1\}$, ainsi $t\mapsto t^k f_Z(t)$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$!

$\int_{-\infty}^0 t^k f_Z(t)\,dt$ et $\int_1^{+\infty} t^k f_Z(t)\,dt$ convergent et valent 0.

$\forall\varepsilon\in]0,1]$, $\int_\varepsilon^1 t^k f_Z(t)\,dt = \int_\varepsilon^1 t^k(-\ln t)\,dt = \left[-\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln t\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \left(-\frac{t^{k+1}}{k+1}\times\frac{1}{t}\right)dt$.

$\forall\varepsilon\in]0,1]$, $\int_\varepsilon^1 t^k f_Z(t)\,dt = \frac{\varepsilon^{k+1}\ln\varepsilon}{k+1} + \int_\varepsilon^1 \frac{t^k}{(k+1)}\,dt = \frac{\varepsilon^{k+1}\ln\varepsilon}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2}\left[1-\varepsilon^{k+1}\right]$.

$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 t^k f_Z(t)\,dt = 0 + \frac{1}{(k+1)^2}$; $\int_0^1 t^k f_Z(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{(k+1)^2}$.

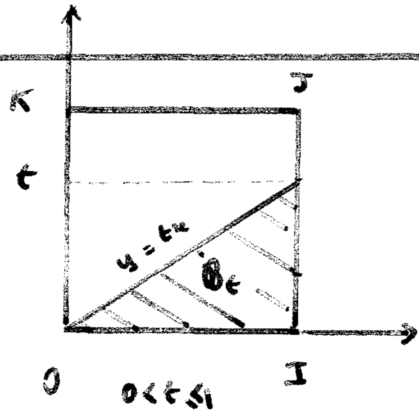
Ainsi pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f_Z(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{(k+1)^2}$.

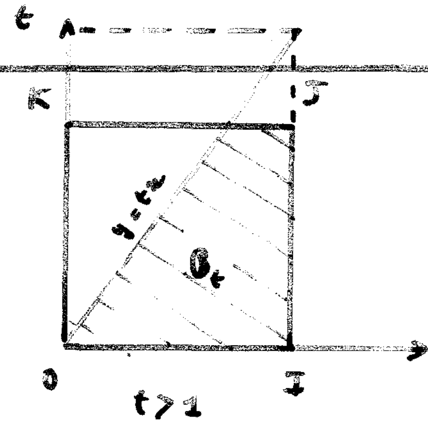
Pour tout $k\in\mathbb{N}$, Z possède un moment d'ordre k qui vaut $\frac{1}{(k+1)^2}$.

En particulier $E(Z)$ et $E(Z^2)$ existent, $E(Z)=\frac{1}{4}$ et $E(Z^2)=\frac{1}{9}$.

Alors $V(Z)$ existe et $V(Z) = \frac{1}{9} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{144}$.

$E(Z)=\frac{1}{4}$ et $V(Z)=\frac{7}{144}$.





(Q3)

Notons que $T=\frac{Y}{X}$ prend ses valeurs dans $[0,+\infty[$ ... après avoir remarqué que $P(X=0)=0$.

$\forall t\in]-\infty,0[$, $F_T(t)=P(T\leq t)=0$; clairement $F_T(0)=P(\frac{Y}{X}\leq 0)=0$.

Soit $t\in]0,+\infty[$. $F_T(t)=P(\frac{Y}{X}\leq t)\underset{\uparrow}{=}P(Y\leq tX)=P(0\leq tX-Y)$

$P(X>0)=1$!

Considérons $B_t=\{M(x,y)\in P \mid x\geq 0, y\geq 0, x\leq 1, y\leq 1, tx-y\geq 0\}$

B_t est la partie de plan limitée par les 5 demi-plans "d'inéquations" $x\geq 0, y\geq 0, x\leq 1, y\leq 1$ et $tx-y\geq 0$.

$F_T(t)$ est l'aire de B_t.

Trapèze !

Si $t\leq 1$: $F_T(t)=\frac{1}{2}t\times 1$ et si $t\in]1,+\infty[$, $F_T(t)\overset{\downarrow}{=}1\times\frac{1+(1-1/t)}{2}=1-\frac{1}{2t}$.

$\forall t\in\mathbb{R}$, $F_T(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t\in]-\infty,0] \\ \frac{1}{2}t & \text{si } t\in]0,1] \text{ ou } [0,1] \\ 1-\frac{1}{2t} & \text{si } t\in]1,+\infty[\text{ ou } [1,+\infty[\end{cases}$. F_T est de classe C^1 sur $]-\infty,0]$, $[0,1]$ et $[1,+\infty[$.

F_T est donc continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$ au moins.

<u>T est une variable aléatoire à densité</u>. $\forall t\in]-\infty,0[$, $F_T'(t)=0$. $\forall t\in]0,1[$ $F_T'(t)=\frac{1}{2}$ et $\forall t\in]1,+\infty[$, $F_T'(t)=\frac{1}{2t^2}$.

Pour $\forall t\in\mathbb{R}$, $f_T(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t\in]-\infty,0[\\ 1/2 & \text{si } t\in[0,1] \\ 1/(2t^2) & \text{si } t\in]1,+\infty[\end{cases}$; <u>f_T est une densité de T.</u>

$\int_1^{+\infty} t f_T(t)\,dt=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2t}\,dt$ diverge donc T n'a pas d'espérance... ni de variance.

Q4) T prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc U prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

$p(U=0)=p(0\leq T<1)=\int_0^1 \frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2}$.

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $p(U=k)=p(k\leq T<k+1)=\int_k^{k+1}\frac{1}{2t^2}\,dt=\left[-\frac{1}{2t}\right]_k^{k+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2k(k+1)}$.

$p(U=0)=0$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $p(U=k)=\frac{1}{2k(k+1)}$ ... montrons que U n'a pas d'espérance.

<u>Exercice 23</u> X est une variable aléatoire de densité f paire et continue sur $\mathbb{R}$.

On pose $Y=X^2$ et on suppose que : $Y\hookrightarrow\mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer f.

Posons $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\,]-\infty,0]\\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(f(\sqrt{x})+f(-\sqrt{x})\right) & \text{si } x\in\,]0,+\infty[\end{cases}$. g est une densité de X^2.

Par parité : $\forall x\in\,]0,+\infty[$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})$.

$x\mapsto f(\sqrt{x})$ et $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$ sont continues sur $]0,+\infty[$ donc g l'est également.

De plus g est continue sur $]-\infty,0[$.

Ainsi g est au moins continue en tout point de $\mathbb{R}^*$. Alors F_{X^2} est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $F'_{X^2}(x)=g(x)$.

Rappelons que $Y=X^2$ et que $Y\hookrightarrow\mathcal{E}(\lambda)$. Alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_{X^2}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\,]-\infty,0[\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x\in[0,+\infty[\end{cases}$

Ainsi $\forall x\in\,]0,+\infty[$, $\frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})=g(x)=F'_{X^2}(x)=\lambda e^{-\lambda x}$.

$\forall x\in\,]0,+\infty[$, $f(\sqrt{x})=\lambda\sqrt{x}\,e^{-\lambda x}$; $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\lambda x e^{-\lambda x^2}$.

Par parité : $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f(x)=\lambda|x|e^{-\lambda x^2}$.

f étant continue en 0 : $f(0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\lambda x e^{-\lambda x^2}\right)=0$.

Finalement $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\lambda|x|e^{-\lambda x^2}$.

Exercice 24

Q1 Soit x un élément de $]0,1]$.

On considère l'intégrale $I_x = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}\,\sqrt{x-t}}\,dt$.

a) Montrer l'existence de I_x.

b) Calculer cette intégrale en effectuant le changement de variable $t = x\sin^2\theta$ avec $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.

Q2 On dessine dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le carré de centre O et de côté 2 (? !), c'est à dire l'ensemble des points de coordonnées (x, y) vérifiant $-1 \leqslant x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

On choisit un point M au hasard dans ce carré et on cherche la probabilité que ce point se trouve dans le disque de centre O et de rayon 1.

Soit X la variable aléatoire égale à l'abscisse de M et Y la variable égale à son ordonnée.

On suppose que X et Y sont indépendantes et suivent une loi uniforme sur $[-1, 1]$.

a) Déterminer une densité de la variable X^2.

b) Donner sous forme intégrale simple une densité h de $X^2 + Y^2$.

c) Préciser h sur l'intervalle $[0, 1]$ et en déduire le calcul de $P(X^2 + Y^2 \leqslant 1)$.

d) Justifier géométriquement le résultat obtenu.

Q1 a) $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}}$ est continue et positive sur $]0,x[$.

- $\varphi(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, $\forall t \in]0,x[$, $\varphi(t) \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_0^{x/2} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ est convergente

donc $\displaystyle\int_0^{x/2} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{x-t}}\,dt$ converge.

- $\varphi(t) \underset{x}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \dfrac{1}{\sqrt{x-t}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \dfrac{1}{(x-t)^{1/2}}$, $\forall t \in]0,x[$, $\varphi(t) \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_{x/2}^{x} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{(x-t)^{1/2}}\,dt$

converge donc $\displaystyle\int_{x/2}^{x} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{x-t}}\,dt$ converge.

Ainsi $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}}\,dt$ converge.

Remarque : ceci vaut pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

b) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $0 < \alpha \leqslant \beta < x$.

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}}\,dt = \int_{\mathrm{Arcsin}\sqrt{\alpha/x}}^{\mathrm{Arcsin}\sqrt{\beta/x}} \frac{1}{\sqrt{x\sin^2\theta}\sqrt{x - x\sin^2\theta}}\, 2x\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$t = x\sin^2\theta$, $dt = 2x\sin\theta\cos\theta\,d\theta$

$\theta = \mathrm{Arcsin}\sqrt{\frac{t}{x}}$

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}}\,dt = \int_{\operatorname{Arcsin}\sqrt{\alpha/x}}^{\operatorname{Arcsin}\sqrt{\beta/x}} \frac{2x\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{x}\,|\sin\theta|\sqrt{x}\,|\cos\theta|}\,d\theta \underset{\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]}{=} 2\int_{\operatorname{Arcsin}\sqrt{\alpha/x}}^{\operatorname{Arcsin}\sqrt{\beta/x}} d\theta$$

$\lim\limits_{\alpha\to 0} \operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{\alpha}{x}} = 0$ et $\lim\limits_{\beta\to x} \operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{\beta}{x}} = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi $I_x = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}} = 2\int_0^{\pi/2} d\theta = \pi$. $\underline{I_x = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}} = \pi}$

Q2 $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_X(x) = F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<-1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } x\in[-1,1] \\ 1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ car $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,1])$ et $Y\hookrightarrow \mathcal{U}([-1,1])$.

Soit $x\in\mathbb{R}$.

$F_{X^2}(x) = P(X^2\leq x)$

→ si $x\in\,]-\infty,0[$, $F_{X^2}(x)=0$

→ supposons que : $x\in[0,+\infty[$.

$F_{X^2}(x) = P(X^2\leq x) = P(-\sqrt{x}\leq X\leq\sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$

. si $x\in[0,1]$, $F_{X^2}(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{2} - \frac{-\sqrt{x}+1}{2} = \sqrt{x}$

. si $x\in\,]1,+\infty[$, $F_{X^2}(x) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) = 1-0 = 1$

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_{X^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\in\,]-\infty,0[\text{ ou }]-\infty,0] \\ \sqrt{x} & \text{si } x\in[0,1] \\ 1 & \text{si } x\in\,]1,+\infty[\text{ ou } [1,+\infty[\end{cases}$

F_{X^2} est continue et dérivable sur $]-\infty,0]$, $[0,1]$ et $[1,+\infty[$.

Ainsi F_{X^2} est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point de $\mathbb{R}-\{0,1\}$.

$\forall x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[$, $F'_{X^2}(x) = 0$ et $\forall x\in\,]0,1[$, $F'_{X^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

F'_{X^2} est donc continue en tout point de $\mathbb{R}-\{0,1\}$.

F_{X^2} est donc continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$

Ainsi $\underline{X^2 \text{ est une variable aléatoire à densité}}$.

Donc $\forall x \in]0,1]$, $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $\forall x \in]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$, $f(x) = 0$.

f est une densité de X^2... et de Y^2.

b) X et Y sont indépendantes donc X^2 et Y^2 le sont également. ⚠
Alors $h \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(x-t)\,dt$ est une densité de X^2+Y^2.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(x-t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} f(x-t)\,dt \underset{u=x-t}{=} \int_x^{x-1} \frac{1}{2\sqrt{x-u}} f(u)(-du).$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x} \frac{1}{\sqrt{x-u}} f(u)\,du$$

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $h(x) = 0$ (f est nulle sur $[x-1, x]$)
$\forall x \in [2, +\infty[$, $h(x) = 0$ (f est nulle sur $[x-1, x]$ ou $]x-1, x]$...)

$$\forall x \in]0,1],\ h(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-u}} \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{4} I_x = \frac{\pi}{4}.$$

$$\forall x \in]1,2[,\ h(x) = \frac{1}{4} \int_{x-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{x-u}\sqrt{u}} \underset{!!}{=} \frac{1}{2}\left[\mathrm{Arcsin}\sqrt{\frac{1}{x}} - \mathrm{Arcsin}\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right]$$
même chose que dans Q1 b

c) $P(X^2+Y^2 \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} h(t)\,dt = \int_0^1 h(t)\,dt = I_1 = \frac{\pi}{4}$. $P(X^2+Y^2 \leq 1) = \frac{\pi}{4}$.

d) Normal la surface du carré est 4 et celle du disque $\pi \times 1^2 = \pi$!