Exercice 25 ESCP 97 **Somme de variables aléatoires à densité.**

Trois personnes notées A, B et C sont simultanément dans un bureau de poste muni de deux cabines téléphoniques. Une unité de temps étant choisie, A et B occupent simultanément à l'instant 0 les deux cabines. C attend et occupe ensuite la première cabine disponible, lorsque l'une ou l'autre des deux personnes A ou B a terminé sa communication. On suppose que les durées des communications des trois personnes A B, C sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi uniforme sur $[0,1]$ et notées respectivement X, Y et Z.

Q1. On pose $U = \mathrm{Sup}(X,Y)$ et $V = \mathrm{Inf}(X,Y)$. Déterminer une densité de U (resp. V) et son espérance.

Q2. On note T le temps total passé par C dans le bureau de poste. Trouver une densité pour T et la représenter graphiquement. Calculer $E(T)$.

⚠

Q1 Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_U(x) = P(\mathrm{Sup}(X,Y) \leq x) = P([X \leq x] \cap [Y \leq x]) \underset{\text{indépendance}}{=} P(X \leq x)P(Y \leq x) = (P(X \leq x))^2$

$$F_U(x) = (F_X(x))^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0[\text{ ou }]-\infty,0] \\ x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in]1,+\infty[\text{ ou } [1,+\infty[\end{cases}$$

F_U est de classe C^1 sur $]-\infty,0]$, $[0,1]$ et $[1,+\infty[$. F_U est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$. U est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$, $F_U'(x) = 0$. $\forall x \in]0,1[$, $F_U'(x) = 2x$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\\ 2x & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$; f_U est une densité de U.

$\int_{-\infty}^{0} t f_U(t)\,dt$ et $\int_{1}^{+\infty} t f_U(t)\,dt$ convergent et valent 0.

$t \mapsto t f_U(t)$ est continue sur $[0,1]$ et $\int_0^1 t f_U(t)\,dt = \int_0^1 t(2t)\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_U(t)\,dt$ converge et vaut ..

$E(U)$ existe et vaut $\frac{2}{3}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_V(x) = P(\mathrm{Inf}(X,Y) \leq x) = 1 - P(\mathrm{Inf}(X,Y) > x) = 1 - P([X > x] \cap [Y > x])$

Par indépendance il vient : $F_V(x) = 1 - P(X > x)P(Y > x) = 1 - (1 - P(X \leq x))(1 - P(Y \leq x))$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_V(x) = 1 - (1 - F_X(x))^2$

$\forall x \in]-\infty,0[$, $F_V(x) = 1 - (1-0)^2 = 0$. $\forall x \in [0,1]$, $F_V(x) = 1 - (1-x)^2 = 2x - x^2$.

$\forall x \in]1,+\infty[$, $F_V(x) = 1 - (1-1)^2 = 1$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F_V(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\,]-\infty,0[\text{ ou }]-\infty,0]\\ 2x-x^2 & \text{si } x\in[0,1]\\ 1 & \text{si } x\in\,]1,+\infty[\text{ ou }[1,+\infty[\end{cases}.$$

F_V est de classe C^1 sur $]-\infty,0]$, $[0,1]$ et $[1,+\infty[$. F_V est continue sur $\mathbb{R}$ et au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$. V est une variable aléatoire à densité.
$\forall x\in\,]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$, $F'_V(x)=0$ et $\forall x\in\,]0,1[$, $F'_V(x)=2-2x$.

Posons $\forall x\in\mathbb{R},\ f_V(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\,]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\\ 2-2x & \text{si } x\in[0,1]\end{cases}$; f_V est une densité de V.

Notons que $\forall x\in\mathbb{R},\ f_V(x)=f_U(1-x)=\dfrac{1}{|-1|}f_U\left(\dfrac{x-1}{-1}\right)$

Ainsi f_V est une densité de $-U+1=1-U$.
Alors $E(V)$ existe car $E(U)$ existe. $E(V)=1-E(U)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$. $\underline{E(V)=\frac{1}{3}}$.

<u>Remarque</u>. V et $1-U$ ont même loi. Normal !
$$V=\operatorname{Inf}(X,Y)=-\operatorname{Sup}(-X,-Y)=1-(1+\operatorname{Sup}(-X,-Y))$$
$$V=1-\operatorname{Sup}(1-X,1-Y).$$
Il est clair que $1-X\hookrightarrow\mathcal{U}([0,1])$ et $1-Y\hookrightarrow\mathcal{U}([0,1])$, ainsi $\operatorname{Sup}(1-X,1-Y)$ a même loi que U donc V a même loi que $1-U$.

Q2 $T=\operatorname{Inf}(X,Y)+Z=V+Z$. X, Y et Z étant indépendantes, V et Z le sont également. Alors $T=V+Z$ est une variable aléatoire à densité.

Posons $\forall x\in\mathbb{R},\ f_Z(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\,]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\\ 1 & \text{si } x\in[0,1]\end{cases}$; f_Z est une densité de Z. ⚠

De plus $h: x\mapsto\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f_V(t)\,f_Z(x-t)\,dt$ est une densité de T.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=\int_0^1(2-2t)f_Z(x-t)\,dt\underset{u=x-t}{=}\int_{x-1}^{x}(2-2x+2u)\,f_Z(u)\,du.$$

Soit $x \in]-\infty, 0[$; $h(x) = \int_{x-1}^{x} (2-2x+2t) \times 0 \, dt = 0$; de même pour $x \in]2, +\infty[$.

Soit $x \in [0,1[$; $h(x) = \int_0^x (2-2x+2t)\,dt = \left[(2-2x)t + t^2\right]_0^x = (2-2x)x + x^2 = 2x - x^2$.

Soit $x \in [1,2]$; $h(x) = \int_{x-1}^{1} (2-2x+2t)\,dt = \left[(2-2x)t+t^2\right]_{x-1}^{1} = 2-2x+1-(2-2x)(x-1)-(x-1)^2$;

$h(x) = 2-2x+1 - 2x+2+2x^2 - 2x - x^2+2x-1 = x^2-4x+4 = (x-2)^2$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]2,+\infty[\\ 2x-x^2 & \text{si } x \in [0,1[\\ (x-2)^2 & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$. $\underline{h \text{ est une densité de } T.}$

$E(T) = E(Y) + E(Z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

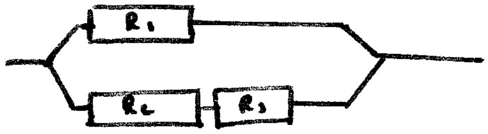
ou $E(T) = \int_0^1 t(2t-t^2)\,dt + \int_1^2 t(t-2)^2\,dt = \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4\right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}(t-2)^4 + \frac{2}{3}(t-2)^3\right]_1^2$

$= \frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

Exercice 26 C'était le bon temps...

Un circuit est composé de trois résistances R_1, R_2 et R_3.
La durée de vie de la résistance R_i est une variable aléatoire X_i qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes et la durée de vie T du circuit ne dépend que de R_1, R_2 et R_3.
Q1. Trouver la loi de T lorsque R_1 est en parallèle avec R_2 et R_3 qui se suivent.
Q2. Calculer les espérance.

Q1



. Notons que $T = \max(X_1, \min(X_2, X_3))$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_T(x) = p(T \le x) = p((X_1 \le x) \cap (\min(X_2, X_3) \le x))$. Par indépendance il vient :

$F_T(x) = p(X_1 \le x)\, p(\min(X_2, X_3) \le x) = F_{X_1}(x)\,(1 - p(\min(X_2, X_3) > x))$

$F_T(x) = F_{X_1}(x)\,(1 - p((X_2 > x) \cap (X_3 > x))) = F_{X_1}(x)\,(1 - p(X_2 > x)\,p(X_3 > x))$ (toujours l'indépendance).

$F_T(x) = F_{X_1}(x)\,[1 - (1 - p(X_2 \le x))(1 - p(X_3 \le x))] = F_{X_1}(x)\,[1 - (1 - F_{X_2}(x))(1 - F_{X_3}(x))]$

Comme X_1, X_2, X_3 ont même loi il vient :

$F_T(x) = F_{X_1}(x)\,[1 - (1 - F_{X_1}(x))(1 - F_{X_1}(x))] = F_{X_1}(x)\,[1 - (1 - F_{X_1}(x))^2]$

$F_T(x) = F_{X_1}(x)\,(1 + 1 - F_{X_1}(x))(1 - 1 + F_{X_1}(x)) = (F_{X_1}(x))^2\,(2 - F_{X_1}(x))$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = 2(F_{X_1}(x))^2 - (F_{X_1}(x))^3.$

Rappelons que F_{X_1} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi F_T est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. T est une variable aléatoire à densité.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$; f est une densité de X_1.

Rappelons aussi que $\forall x \in \mathbb{R},\ F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F_T'(x) = 4F'_{X_1}(x)\,F_{X_1}(x) - 3F'_{X_1}(x)\,(F_{X_1}(x))^2 = 4f(x)\,F_{X_1}(x) - 3f(x)\,F^2_{X_1}(x)$.

Posons $g = 4f\,F_{X_1} - 3f\,F^2_{X_1}$; g est une densité de T.

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ g(x) = 0$. $\forall x \in [0, +\infty[,\ g(x) = 4\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x}) - 3\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^2 = \dots = \lambda e^{-\lambda x} + 2\lambda e^{-2\lambda x} - 3\lambda e^{-3\lambda x}$

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ g(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[,\ g(x) = \lambda e^{-\lambda x} + 2\lambda e^{-2\lambda x} - 3\lambda e^{-3\lambda x}$.

$\int_{-\infty}^{0} t\,g(t)\,dt$ converge et vaut 0 et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} t\,(k\lambda)\,e^{-k\lambda t}\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{k\lambda}$ (... $\mathcal{E}(k\lambda)$)

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,g(t)\,dt$ converge et vaut $0 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{3\lambda} = \frac{7}{6\lambda}$. E(T) existe et vaut : $\frac{7}{6\lambda}$.

Exercice 27 ESCP

X est une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{B}, p)$ qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.
Q1. Etudier $Z = -\ln(X)$.
Q2. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$ on pose : $Y_n = \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Min}}(X_k)$ et $Z_n = \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Max}}(X_k) - \ln n$.

a) n est un élément de $\mathbb{N}^*$. Etudier Y_n, calculer son espérance et sa variance.
b) Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers Z.

Q1) Notons que $p(X \leq 0) = 0$.

$e^{-x} > 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $F_Z(x) = p(-\ln X \leq x) = p(\ln X \geq -x) = p(X \geq e^{-x}) = 1 - F_X(e^{-x}) = 1 - (1 - e^{-e^{-x}})$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = e^{-e^{-x}}$.

F_Z est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc Z est une variable aléatoire à densité.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = F_Z'(x) = e^{-x} e^{-e^{-x}}$. f est une densité de Z.

Q2) a) cours ! On remarque : $Y_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n \times 1)$. $E(Y_n) = \frac{1}{n}$ et $V(Y_n) = \frac{1}{n^2}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Cherchons la fonction de répartition F_n de Z_n.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_n(x) = p(Z_n \leq x) = p(\max_{1\leq k\leq n} X_k - \ln n \leq x) = p(\max_{1\leq k\leq n} X_k \leq x + \ln n)$

$F_n(x) = p(\{X_1 \leq x + \ln n\} \cap \dots \cap \{X_n \leq x + \ln n\}) \underset{\text{indépendance}}{=} \prod_{k=1}^{n} p(X_k \leq x + \ln n) = [p(X_1 \leq x + \ln n)]^n$.

$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x + \ln n < 0 \\ (1 - e^{-(x+\ln n)})^n & \text{si } x + \ln n \geq 0 \end{cases}$; $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, -\ln n[\\ (1 - \frac{1}{n} e^{-x})^n & \text{si } x \in [-\ln n, +\infty[\end{cases}$

Rappelons que F_Z est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\lim_{n\to+\infty} -\ln n = -\infty$.

Alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [\![n_0, +\infty[\![, -\ln n \leq x$; $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![, F_n(x) = (1 - \frac{1}{n} e^{-x})^n$.

$F_n(x) = n \ln(1 - \frac{1}{n} e^{-x}) \underset{n\to+\infty}{\sim} n(-\frac{1}{n} e^{-x}) = -e^{-x}$; $\lim_{n\to+\infty} \ln(F_n(x)) = -e^{-x}$;

$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = e^{-e^{-x}} = F_Z(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F_Z(x)$; $(Z_n)_{n\geq1}$ converge en loi vers Z.

Exercice 28 a, b et c sont trois réels. On suppose que a est strictement positif.

Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2+bt+c)}\,dt$ (on pourra se ramener à $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du$).

Version 1.- $f : t \mapsto e^{-(at^2+bt+c)}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{t\to-\infty} (t^2 f(t)) = \lim_{t\to-\infty} e^{2\ln|t| - (at^2+bt+c)} = \lim_{t\to-\infty} e^{t^2\left[\frac{2\ln|t|}{t^2} - \left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2}\right)\right]} \underset{\substack{\uparrow \\ a>0}}{=} 0$$

$\exists A \in]-\infty, 0[,\ \forall t \in]-\infty, A],\ 0 \leq t^2 f(t) \leq 1.$

$\forall t \in]-\infty, A],\ 0 \leq f(t) \leq \frac{1}{t^2}$. La convergence de $\int_{-\infty}^{A} \frac{dt}{t^2}$ et la positivité de f donnent la convergence de $\int_{-\infty}^{A} f(t)\,dt$ donc de $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$. On prouve de la même manière que $\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Ainsi $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = e^{-a\left(t^2 + \frac{b}{a}t + \frac{c}{a}\right)} = e^{-a\left[\left(t+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]} = e^{\frac{b^2}{4a} - c}\, e^{-a\left(t+\frac{b}{2a}\right)^2}$$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \overset{(*)}{=} e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}\, e^{-a\left(t+\frac{b}{2a}\right)^2}.$$

Soit $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

$$\int_A^B f(t)\,dt = e^{\frac{b^2-4ac}{4a}} \int_A^B e^{-a\left(t+\frac{b}{2a}\right)^2} dt \underset{\substack{\uparrow \\ u = \sqrt{2a}\left(t+\frac{b}{2a}\right)}}{=} e^{\frac{b^2-4ac}{4a}} \int_{\sqrt{2a}\left(A+\frac{b}{2a}\right)}^{\sqrt{2a}\left(B+\frac{b}{2a}\right)} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2a}}\,du.$$

Or $\lim_{A\to-\infty}\left(\sqrt{2a}\left(A+\frac{b}{2a}\right)\right) = -\infty$, $\lim_{B\to+\infty}\left(\sqrt{2a}\left(B+\frac{b}{2a}\right)\right) = +\infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du = \sqrt{2\pi}$.

Alors $I = e^{\frac{b^2-4ac}{4a}} \frac{1}{\sqrt{2a}} \times \sqrt{2\pi}$. $\underline{I = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}}$.

Version 2.- $(*)$ donne encore $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}\, e^{-\frac{\left(t-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2}{2\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)^2}}$.

Posons un instant $m = -\frac{b}{2a}$ et $\sigma = \sqrt{\frac{1}{2a}}$. Le cours nous donne $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,dt = 1$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\left(t-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2}{2\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)^2}}\,dt = \sqrt{2\pi}\,\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. Ainsi $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut $\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}$.

Exercice 29 X est une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

Q1. Etudier $Y = |X|$. Calculer $E(Y)$.

Q2. Trouver la fonction de répartition de $Z = \frac{X + |X|}{2}$ (on pourra d'abord remarquer que Z prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$).

Z est-elle une variable aléatoire à densité ?

Q1 Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_Y(x) = p(|X| \leq x)$.

1er Cas.. $x \in]-\infty, 0[$. $F_Y(x) = 0$.

2e Cas.. $x \in [0, +\infty[$. $F_Y(x) = p(|X| \leq x) = p(-x \leq X \leq x) = F_X(x) - F_X(-x) \ldots = 2F_X(x) - 1$?

F_X est la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite, F_X est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. $x \mapsto F_X(-x)$ également. Donc F_Y est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_Y(x)$; mieux $\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_Y(x) = 0$. Alors F_Y est de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$.

F_Y est donc de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$, F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. $\underline{\underline{Y \text{ est donc une variable aléatoire à densité}}}$.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F'_Y(x) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $F'_Y(x) = F'_X(x) + F'_X(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(-x)^2/2} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

Posons $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2}$ et $\forall x \in]-\infty, 0[$, $f(x) = 0$; f est une densité de $Y = |X|$.

$\int_{-\infty}^{0} t f(t)\,dt$ converge et vaut 0. $t \mapsto t f(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et

$\forall A \in \mathbb{R}^*_+$, $\int_0^A t f(t)\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^A t e^{-t^2/2}\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-e^{-t^2/2}\right]_0^A = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 - e^{-A^2/2})$.

Alors $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A t f(t)\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge et vaut $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Finalement : $\underline{\underline{E(Y) \text{ converge et vaut } \sqrt{\frac{2}{\pi}}}}$.

Q2 Rappelons que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $-t \leq |t|$ et $t \leq |t|$; $\forall t \in \mathbb{R}$, $0 \leq t + |t|$.

Ainsi $\underline{Z \text{ prend ses valeurs dans } \mathbb{R}_+}$.

- $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_Z(x) = 0$
- Soit $x \in [0, +\infty[$.

$p(Z \leq x) = p\left(\frac{X+|X|}{2} \leq x\right) = p\left(\left(\left\{\frac{X+|X|}{2} \leq x\right\} \cap \{X<0\}\right) \cup \left(\left\{\frac{X+|X|}{2} \leq x\right\} \cap \{X \geq 0\}\right)\right)$.

$p(Z \leq x) = p\left(\left(\{0 \leq x\} \cap \{X<0\}\right) \cup \left(\{X \leq x\} \cap \{X \geq 0\}\right)\right)$

$p(Z \leq x) = p\left(\{X<0\} \cup \{0 \leq X \leq x\}\right) = p(X \leq x) = F_X(x)$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ F_X(x) & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$.

Notons que $F_Z(0) = F_X(0) = \frac{1}{2}$ $(X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1))$; or $\lim\limits_{x \to 0^-} F_Z(x) = 0$

F_Z n'est pas continue en 0. <u>Z n'est pas une variable aléatoire à densité.</u>

Exercice 30 Φ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.
Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))\, dt$.

Rappelons que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi $1-\phi$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $A \in]0, +\infty[$. $\displaystyle\int_0^A (1-\phi(t))\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{IPP}}}{=} \left[t(1-\phi(t))\right]_0^A - \int_0^A t(-\phi'(t))\,dt$

$$\int_0^A (1-\phi(t))\,dt = A(1-\phi(A)) + \int_0^A t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt = A(1-\phi(A)) + \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\right]_0^A$$

$\displaystyle\int_0^A (1-\phi(t))\,dt = A(1-\phi(A)) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-A^2/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Notons que $\displaystyle\lim_{A \to +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-A^2/2}\right) = 0$.

Reste à étudier $\displaystyle\lim_{A \to +\infty}\left[A(1-\phi(A))\right]$

$-t^2/2 \leq -t$ car $t \geq A \geq 2$

Soit $A \in [2, +\infty[$! $\displaystyle A(1-\phi(A)) = A\int_A^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt \underset{\uparrow}{\leq} \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_A^{+\infty} e^{-t}\,dt = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \lim_{B \to +\infty} \left[-e^{-t}\right]_A^B$

toutes les intégrales convergent

$0 \leq A(1-\phi(A)) \leq \frac{A}{\sqrt{2\pi}} e^{-A}$; $\displaystyle\lim_{A \to +\infty}\left(\frac{A}{\sqrt{2\pi}} e^{-A}\right) = 0$ donc, par encadrement, $\displaystyle\lim_{A \to +\infty}(A(1-\phi(A))) = 0$.

Exercice 31 $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y = \sqrt{X}$. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en trouver une densité. Calculer $E(Y)$.

Soit $x \in]-\infty, 0[$. $F_Y(x) = p(\sqrt{X} \leq x) = 0$.

$x \geq 0$

Soit $x \in [0, +\infty[$. $F_Y(x) = p(\sqrt{X} \leq x) = p(X \leq x^2) = F_X(x^2) = 1 - e^{-\lambda x^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\text{ ou }]-\infty, 0] \\ 1 - e^{-\lambda x^2} \text{ si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$

F_Y est de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$ donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Y est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F'_Y(x) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $F'_Y(x) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2}$.

Posons $\forall x \in]-\infty, 0[$, $f_Y(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[$, $f_Y(x) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2}$.

f_Y est une densité de $\mathbb{R}$.

$\int_{-\infty}^{0} t f_Y(t)\,dt$ existe et vaut 0. $t \mapsto t f_Y(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$. Soit $A \in \mathbb{R}_+$.

$\int_0^A t f_Y(t)\,dt = \int_0^A t(2\lambda t e^{-\lambda t^2})\,dt \underset{\text{IPP}}{=} [t(-e^{-\lambda t^2})]_0^A - \int_0^A (-e^{-\lambda t^2})\,dt$

$\int_0^A t f_Y(t)\,dt \underset{u = \sqrt{2\lambda}\, t}{=} -Ae^{-\lambda A^2} + \int_0^{\sqrt{2\lambda} A} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\,du$.

$\lim_{A \to +\infty} (-Ae^{-\lambda A^2}) = 0$ et $\lim_{A \to +\infty} \int_0^{\sqrt{2\lambda} A} e^{-u^2/2}\,du = \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

Alors $\lim_{A \to +\infty} \left(\int_0^A t f_Y(t)\,dt \right) = 0 + \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} t f_Y(t)\,dt$ existe et vaut $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$.

Donc $E(Y)$ existe et vaut $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$.

Exercice 32 Soit f une fonction définie, continue et strictement positive sur $[0,+\infty[$ telle que : $\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1$.

On considère une variable aléatoire réelle X de densité φ définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ f(x) & \text{pour } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On suppose que X admet une espérance $E(X)$. On note F la fonction de répartition de X et on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, Q(x) = \frac{1}{E(X)} \int_0^x tf(t)dt$$

1. On étudie dans cette question le cas particulier où X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) Déterminer F et Q.

b) Montrer que la restriction G de F à $[0,+\infty[$ définit une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,1[$ et déterminer G^{-1}.

c) Déterminer une application continue C de $[0,1]$ dans lui-même telle que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ Q(x) = \Big(C \circ F\Big)(x)$.

d) Déterminer un réel t_0 tel que $C'(t_0) = 1$, puis un réel x_0 tel que $F(x_0) = t_0$.

2. On revient maintenant au cas général.

a) Montrer que Q est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et prend ses valeurs dans $[0,1]$.

Montrer qu'il existe une application continue C de $[0,1]$ dans lui-même telle que $Q = C \circ F$ (on pourra également parler de G...).

Déterminer un réel t_0 tel que $C'(t_0) = 1$, puis un réel x_0 tel que $F(x_0) = t_0$.

b) Montrer que : $\int_0^1 C(x)dx = \int_0^{+\infty} Q(x)f(x)dx$.

Q1 a) Notons que $E(X)$ existe et $E(X) = 1/\lambda$.

$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ Q(x) = \frac{1}{(1/\lambda)} \int_0^x \underbrace{t}_{u}\underbrace{(\lambda e^{-\lambda t})}_{v'} dt = \lambda \left[t(-e^{-\lambda t})\right]_0^x - \lambda \int_0^x (-e^{-\lambda t}) dt$

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ Q(x) = \lambda(-x e^{-\lambda x} + 0) - \int_0^x (-\lambda e^{-\lambda t}) dt = -\lambda x e^{-\lambda x} - \left[e^{-\lambda t}\right]_0^x = -\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1.$

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ Q(x) = 1 - (\lambda x + 1) e^{-\lambda x}.$

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F(x) = 0$ et $\forall x \in [0,+\infty[,\ F(x) = \int_0^x (\lambda e^{-\lambda t}) dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

b) $\forall x \in [0,+\infty[,\ G(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

G est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $\forall x \in [0,+\infty[,\ G'(x) = \lambda e^{-\lambda x} > 0$

G est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. De plus $G(0) = 0$ et $\lim G(x) = 1$.

Alors G définit une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,1[$.

Soit $x \in [0,1[$. Posons $y = G^{-1}(x)$. $x = G(y)$; $x = 1 - e^{-\lambda y}$; $e^{-\lambda y} = 1-x$; $-\lambda y = \ln(1-x)$.
$y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)$. Ainsi $\underline{\underline{\forall x \in [0,1[,\ G^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)}}$.

c) Nous allons à fait prouver l'existence et l'unicité de C.

Analyse/Unicité. Supposons que C existe.

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(x) = C(F(x)) = C(G(x))$; $\forall x \in [0,1[,\ \varphi(G^{-1}(x)) = C(x)$.

$\forall x \in [0,1[,\ C(x) = \varphi(G^{-1}(x)) = \varphi(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)) = 1 - (\lambda(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)) + 1)\, e^{-\lambda(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-x))}$

$\forall x \in [0,1[,\ C(x) = \varphi(G^{-1}(x)) = 1 - (1 - \ln(1-x))(1-x) = x + (1-x)\ln(1-x)$.

C était continue en 1 : $\quad C(1) = \lim_{x \to 1} (x + (1-x)\ln(1-x)) = 1 + 0 = 1$.

Alors $\forall x \in [0,1],\ C(x) = \begin{cases} \varphi(G^{-1}(x)) = x + (1-x)\ln(1-x) \text{ si } x \in [0,1[. \\ 1 \text{ si } x = 1. \end{cases}$

Synthèse / Existence

Posons $\forall x \in [0,1],\ C(x) = \begin{cases} \varphi(G^{-1}(x)) = x + (1-x)\ln(1-x) \text{ si } x \in [0,1[. \\ 1 \quad \text{si } x = 1 \end{cases}$

Soit $x \in [0,+\infty[$. $F(x) \in [0,1[$. $C(F(x)) = C(G(x)) = \varphi(G^{-1}(G(x))) = \varphi(x)$.

$\underline{\forall x \in [0,+\infty[,\ \varphi(x) = C(F(x))}$.

C est continue sur $[0,1[$ et $\lim_{x \to 1} (x + (1-x)\ln(1-x)) = 1 + 0 = 1 = C(1)$.

$\underline{\text{Ainsi C est continue sur } [0,1]}$.

$t \mapsto t f(t)$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$ et $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ existe et vaut $E(X)$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leq \int_0^x t f(t)\,dt \leq \int_0^{+\infty} t f(t)\,dt = E(X)$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leq \frac{1}{E(X)} \int_0^x t f(t)\,dt \leq 1 \quad (E(X) = 1/\lambda > 0)$.

$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leq \varphi(x) \leq 1$. Donc $\forall x \in [0,1[,\ 0 \leq C(x) = \varphi(G^{-1}(x)) \leq 1$. Comme $C(1) = 1$:
$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leq C(x) \leq 1$. C est une application de $[0,1]$ dans lui-même.

Ainsi il existe une application continue C de $[0,1]$ dans lui-même et une seule telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(x) = (C \circ F)(x)$. $\forall x \in [0,1]$, $C(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ x + (1-x)\ln(1-x) & \text{si } x \in [0,1[\end{cases}$

d) C est dérivable au moins sur $[0,1[$.

$\forall x \in [0,1[$, $C'(x) = 1 - \ln(1-x) + (1-x) \times \frac{-1}{1-x} = -\ln(1-x)$.

$\forall x \in [0,1[$, $C'(x) = 1 \Leftrightarrow -\ln(1-x) = 1 \Leftrightarrow 1-x = e^{-1} \Leftrightarrow x = 1-e^{-1}$

Posons $t_0 = 1 - e^{-1}$. $t_0 \in [0,1[$ et $C'(t_0) = 1$.

Soit Posons $x_0 = \frac{1}{\lambda}$. $F(x_0) = 1 - e^{-\lambda \frac{1}{\lambda}} = 1 - e^{-1} = t_0$.

Si $t_0 = 1 - e^{-1}$ et $x_0 = \frac{1}{\lambda}$: $C'(t_0) = 1$ et $F(x_0) = t_0$.

(Q2) a) $t \mapsto t f(t)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ donc $\int_0^x t f(t)\,dt$ existe pour tout élément x de $[0,+\infty[$.

Comme $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ existe et vaut $E(X)$: $\forall x \in [0,+\infty[$, $0 \leq \int_0^x t f(t)\,dt \leq E(X)$

Si $E(X) = 0$: $\forall x \in [0,+\infty[$, $\int_0^x t f(t)\,dt = 0$ et par dérivation :

$\forall x \in [0,+\infty[$, $x f(x) = 0$ ce qui donne $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = 0$!! Ainsi $E(X) \neq 0$

Mieux $E(X) > 0$.

Alors pour tout élément $x \in \mathbb{R}^+$, $\frac{1}{E(X)} \int_0^x t f(t)\,dt$ existe et appartient à $[0,1]$.

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(x)$ existe et appartient à $[0,1]$.

Soit G la restriction de F à $\mathbb{R}^+$.

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $G(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ et f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $G'(x) = f(x) > 0$.

G est alors continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus $G(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} G(x) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$. G définit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[0,1[$.

Notons que G^{-1} est une application continue, strictement croissante et bijective de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}^+$

Notons également que : $\lim\limits_{x\mapsto 1} G^{-1}(x) = +\infty$.

→ Supposons que C existe.

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(x) = C(F(x)) = C(G(x))$; $\forall x \in [0,1[$, $\varphi(G^{-1}(x)) = C(G(G^{-1}(x))) = C(x)$.

$\forall x \in [0,1[$, $C(x) = \varphi(G^{-1}(x))$

C est continue en 1 donc $C(1) = \lim\limits_{x\mapsto 1} \varphi(G^{-1}(x))$

$\lim\limits_{x\mapsto 1} G^{-1}(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\mapsto +\infty} \frac{1}{E(X)} \int_0^x tf(t)\,dt = 1$. Alors $C(1) = \lim\limits_{x\mapsto 1} (\varphi(G^{-1}(x))) = 1$

donc $\forall x \in [0,1]$, $C(x) = \begin{cases} \varphi(G^{-1}(x)) & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$. D'où l'unicité de C.

→ Posons $\forall x \in [0,1]$, $C(x) = \begin{cases} \varphi(G^{-1}(x)) & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.

G^{-1} est une application continue de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}_+$ et φ une application dérivable donc continue de $\mathbb{R}^+$ dans $[0,1]$.

Ainsi $\varphi \circ G^{-1}$ est continue sur $[0,1[$ et prend ses valeurs dans $[0,1[$.

C est continue sur $[0,1[$ et $\forall x \in [0,1[$, $C(x) \in [0,1]$.

Notons que $C(1) = 1$. Alors $\forall x \in [0,1]$, $C(x) \in [0,1]$.

$\lim\limits_{x\mapsto 1} \varphi(G^{-1}(x)) \underset{\text{voir plus haut}}{=} 1 = C(1)$; C est donc continue en 1.

Alors C est une application continue de $[0,1]$ dans lui-même.

$\forall x \in [0,1[$, $C(x) = \varphi(G^{-1}(x))$; $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $C(G(x)) = \varphi(G^{-1}(G(x))) = \varphi(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(x) = C(G(x)) = C(F(x))$.

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(x) = (C \circ F)(x)$.

Ceci achève de montrer qu'il existe une application continue C de $[0,1]$ dans lui-même telle que $\varphi = C \circ F$ ... et une seule.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $G(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ et f est continue sur $[0,+\infty[$.

Ainsi G est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $\forall x \in [0,+\infty[$, $G'(x) = f(x) > 0$.

Alors G^{-1} est dérivable sur $[0,1[$ et $\forall x \in [0,1[$, $(G^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f(G^{-1}(x))}$.

Rappelons que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi'(x) = \dfrac{1}{E(X)}\, x f(x)$.

Par composition C est au moins dérivable sur $[0,1[$ et

$\forall x \in [0,1[$, $C'(x) = (G^{-1})'(x)\,\varphi'(G^{-1}(x)) = \dfrac{1}{f(G^{-1}(x))}\,\dfrac{1}{E(X)}\,G^{-1}(x) f(G^{-1}(x))$.

$\forall x \in [0,1[$, $C'(x) = \dfrac{G^{-1}(x)}{E(X)}$.

Soit $x \in [0,1[$. $C'(x) = 1 \Leftrightarrow G^{-1}(x) = E(X) \Leftrightarrow x \underset{E(X)\in\mathbb{R}^+}{=} G(E(X)) \Leftrightarrow x = F(E(X))$.

Si $t_0 = F(E(X))$: $C'(t_0) = 1$.

Alors si $x_0 = E(X)$: $F(x_0) = t_0$!

b) Notons que φf est continue sur $\mathbb{R}^+$. Soit $A \in \mathbb{R}_+$

$$\int_0^A \varphi(x) f(x)\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_0^{G(A)} \varphi(G^{-1}(t))\,dt = \int_0^{G(A)} C(t)\,dt.$$

$t = G(x)$ (G est C^1 sur $\mathbb{R}_+$)

$dt = G'(x)\,dx = f(x)\,dx$

C est continue sur $[0,1]$ et $\lim\limits_{A\to+\infty} G(A) = 1$.

Alors $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A \varphi(x) f(x)\,dx$ existe et vaut $\int_0^1 C(t)\,dt$.

$\int_0^{+\infty} \varphi(x) f(x)\,dx$ existe et vaut $\int_0^1 C(t)\,dt$.

Exercice 33 X est une variable aléatoire réelle à densité de fonction de répartition F. On pose $Y = F \circ X$. On se propose de montrer que Y est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

a) Soit y un élément de $[1,+\infty[$. Montrer que $\{Y \leqslant y\} = Y^{-1}(]-\infty,y])$ est un événement et en donner la probabilité.

b) Même chose avec y dans $]-\infty,0[$.

c) Ici y est un élément de $]0,1[$. On pose $A_y = \{t \in \mathbb{R} \mid F(t) \leqslant y\}$. Montrer que A_y est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Prouver que la borne supérieure t_0 de A_y vérifie $F(t_0) = y$ et que $A_y =]-\infty, t_0]$.

Montrer alors $\{Y \leqslant y\} = Y^{-1}(]-\infty,y])$ est un événement et en donner la probabilité. Examiner le cas où $y = 0$ et conclure l'exercice.

---

a) Soit $y \in [1,+\infty[$. $\{Y \leq y\} = \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \leq y\} = \{\omega \in \Omega \mid F(X(\omega)) \leq y\}$.

Rappelons que $\forall z \in \mathbb{R}$, $F(z) \in [0,1]$. Ainsi $\forall \omega \in \Omega$, $F(X(\omega)) \leq 1 \leq y$.

Alors $\{Y \leq y\} = Y^{-1}(]-\infty,y]) = \Omega \in \mathcal{A}$. $\forall y \in [1,+\infty[$, $Y^{-1}(]-\infty,y]) \in \mathcal{A}$ et $P(Y^{-1}(]-\infty,y])) = 1$.

b) Soit $y \in]-\infty,0[$. $\{Y \leq y\} = \{\omega \in \Omega \mid F(X(\omega)) \leq y\}$.

$\forall z \in \mathbb{R}$, $F(z) \geq 0$. $\forall \omega \in \Omega$, $F(X(\omega)) \geq 0 > y$.

Ainsi $\{Y \leq y\} = \{\omega \in \Omega \mid F(X(\omega)) \leq y\} = \emptyset \in \mathcal{A}$. $\forall y \in]-\infty,0[$, $Y^{-1}(]-\infty,y]) \in \mathcal{A}$ et $P(Y^{-1}(]-\infty,y])) = 0$

c) Soit $y \in]0,1[$. $A_y = \{t \in \mathbb{R} \mid F(t) \leq y\}$.

Supposons $A_y = \emptyset$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $F(t) > y$. En faisant tendre t vers $-\infty$ il vient alors $0 \geq y$! Ainsi A_y n'est pas vide.

$\lim_{z \to +\infty} F(z) = 1$. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, $\exists A \in \mathbb{R}^*_+$, $\forall z \in \mathbb{R}$, $z \geq A \Rightarrow |F(z) - 1| < \varepsilon$.

Posons $\varepsilon = 1 - y$. $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ car $y \in]0,1[$. $\exists A \in \mathbb{R}^*_+$, $\forall z \in \mathbb{R}$, $z \geq A \Rightarrow |F(z) - 1| < \varepsilon$.

Soit z_0 un élément de $[A,+\infty[$; $1 - F(z_0) \leq |F(z_0) - 1| < \varepsilon = 1 - y$.

Alors $1 - F(z_0) < 1 - y$; $y < F(z_0)$.

Ainsi $\forall t \in A_y$, $F(t) < F(z_0)$. F étant croissante sur $\mathbb{R}$: $\forall t \in A_y$, $t \leq z_0$

Ainsi A_y est majorée.

A_y est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ donc A_y possède une borne supérieure. Notons t_0 sa borne supérieure.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t_0 - \frac{1}{n}$ ne majore pas A_y car t_0 est le plus petit des majorants de A_y.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \beta_n \in A_y, \; t_0 - \frac{1}{n} < \beta_n \leq t_0$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (t_0 - \frac{1}{n}) = t_0$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = t_0$. Comme F est continue en t_0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} F(\beta_n) = F(t_0)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \beta_n \in A_y$; $\forall n \in \mathbb{N}^*, F(\beta_n) \leq y$. En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient $F(t_0) \leq y$. Ainsi $t_0 \in A_y$ et t_0 est alors le plus grand élément de A_y.

<u>Supposons $F(t_0) < y$</u>. Nous avons vu que $y < F(z_0)$.

Alors $F(t_0) < y < F(z_0)$. La continuité de F et le théorème des valeurs intermédiaires montrent que : $\exists \beta \in]t_0, z_0[, \; F(\beta) = y$.

Alors $\beta \in A_y$ et $\beta > t_0 = \sup A_y = \max A_y$. Ceci est impossible.

Par conséquent $\underline{F(t_0) = y}$.

$A_y \subset]-\infty, t_0]$ car $t_0 = \max A_y$.

$\forall t \in]-\infty, t_0], \; t \leq t_0$; $\forall t \in]-\infty, t_0], \; F(t) \leq F(t_0) = y$; $\forall t \in]-\infty, t_0], \; t \in A_y$; par conséquent $]-\infty, t_0] \subset A_y$. Finalement $\underline{A_y =]-\infty, t_0]}$.

$\{Y \leq y\} = Y^{-1}(]-\infty, y]) = \{\omega \in \Omega \mid F(X(\omega)) \leq y\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A_y\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq t_0\}$

$\{Y \leq y\} = Y^{-1}(]-\infty, y]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in]-\infty, t_0]\} = X^{-1}(]-\infty, t_0])$

Comme X est une variable aléatoire : $X^{-1}(]-\infty, t_0]) \in \mathcal{A}$. Ainsi $\underline{\{Y \leq y\} \in \mathcal{A}}$.

$P(\{Y \leq y\}) = P(X^{-1}(]-\infty, t_0])) = P(\{X \leq t_0\}) = F(t_0) = y$. $\underline{P(Y \leq y) = y}$.

Supposons que $y = 0$. Si $A_y = \emptyset$: $\{\omega \in \Omega \mid F(X(\omega)) \leq y\} = \emptyset$.

Alors $Y^{-1}(]-\infty, y]) = \emptyset$. On a encore $Y^{-1}(]-\infty, y]) \in \mathcal{A}$.

De plus $P(Y^{-1}(]-\infty, y])) = 0 = y$!

Si $A_y \neq \emptyset$ en reprenant les arguments développés dans le cas où $y \in]0,1[$ on obtient $Y^{-1}(]-\infty,y]) \in \mathcal{B}$ et $P(Y^{-1}(]-\infty,y])) = y$.

conclusion. $\forall y \in \mathbb{R}$, $Y^{-1}(]-\infty,y]) \in \mathcal{B}$ donc Y est une variable aléatoire.

De plus $\forall y \in \mathbb{R}$, $P(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in]-\infty,0[\\ y & \text{si } y \in [0,1[\\ 1 & \text{si } y \in [1,+\infty[\end{cases}$

Alors Y suit une loi uniforme sur $[0,1]$.