**Exercice 31** $f$ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\infty, 1[ \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \in [1, +\infty[ \end{cases}$$

**Q1** Montrer que $f$ est une densité de probabilité.

**Q2** $X$ est une variable aléatoire à densité de densité $f$.

a) Trouver la fonction de répartition $F$ de $X$.

b) On pose $Y = \ln X$. Étudier $Y$. Donner directement une densité de $-Y$.

**Q3** $U$ est une variable aléatoire réelle à densité admettant pour densité la fonction $f_U$, définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R} - D$ où $D$ est fini.

Montrer que $V = e^U$ est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

**Q4** $X_1$ et $X_2$ sont deux variables aléatoires à densité, indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que $X_1$ et $X_2$ ont pour densité $f$.

a) Déterminer une densité de $Z = \ln X_1 - \ln X_2$. Étudier $T = \dfrac{X_1}{X_2}$.

b) **Facultatif** Donner, sans calcul, une densité de $\ln X_1 + \ln X_2$. Étudier $S = X_1 X_2$.

---

Q1 * $\forall x \in ]-\infty, 1[,\ f(x) = 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[,\ f(x) = \frac{1}{x^2} \geqslant 0$.

Ainsi <u>$f$ est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$.</u>

* $x \mapsto 0$ est continue sur $]-\infty, 1[$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

Alors $f$ est continue sur $]-\infty, 1[$ et sur $[1, +\infty[$.

<u>$f$ est au moins continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.</u>

* $\int_{-\infty}^{1} f(t)\,dt$ converge et vaut 0. $\forall A \in [1, +\infty[,\ \int_1^A f(t)\,dt = \int_1^A \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^A = 1 - \frac{1}{A}$.

Ainsi $\lim_{A \to +\infty} \int_1^A f(t)\,dt = 1$. $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1.

Finalement <u>$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1.</u>

Les trois points précédents montrent que <u>$f$ est une densité de probabilité</u>

Q2 a) $\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$

$\forall x\in ]-\infty,1[,\ F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt=0$

$\forall x\in [1,+\infty[\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_1^x \frac{dt}{t^2}=\left[-\frac{1}{t}\right]_1^x=1-\frac{1}{x}.$

$\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{x} & \text{si } x\in[1,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$

b) Soit $x\in\mathbb{R}$.

$Y^{-1}(]-\infty,x])=\{\omega\in\Omega \mid Y(\omega)\leq x\}=\{\omega\in\Omega \mid X\leq e^x\}=X^{-1}(]-\infty,e^x])\in\mathcal{A}.$

Ainsi $Y$ est une variable aléatoire.

Soit $F_Y$ la fonction de répartition de $Y$. $Y$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ car $X$ prend ses valeurs dans $[1,+\infty[$.

Ainsi $\forall x\in ]-\infty,0[,\ F_Y(x)=0.$ $\qquad e^x\in[1,+\infty[$

$\forall x\in\mathbb{R}^+,\ F_Y(x)=P(\ln X\leq x)=P(X\leq e^x)\overset{\downarrow}{=}1-\frac{1}{e^x}=1-e^{-x}.$

Finalement $Y$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Posons $\forall x\in\mathbb{R},\ f_Y(x)=\begin{cases}e^{-x} & \text{si } x\in[0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. $f_Y$ est une densité de $Y$.

Alors $-Y$ est une variable aléatoire à densité et $f_{-Y}: x\mapsto \frac{1}{|-1|}f_Y\left(\frac{x-0}{-1}\right)$ en est une densité.

$\forall x\in\mathbb{R},\ f_{-Y}(x)=f_Y(-x)=\begin{cases}e^{x} & \text{si } x\in]-\infty,0]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$

Q3 Notons $F_U$ la fonction de répartition de $U$.

$\forall x\in ]-\infty,0],\ V^{-1}(]-\infty,x])=\{\omega\in\Omega \mid e^{U(\omega)}\leq x\}=\emptyset\in\mathcal{A}.$

$\forall x\in ]0,+\infty[,\ V^{-1}(]-\infty,x])=\{\omega\in\Omega \mid e^{U(\omega)}\leq x\}=\{\omega\in\Omega \mid U(\omega)\leq \ln x\}.$

$\forall x \in ]0,+\infty[, \quad V^{-1}(]-\infty,x]) = U^{-1}(]-\infty,\ln x]) \in \mathcal{T}$.

Ceci achève de montrer que <u>V est une variable aléatoire</u>. Notons $F_V$ sa fonction de répartition.

$V=e^U$ prend ses valeurs dans $]0,+\infty[$.

Ainsi $\forall x \in ]-\infty,0]$, $F_V(x)=0$

$\forall x \in ]0,+\infty[$, $F_V(x) = P(e^U \leq x) = P(U \leq \ln x) = F_U(\ln x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_V(x) = \begin{cases} F_U(\ln x) \text{ si } x \in ]0,+\infty[ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

$x \mapsto 0$ est continue sur $\mathbb{R}$, $F_U$ également et $x \to \ln x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ceci suffit pour dire que $F_V$ est continue sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0]$.

$F_V$ est donc continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ et à gauche en 0.

$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{y \to -\infty} F_U(y) = 0$, alors $\lim_{x \to 0^+} F_V(x) = \lim_{x \to 0^+} F_U(\ln x) = 0 = F_V(0)$; $F_V$ est donc continue à droite en 0.

Finalement <u>$F_V$ est continue sur $\mathbb{R}$.</u>

$f_U$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus D$ donc $F_U$ est de classe $C^1$ au moins sur $\mathbb{R} \setminus D$.

De plus $\forall x \in \mathbb{R} \setminus D$, $F'_U(x) = f_U(x)$.

Posons $\Delta = \{e^d ; d \in D\}$

- $x \mapsto \ln x$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^* - \Delta$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \Delta$, $\ln x \in \mathbb{R} \setminus D$
- $F_U$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R} \setminus D$.

Par composition $F_V$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \Delta$

Notons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \Delta$, $F'_V(x) = \frac{1}{x} F'_U(\ln x) = \frac{1}{x} f_U(\ln x)$.

De plus $F_V$ est de classe $C^1$ sur $]-\infty,0]$ car $\forall x \in ]-\infty,0]$, $F_V(x)=0$.

Notons que $\forall x \in ]-\infty,0[$, $F'_V(x)=0$.

Finalement $F_V$ est au moins de classe $C^1$ sur $\mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup \Delta)$ et $\{0\} \cup \Delta$ est fini.

De plus $\forall x \in ]-\infty, 0[$, $F'_V(x) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \Delta$, $F'_V(x) = \frac{1}{x} f_U(\ln x)$.

Ceci achève de nous montrer que $V$ est une variable aléatoire à densité.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_V(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} f_U(\ln x) & \text{si } x \in ]0, +\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$f_V$ est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec $F'_V$ sur $\mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup \Delta)$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Ainsi $f_V$ est une densité de $V$.

Q4 a) * D'après Q2, $\ln X_1$ et $-\ln X_2$ sont deux variables aléatoires à densité de densités respectives $f_Y$ et $f_{-Y}$.

* $\ln X_1$ et $-\ln X_2$ sont indépendantes car $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes

* $f_Y$ est bornée ($\forall x \in \mathbb{R}$, $f_Y(x) \leq 1$)

$Z = \ln X_1 - \ln X_2$ est une variable aléatoire à densité et

$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x-t) f_{-Y}(t)\, dt$ est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $h(x) = \int_{-\infty}^{0} f_Y(x-t) e^t\, dt \underset{u = x-t \ldots !!!}{=} \int_{+\infty}^{x} f_Y(u) e^{x-u} (-du)$.

$h(x) = \int_{\max(x,0)}^{+\infty} e^{-u} e^{(x-u)}\, du = e^x \int_{\max(x,0)}^{+\infty} e^{-2u}\, du = e^x \lim_{A \to +\infty} \left[ \frac{e^{-2u}}{-2} \right]_{\max(x,0)}^{A}$.

$h(x) = \frac{1}{2} e^x e^{-2\max(x,0)} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x e^{-2x} & \text{si } x \in [0, +\infty[ \\ \frac{1}{2} e^x \times 1 & \text{si } x \in ]-\infty, 0[ \end{cases}$

$\forall x \in [0, +\infty[$, $h(x) = \frac{1}{2} e^{-x} = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ et $\forall x \in ]-\infty, 0[$, $h(x) = \frac{1}{2} e^x = \frac{1}{2} e^{-|x|}$

Ainsi 1) $Z = \ln X_1 - \ln X_2$ est une variable aléatoire à densité.

2) $h : x \mapsto \frac{1}{2} e^{-|x|}$ en est une densité.

On $T = \ln X_1 - \ln X_2 = Z$. $T = e^{Z}$

Q3 permet alors de dire que $T$ est une variable aléatoire à densité et que la fonction $f_T$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_T(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} h(\ln x) & \text{si } x \in ]0,+\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

en est une densité.

$\forall x \in ]0,+\infty[$, $f_T(x) = \frac{1}{2x} e^{-|\ln x|} = \begin{cases} \frac{1}{2x} e^{\ln x} & \text{si } x \in ]0,1[ \\ \frac{1}{2x} e^{-\ln x} & \text{si } x \in [1,+\infty[ \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\infty, 0] \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in ]0,1[ \\ \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \in [1,+\infty[ \end{cases}$. $T$ est une variable aléatoire à densité de densité $f_T$

b) On $\ln X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et $\ln X_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

Alors $\ln X_1 \hookrightarrow \Gamma(1,1)$ et $\ln X_2 \hookrightarrow \Gamma(1,1)$

De plus $\ln X_1$ et $\ln X_2$ sont indépendantes car $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes.

Le cours montre alors que $\ln X_1 + \ln X_2 \hookrightarrow \Gamma(1,2)$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \begin{cases} x e^{-x} & \text{si } x \in [0,+\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. $\varphi$ est une densité de $\ln X_1 + \ln X_2$.

$S = X_1 X_2 = e^{\ln X_1 + \ln X_2}$. D'après Q3, $S$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction $f_S$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_S(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \varphi(\ln x) & \text{si } x \in ]0,+\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\forall x \in ]0,+\infty[$, $\frac{1}{x} \varphi(\ln x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]0,1[ \\ \frac{1}{x} \ln x \, e^{-\ln x} & \text{si } x \in [1,+\infty[ \end{cases}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\infty, 1[ \\ \frac{1}{x^2} \ln x & \text{si } x \in [1,+\infty[ \end{cases}$ $S$ est une variable aléatoire à densité de densité $f_S$.

**Exercice 35** ESCP 2000

L'engouement du public pour un jeu de foire, permettant de gagner des lots divers et variés, est tel qu'il est nécessaire d'en présélectionner les candidats. On organise donc une suite d'épreuves de sélection, chaque épreuve réunissant $n$ candidats, $n \geqslant 1$ étant fixé, toutes basées sur le même principe.

A chaque épreuve :

- un nombre réel mystère $a$ est déterminé au hasard par la fonction **Random** d'un calculateur électronique ($a$ est donc la réalisation d'une variable aléatoire de densité uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$, et $a$ est susceptible de changer d'une épreuve à l'autre, mais est une constante pour une épreuve donnée).
- chacun des $n$ candidats est alors invité à proposer son évaluation de $a$, en inscrivant, en secret et indépendamment des autres, sa réponse sur papier.
- sera alors sélectionné pour le jeu celui des $n$ candidats dont la réponse sera la plus proche de $a$ (par valeur supérieure ou inférieure).

On fait les hypothèses suivantes :

- la réponse du candidat $i$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, est une variable aléatoire, note $X_i$, à densité, de loi uniforme sur $[0, 1]$.
- les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

On admet que chaque épreuve de sélection ne fournit qu'un seul gagnant.

On s'intéresse à la variable aléatoire $Z_a$, mesurant l'erreur aléatoire d'évaluation de $a$ par le gagnant d'une épreuve de sélection.

1. Exprimer $Z_a$ en fonction des variables aléatoires $X_i, (1 \leqslant i \leqslant n)$ et de $a$. Préciser $Z_a(\Omega)$.

2. Le calculateur fournit la valeur $a = 1$.
   a) Déterminer la fonction de répartition de $Z_1$ ; en déduire une densité de $Z_1$.
   b) Calculer l'espérance et la variance de $Z_1$.

3. On revient au cas général où $a$ est une valeur quelconque de l'intervalle $[0, 1]$ .
   a) Déterminer la fonction de répartition de $Z_a$ (on distinguera deux cas en comparant $a$ à $1/2$).
   b) En déduire une densité de $Z_a$.

4. En plus d'être l'heureux élu, le candidat sélectionné gagne, en cadeau de bienvenue, la somme $1 - Z_a$, exprimée en milliers d'Euros. Calculer l'espérance de gain, à l'issue de cette phase de sélection, du vainqueur d'une épreuve.

---

Q1 $Z_a = \min(|X_1-a|, |X_2-a|, \dots, |X_n-a|)$.

$\forall x \in [0,a]$, $|x-a| = a-x$ et $\forall x \in [a,1]$, $|x-a| = x-a$

posons $\forall x \in [0,1]$, $u(x) = |x-a|$ ; d'après la ligne précédente $u([0,a]) = [0,a]$

et $u([a,1]) = [0,1-a]$.

Alors $u([0,1]) = [0, \max(a,1-a)]$.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $X_i$ prend alors ses valeurs dans ce dernier intervalle ;

$Z_a$ également.

$Z_a$ prend ses valeurs dans $[0, \max(a,1-a)]$.

(Q2) a) $Z_1(\Omega) = [0, \max(1,0)] = [0,1]$.

$\forall x \in ]-\infty, 0[, \ F_{Z_1}(x) = 0$. $\forall x \in [1, +\infty[, \ F_{Z_1}(x) = 1$.

Soit $x \in [0,1[$.

$F_{Z_1}(x) = p(Z_1 \leqslant x) = 1 - p(Z_1 > x) = 1 - p(\min(|X_1 - 1|, \dots, |X_n - 1|) > x)$

$F_{Z_1}(x) = 1 - p(\{|X_1-1|>x\} \cap \dots \cap \{|X_n - 1| > x\}) \underset{\uparrow}{=} 1 - \prod_{k=1}^{n} p(|X_k - 1| > x)$

indépendance de $|X_1 - 1|, \dots, |X_n - 1|$

$F_{Z_1}(x) = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - p(|X_k - 1| \leqslant x)) = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - p(1 - x \leqslant X_k \leqslant 1 + x))$

$F_{Z_1}(x) = 1 - \prod_{k=1}^{n} \left(1 - F_{X_k}(1+x) + F_{X_k}(1-x)\right) \underset{\uparrow}{\overset{x \in [0,1[}{=}} 1 - \prod_{k=1}^{n} \left(1 - 1 + (1-x)\right) = 1 - (1-x)^n$.

$F_{X_k}(u) = \begin{cases} 0 \text{ si } u \in ]-\infty, 0[ \text{ ou } ]-\infty, 0] \\ u \text{ si } u \in [0,1] \\ 1 \text{ si } u \in ]1, +\infty[ \text{ ou } [1, +\infty \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}, F_{Z_1}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in ]-\infty, 0[ \text{ ou } ]-\infty, 0[ \text{ ou } ]-\infty, 0] \\ 1 - (1-x)^n \text{ si } x \in [0,1[ \text{ ou } [0,1] \\ 1 \quad \text{si } x \in [1, +\infty[ \end{cases}$.

$Z_1$ est de classe $C^1$ sur $]-\infty, 0]$, $[0,1]$ et $[1, +\infty[$ ; $Z_1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $C^1$ sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$. $Z_1$ est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in ]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[, \ F'_{Z_1}(x) = 0$ et $\forall x \in ]0,1[, \ F'_{Z_1}(x) = n(1-x)^{n-1}$.

Pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{Z_1}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in ]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[ \\ n(1-x)^{n-1} \text{ si } x \in [0,1] \end{cases}$ ; $f_{Z_1}$ est une densité de $Z_1$.

b) $\int_{-\infty}^{0} t f_{Z_1}(t)\,dt$ et $\int_{1}^{+\infty} t f_{Z_1}(t)\,dt$ existent et valent 0.

De plus $t \mapsto t f_{Z_1}(t)$ est continue sur $[0,1]$, ainsi $E(Z_1)$ existe et vaut $\int_0^1 t f_{Z_1}(t)\,dt$

$E(Z_1) = \int_0^1 t f_{Z_1}(t)\,dt = \int_0^1 t\, n(1-t)^{n-1}\,dt \underset{\uparrow}{=} n \int_0^1 (1-t)^{n-1}\,dt - n \int_0^1 (1-t)^n\,dt$

$t = 1 - (1-t)$

$E(Z_1) = \left[-(1-t)^n\right]_0^1 - n\left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 1 - \frac{n}{n+1}$. $E(Z_1) = \frac{1}{n+1}$.

$\int_{-\infty}^{0} t^2 f_{Z_1}(t)\,dt$ et $\int_{1}^{+\infty} t^2 f_{Z_1}(t)\,dt$ existent et valent 0 ; $t \mapsto t^2 f_{Z_1}(t)$ étant continue sur $[0,1]$,

$E(X^2)$ existe et vaut $\int_0^1 t^2 f_{Z_1}(t)\,dt$. Ainsi <u>X possède une variance</u>.

$$E(X^2) = \int_0^1 t^2 n(1-t)^{n-1}\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ t^2=(1-t)^2-2(1-t)+1}}{=} n\int_0^1 (1-t)^{n+1}\,dt - 2n\int_0^1 (1-t)^{n}\,dt + n\int_0^1 (1-t)^{n-1}\,dt.$$

$E(X^2) = \frac{n}{n+2} - \frac{2n}{n+1} + 1$ (ok ?) ; $E(X^2) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$. $V(X) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)^2}$.

$$\boxed{V(X) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}}.$$

**Exercice 36** $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la loi exponentielle de paramètre 1. (P1)

Q1. $t$ est un réel strictement positif. Montrer que $-tY$ est une variable aléatoire réelle à densité et en donner une densité.

Montrer que $X - tY$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction $h$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{t+1} & \text{si } x \in ]0, +\infty[ \\ \dfrac{e^{\frac{x}{t}}}{t+1} & \text{si } x \in ]-\infty, 0] \end{cases}$$

Q2. Utiliser ce qui précède pour montrer que $Z = \dfrac{X}{Y}$ est une variable aléatoire à densité et pour en donner une densité.

Q3. Utiliser Q2 pour montrer que $U = \dfrac{X}{X+Y}$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

---

(Q1) Rappelons que la fonction de répartition $F_Y$ de $Y$ est définie par :

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} \text{ si } x \in [0, +\infty[ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Notons $G_t$ la fonction de répartition de $-tY$ (qui est une variable aléatoire car $Y$ est une variable aléatoire).

$\forall x \in \mathbb{R},\ G_t(x) = P(-tY \leq x) = P(tY \geq -x) \overset{t>0}{=} P(Y \geq -\frac{x}{t}) = 1 - P(Y < -\frac{x}{t}) \overset{Y \text{ est à densité}}{=} 1 - P(Y \leq -\frac{x}{t})$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ G_t(x) = 1 - F_Y(-\frac{x}{t})$.

$\forall x \in ]0, +\infty[,\ G_t(x) = 1 - 0 = 1$ et $\forall x \in ]-\infty, 0],\ G_t(x) = 1 - (1 - e^{-(-\frac{x}{t})}) = e^{x/t}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ G_t(x) = \begin{cases} e^{x/t} \text{ si } x \in ]-\infty, 0] \\ 1 \text{ si } x \in ]0, +\infty[ \end{cases}$.

$G_t$ est de classe $C^1$ sur $]-\infty, 0]$ et $]0, +\infty[$ (car $x \mapsto e^{x/t}$ et $x \mapsto 1$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$). Alors
→ $G_t$ est au moins de classe $C^1$ sur $\mathbb{R} - \{0\}$.
→ $G_t$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$
→ $G_t$ est continue à gauche en 0.

De plus $G_t$ est continue à droite en 0 comme fonction de répartition d'une variable aléatoire !

Finalement $G_t$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $C^1$ sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

Ceci suffit pour dire que <u>$-tY$ est une variable aléatoire à densité</u>.

$\forall x \in ]-\infty, 0[,\ G_t(x) = e^{x/t}$ ; $\forall x \in ]-\infty, 0[,\ G'_t(x) = \frac{1}{t} e^{x/t}$

$\forall x \in ]0, +\infty[,\ G_t(x) = 1$ ; $\forall x \in ]0, +\infty[,\ G'_t(x) = 0$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_t(x) = \begin{cases} \frac{1}{t} e^{x/t} \text{ si } x \in ]-\infty, 0] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$f_t$ est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide sur $\mathbb{R} - \{0\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points avec $G_t$. Ainsi $f_t$ est une densité de $-tY$.

Si $\forall x \in \mathbb{R},\ f_t(x) = \begin{cases} \frac{1}{t} e^{x/t} \text{ si } x \in ]-\infty, 0] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ alors $f_t$ est une densité de $-tX$.

Remarque.. $\forall x \in ]-\infty, 0],\ 0 \leq \frac{1}{t} e^{x/t} \leq \frac{1}{t}$ ; $\forall x \in ]-\infty, 0],\ 0 \leq f_t(x) \leq \frac{1}{t}$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq f_t(x) \leq \frac{1}{t}$. $f_t$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{-x} \text{ si } x \in [0, +\infty[ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. $f$ est une densité de $X$.

Notons que $f$ est également bornée sur $\mathbb{R}$ ( $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq f(x) \leq 1$).

$X$ et $Y$ sont indépendantes ainsi :

1/ $X$ et $-tY$ sont indépendantes

2/ $X$ et $-tY$ sont des variables aléatoires à densité admettant pour densité $f$ et $f_t$

3/ $f_t$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Alors 1/ $X+(-tY)$ est une variable aléatoire à densité.

2/ $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) f_t(x-u)\,du$ est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) f_t(x-u)\,du = \int_0^{+\infty} e^{-u} f_t(x-u)\,du$.

Le petit changement de variable $v = x-u$ donne aisément $h(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-(x-v)} f_t(v)\,dv$

1er cas... $x \in ]0,+\infty[$. $h(x) = \int_{-\infty}^{0} e^{-(x-v)} \frac{1}{t} e^{v/t} dv = e^{-x} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{t} e^{(1+\frac{1}{t})v} dv$

$h(x) = \frac{e^{-x}}{t} \lim_{A \to -\infty} \left[ \left[ \frac{e^{(1+\frac{1}{t})v}}{1+\frac{1}{t}} \right]_A^0 \right] = e^{-x} \frac{1}{1+t} = \frac{e^{-x}}{1+t} = \frac{e^{-x}}{t+1}$.

2e cas... $x \in ]-\infty,0]$. $h(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-(x-v)} \frac{1}{t} e^{v/t} dv = e^{-x} \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{x} e^{(1+\frac{1}{t})v} dv$

$h(x) = \frac{e^{-x}}{t} \lim_{A \to -\infty} \left[ \frac{e^{(1+\frac{1}{t})v}}{1+\frac{1}{t}} \right]_A^x = \frac{e^{-x}}{t+1} e^{(1+\frac{1}{t})x} = \frac{e^{x/t}}{t+1}$.

19 $X-tY$ est une variable à densité.
et la fonction $h$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{t+1} & \text{si } x \in ]0,+\infty[ \\ \frac{e^{x/t}}{t+1} & \text{si } x \in ]-\infty,0] \end{cases}$ en est une densité.

(Q2) Notons $F_Z$ la fonction de répartition de $Z$ et remarquons que $Z$ prend ses valeurs dans $[0,+\infty[$ ($X$ et $Y$ prennent leurs valeurs dans $[0,+\infty[$).

$\forall t \in ]-\infty,0[$, $F_Z(t) = 0$

$F_Z(0) = P\left(\frac{X}{Y} \leq 0\right) = P(X=0) = 0$

Soit $t \in ]0,+\infty[$. $Y$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

$F_Z(t) = P\left(\frac{X}{Y} \leq t\right) = P(X \leq tY) = P(X - tY \leq 0) = \int_{-\infty}^{0} h(x)\, dx$.

$F_Z(t) = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{x/t}}{t+1} dx = \lim_{A \to -\infty} \left[ \frac{t}{t+1} e^{x/t} \right]_{-\infty}^{0} = \frac{t}{t+1}$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in ]-\infty,0] \\ \frac{t}{t+1} & \text{si } t \in ]0,+\infty[ \end{cases}$

$F_Z$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0]$ et $]0,+\infty[$ car $t \mapsto 0$ et $t \mapsto \frac{t}{t+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- $F_Z$ est donc de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^*$
- $F_Z$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ et à gauche en 0.
- $\lim_{t \to 0^+} F_Z(t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{t}{1+t} = 0 = F_Z(0)$ ; $F_Z$ est continue à droite en 0.

Le tout suffit pour dire que <u>Z est une variable aléatoire à densité.</u>

$\forall t \in ]-\infty, 0[$, $F_Z(t) = 0$ ; $\forall t \in ]-\infty, 0[$, $F_Z'(t) = 0$.

$\forall t \in ]0, +\infty[$, $F_Z(t) = \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$ ; $\forall t \in ]0, +\infty[$, $F_Z'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \begin{cases} \frac{1}{(1+t)^2} & \text{si } t \in [0, +\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. <u>g est une densité de Z</u>

car g est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec $F_Z'$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

(Q3) U prend ses valeurs dans $[0, 1]$ car X et Y prennent leurs valeurs dans $[0, +\infty[$. Soit $F_U$ la fonction de répartition de U.

$\forall x \in ]-\infty, 0[$, $F_U(x) = 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $F_U(x) = 1$.

Soit $x \in [0, 1[$.

$$F_U(x) = P(U \leq x) = P\left(\frac{X}{X+Y} \leq x\right) \overset{\substack{X+Y \text{ prend ses valeurs dans } \mathbb{R}_+ \\ \Downarrow}}{=} P(X \leq x(X+Y)) = P((1-x)X \leq xY)$$

$$F_U(x) \underset{\substack{\uparrow \\ 1-x>0}}{=} P\left(X \leq \frac{x}{1-x} Y\right) \underset{\substack{\uparrow \\ Y \text{ prend ses valeurs dans } \mathbb{R}_+}}{=} P\left(\frac{X}{Y} \leq \frac{x}{1-x}\right) = F_Z\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

Si $x \in ]0, 1[$ donc $\frac{x}{1-x} > 0$ : $F_U(x) = F_Z\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{x}{1-x} + 1} = \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1}{1-x}} = x$.

Si $x = 0$ : $\frac{x}{1-x} = 0$ : $F_U(x) = F_Z\left(\frac{x}{1-x}\right) = F_Z(0) = 0 = x$ !

$\forall x \in [0, 1[$, $F_U(x) = x$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\infty, 0[ \\ x & \text{si } x \in [0, 1[ \\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[ \end{cases}$. <u>$U = \frac{X}{X+Y}$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.</u>

**Exercice 37 Loi Bêta.**

Q1. Trouver le domaine de définition $D$ de $B : (\alpha, \beta) \to \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt$.

Rappeler la valeur de $B(r+1, s+1)$ pour $r$ et $s$ dans $\mathbb{N}$.

Q2. $(\alpha, \beta)$ est un élément de $D$. $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)}\, t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} & \text{si } t \in ]0,1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que $f$ est une densité de probabilité. (*)

Q3. $n$ et un élément de $\mathbb{N}^*$ et $p$ est un élément de $[\![0, n-1]\!]$. Le contrôle d'embarquement des voitures de la SNCM dans le port de Nice est constitué de $n$ postes.

Une voiture $\gamma$ se présente au contôle. Tous les postes sont occupés et $p$ voitures attendent déjà. On suppose que :

- L'intant 0 est l'instant où la voiture arrive au contrôle ;
- Chaque contôle prend $a$ minutes ($a > 0$) ;
- les instants des débuts des contrôles des $n$ voitures qui occupent les postes sont des variables aléatoires indépendantes $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ qui suivent une loi uniforme sur $[-a, 0]$.

On note $T$ le temps d'attente de la voiture $\gamma$.

a) Préciser $T(\Omega)$. En déduire une bonne partie de la fonction de répartition $F_T$ de $T$.

b) $t$ est un élément de $[0, a[$. Préciser la loi de la variable aléatoire $Y_t$ égale au nombre de postes qui se libèrent pour la première fois avant l'instant $t$. En déduire $F_T(t)$.

c) Montrer que $T$ est une variable aléatoire à densité et en donner une densité. Montrer que $\dfrac{1}{a}T$ suit une loi Bêta.

d) Calculer $E(T)$.

(*) Une var ad qui a pour densité $f$ suit une loi bêta de paramètres $\alpha$ et $\beta$.

---

**Q1** Posons $\forall t \in ]0,1[$, $u(t) = t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$.

- $u$ est continue et positive sur $]0,1[$
- $u(t) \underset{0}{\sim} t^{\alpha-1} = \dfrac{1}{t^{1-\alpha}}$ et $u(t) \underset{1}{\sim} (1-t)^{\beta-1} = \dfrac{1}{(1-t)^{1-\beta}}$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives indiquent que $\to \displaystyle\int_0^{1/2} u(t)\,dt$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^{1-\alpha}}$.

$\to \displaystyle\int_{1/2}^1 u(t)\,dt$ est de même nature que $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{dt}{(1-t)^{1-\beta}}$.

Alors $\displaystyle\int_0^{1/2} u(t)\,dt$ (resp. $\displaystyle\int_{1/2}^1 u(t)\,dt$) converge si et seulement si $1-\alpha < 1$ (resp. $1-\beta < 1$).

Finalement $\displaystyle\int_0^1 u(t)\,dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Ainsi le domaine de définition de $B : (\alpha,\beta) \mapsto \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt$ est $]0,+\infty[ \times ]0,+\infty[$.

Rappel : $\forall (r,s) \in \mathbb{N}^2$, $B(r+1, s+1) = \int_0^1 t^r (1-t)^s \, dt = \dfrac{r!\, s!}{(r+s+1)!}$

Remarque : $\forall (\alpha,\beta) \in ]0,+\infty[^2$, $B(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

Q2 Soit $(\alpha,\beta) \in D = ]0,+\infty[^2$. $u : t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est strictement positive sur $]0,1[$.

Ainsi $\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} \, dt = B(\alpha,\beta) > 0$.

* Il est alors clair que $f$ est définie et positive sur $\mathbb{R}$.

$u$ étant continue sur $]0,1[$, $f$ est continue sur $]0,1[$.

$f$ étant nulle sur $]-\infty,0] \cup [1,+\infty[$, $f$ est continue sur $]-\infty,0]$ et sur $[1,+\infty[$.

Ainsi $f$ est au moins continue sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

$\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt$ et $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ existent et valent $0$.

$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt$ existe et vaut $B(\alpha,\beta)$ donc $\int_0^1 f(t)\,dt$ existe et vaut $1$.

Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut $1$. Ceci achève de prouver que

$f$ est une densité de probabilité.

Q3 a) $T(\Omega) = [0,a]$ car les $n$ voitures qui occupent les portes sont arrivées dans l'intervalle de temps $[-a,0]$ et reparties dans l'intervalle de temps $[-a+a, 0+a] = [0,a]$.

Alors $\forall t \in ]-\infty, 0[$, $F_T(t) = P(T \leq t) = 0$ et $\forall t \in [a,+\infty[$, $F_T(t) = P(T \leq t) = 1$.

b) Soit $t \in [0,a[$. $Y_t$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $\alpha_t$ où $\alpha_t$ est la probabilité pour que l'événement $\{X_i + a \leq t\}$ se réalise ($i$ étant un élément quelconque de $[\![1,n]\!]$).

$\alpha_t = P(X_i + a \leq t) = P(X_i \leq t-a) = \dfrac{(t-a)-(-a)}{0-(-a)} = \dfrac{t}{a}$ car $t-a \in [-a,0[$ et $X_i \hookrightarrow U([-a,0])$.

$\forall t\in[0,a[,\ Y_t \hookrightarrow \mathcal{B}(n,\frac{t}{a})$.

Soit $t\in[0,a[$, $F_T(t)=P(T\leq t)=P(Y_t\geq p+1)$ ; en effet $\{T\leq t\}$ se réalise si et seulement si $p+1$ portes se libèrent avant l'instant $t$.

Ainsi $F_T(t)=\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{t}{a}\right)^k\left(1-\frac{t}{a}\right)^{n-k}$.

$$\forall t\in\mathbb{R},\ F_T(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } t\in\,]-\infty,0[ \text{ ou } ]-\infty,0] \\ \displaystyle\sum_{k=p+1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{t}{a}\right)^k\left(1-\frac{t}{a}\right)^{n-k} & \text{si } t\in[0,a[ \text{ ou } [0,a] \\ 1 & \text{si } t\in[a,+\infty[ \end{cases}$$

c) $F_T$ est de classe $C^1$ sur $]-\infty,0]$, sur $[0,a]$ et sur $[a,+\infty[$.

Ainsi $F_T$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $C^1$ au moins sur $\mathbb{R}-\{0,a\}$.

$T$ est donc une variable aléatoire à densité.

$\forall t\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]a,+\infty[,\quad F_T'(t)=0$.

$$\forall t\in\,]0,a[,\ F_T'(t)=\sum_{k=p+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{a^n}\left[k t^{k-1}(a-t)^{n-k}-(n-k)t^k(a-t)^{n-k-1}\right]$$

Soit $t\in\,]0,a[$. $$a^nF_T'(t)=\sum_{k=p+1}^{n}\underbrace{k\binom{n}{k}}_{n\binom{n-1}{k-1}}t^{k-1}(a-t)^{n-k}-\sum_{k=p+1}^{n \text{ ou } n-1}\binom{n}{k}(n-k)t^k(a-t)^{n-k-1}$$

$$a^nF_T'(t)=\sum_{k=p+1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}t^{k-1}(a-t)^{n-k}-\sum_{k=p+1}^{n-1}\binom{n}{k}(n-k)t^k(a-t)^{n-k-1}.$$

$$a^nF_T'(t)=\sum_{k=p}^{n-1}n\binom{n-1}{k}t^k(a-t)^{n-k-1}-\sum_{k=p+1}^{n-1}\binom{n}{k}(n-k)t^k(a-t)^{n-k-1}.$$

$$a^nF_T'(t)=n\binom{n-1}{p}t^p(a-t)^{n-p-1}+\sum_{k=p+1}^{n-1}\underbrace{\left[n\binom{n-1}{k}-(n-k)\binom{n}{k}\right]}_{=0}t^k(a-t)^{n-k-1}$$

$$a^nF_T'(t)=n\binom{n-1}{p}t^p(a-t)^{n-p-1}.\qquad\qquad \frac{n\,(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}-(n-k)\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=0$$

$\forall t \in ]-\infty,0[\cup]a,+\infty[,\ F_T'(t)=0$ et $\forall t\in ]0,a[,\ F_T'(t)=\frac{n}{a}\binom{n-1}{p}\left(\frac{t}{a}\right)^p\left(1-\frac{t}{a}\right)^{n-p-1}$.

Posons $\forall t\in\mathbb{R},\ g(t)=\begin{cases}\frac{n}{a}\binom{n-1}{p}\left(\frac{t}{a}\right)^p\left(1-\frac{t}{a}\right)^{n-p-1} & \text{si } t\in]0,a[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

$g$ est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec $F_T'$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. $g$ est une densité de $T$.

Posons $Z=\frac{1}{a}T$. $Z$ est une variable aléatoire à densité et

$h: t\mapsto \frac{1}{|1/a|}\,g\left(\frac{t-0}{1/a}\right)$ en est une densité. $\forall t\in\mathbb{R},\ h(t)=a\,g(at)$.

$\forall t\in ]-\infty,0]\cup[1,+\infty[,\ h(t)=0$. $\forall t\in]0,1[,\ h(t)=a\,\frac{n}{a}\binom{n-1}{p}\left(\frac{at}{a}\right)^p\left(1-\frac{at}{a}\right)^{n-p-1}$

$\forall t\in]0,1[,\ h(t)=\frac{n!}{p!\,(n-1-p)!}\,t^p(1-t)^{n-p-1}$.

Posons $\alpha=p+1$ et $\beta=n-p$. Alors $\alpha>0$ et $\beta>0$. $\int_0^1 t^p(1-t)^{n-p-1}dt=B(\alpha,\beta)$.

Or $1=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)dt=\int_0^1 h(t)dt=\frac{n!}{p!\,(n-p-1)!}B(\alpha,\beta)$; $B(\alpha,\beta)=\frac{p!\,(n-p-1)!}{n!}$.

Ainsi $\forall t\in\mathbb{R},\ h(t)=\begin{cases}\frac{1}{B(\alpha,\beta)}t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} & \text{si } t\in]0,1[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Alors $\frac{1}{a}T$ suit une loi beta de paramètres $p+1$ et $n-p$.

d) $\int_{-\infty}^0 t\,h(t)dt$ et $\int_1^{+\infty}t\,h(t)dt$ existent et valent 0.

$\int_0^1 t\,h(t)dt=\frac{n!}{p!\,(n-1-p)!}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{n-p-1}dt$ existe et vaut $\frac{n!}{p!\,(n-1-p)!}B(p+2,n-p)$.

Ainsi $E(X)$ existe et vaut $\frac{n!}{p!\,(n-1-p)!}\times\frac{(p+1)!\,(n-p-1)!}{(n+1)!}=\frac{p+1}{n+1}$. Alors $E(T)$ existe et vaut $\frac{p+1}{n+1}a$.

**Exercice 38** **En plus 14. Loi normale. Loi gamma** Un point se déplace dans un plan muni d'un repère orthonormé. Il part de l'origine $O$ des coordonnées à l'instant 0.

Si à l'instant $t = k, k \in \mathbb{N}$ il se situe au point de coordonnées $(X_k, Y_k)$, alors à l'instant $t = k+1$ il se trouve au point de coordonnées $(X_{k+1}, Y_{k+1})$ de sorte que $A_{k+1} = X_{k+1} - X_k$ et $B_{k+1} = Y_{k+1} - Y_k$ suivent la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

On suppose les $A_i$ et les $B_j$ mutuellement indépendantes. On rappelle que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Q1. a) Quelle est la loi suivie par $X_n$ ?

b) Soit $M_n$ le point de coordonnées $(X_n, Y_n)$. Exprimer, à l'aide de la fonction de répartition $\Phi$ d'une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, la probabilité qu'à l'instant $n$ le point $M_n$ se trouve dans le carré $C = [-1,1]^2$.

Q2. Soit $D_n$ la distance de $M_n$ à l'origine : $D_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}$.

a) Reconnaître la loi de $X_n^2$, puis celle de $D_n^2$. En déduire la loi de $D_n$ et calculer son espérance.

b) Quelle est la probabilité qu'à l'instant $n$ le point se trouve dans le disque de centre $O$ et de rayon 1 ?

---

Q1 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{k=0}^{n-1} A_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} (X_{k+1} - X_k) = X_n - X_0 = X_n$ car $X_0 = 0$.

Ainsi $X_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} A_k$.

$(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent toutes la loi normale de paramètres 0 et $1^2$.

Le théorème de stabilité sur les lois normales montre que $X_n$ suit la loi normale de paramètres 0 et $(\sqrt{n})^2$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0, (\sqrt{n})^2)$. Notons également que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0, (\sqrt{n})^2)$.

b) Notons $\alpha_n$ la probabilité qu'à l'instant $n$ le point $M_n$ se trouve dans le carré $C = [-1,1]^2$. $\alpha_n = P(\{-1 \leqslant X_n \leqslant 1\} \cap \{-1 \leqslant Y_n \leqslant 1\}) = P(\{|X_n| \leqslant 1\} \cap \{|Y_n| \leqslant 1\})$.

* Par indépendance $\alpha_n = P(|X_n| \leqslant 1)\, P(|Y_n| \leqslant 1)$. $X_n$ et $Y_n$ ayant même loi :

$\alpha_n = (P(|X_n| \leqslant 1))^2$. $X_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sqrt{n}^2)$ donc $\frac{X_n - 0}{\sqrt{n}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Ainsi $P(|X_n| \leqslant 1) = P\left(\left|\frac{X_n - 0}{\sqrt{n}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2\,\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1$.

Finalement $\alpha_n = \left(2\,\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)^2$.

La probabilité qu'à l'instant $n$ le point $M_n$ se trouve dans le carré $C = [-1,1]^2$ est $\left(2\,\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)^2$.

* $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$ sont indépendantes donc $X_n = \sum_{k=0} A_k$ et $Y_n = \sum_{k=0} B_k$ sont indépendantes.

(Q2) c) Pour $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_{X_n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{2(\sqrt{n})^2}}$. $f_{X_n}$ est une densité de $X_n$ continue sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction de répartition $F_{X_n}$ de $X_n$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'_{X_n}(x) = f_{X_n}(x)$.

Notons $F_{X_n^2}$ la fonction de répartition de $X_n^2$. $X_n^2$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

$\forall x \in ]-\infty, 0[$, $F_{X_n^2}(x) = 0$.

$\forall x \in [0, +\infty[$, $F_{X_n^2}(x) = P(X_n^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X_n \leq \sqrt{x}) = F_{X_n}(\sqrt{x}) - F_{X_n}(-\sqrt{x})$.

$F_{X_n^2}$ est de classe $C^1$ sur $]-\infty, 0[$ car elle est nulle sur cet intervalle.

$x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto -\sqrt{x}$ sont de classe $C^1$ sur $]0, +\infty[$ et $F_{X_n}$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

Par composition $F_{X_n^2}$ est de classe $C^1$ sur $]0, +\infty[$.

Ainsi $F_{X_n^2}$ est au moins de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

$F_{X_n^2}$ est donc continue en tout point de $\mathbb{R}_+^*$.

$$\lim_{x \to 0^+} F_{X_n^2}(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(F_{X_n}(\sqrt{x}) - F_{X_n}(-\sqrt{x})\right) \underset{\substack{\uparrow \\ F_{X_n} \text{ est continue sur } \mathbb{R}}}{=} F_{X_n}(0) - F_{X_n}(0) = 0 = F_{X_n^2}(0) \quad \text{et}$$

$\lim_{x \to 0^-} F_{X_n^2}(x) = 0 = F_{X_n^2}(0)$. Donc $F_{X_n^2}$ est continue en 0.

$F_{X_n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $X_n^2$ est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in ]0, +\infty[$, $F_{X_n^2}(x) = F_{X_n}(\sqrt{x}) - F_{X_n}(-\sqrt{x})$ donc

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \ F'_{X_n^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[F'_{X_n}(\sqrt{x}) + F'_{X_n}(-\sqrt{x})\right] = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(f_{X_n}(\sqrt{x}) + f_{X_n}(-\sqrt{x})\right) \overset{\substack{f_{X_n} \text{ est paire} \\ \downarrow}}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} f_{X_n}(\sqrt{x})$$

$\forall x \in ]-\infty, 0[$, $F_{X_n^2}(x) = 0$ donc $\forall x \in ]-\infty, 0[$, $F'_{X_n^2}(x) = 0$

$$\text{Pour } \forall x \in \mathbb{R}, \ f_{X_n^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} f_{X_n}(\sqrt{x}) & \text{si } x \in ]0, +\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$f_{X_n^2}$ est une fonction positive sur sa domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec $F'_{X_n^2}$ sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Ainsi $f_{X_n^2}$ est une densité de $X_n^2$.

$\forall x \in ]0,+\infty[,\ f_{X_n^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t_n}}\, e^{-\frac{(\sqrt{x})^2}{2t_n}} = \frac{x^{1/2-1}\, e^{-\frac{x}{2t_n}}}{(2t_n)^{1/2}\ \sqrt{\pi}} = \frac{x^{1/2-1}\, e^{-x/2t_n}}{(2t_n)^{1/2}\ \Gamma(1/2)}$ et

$\forall x \in ]-\infty,0],\ f_{X_n^2}(x) = 0$.

$X_n^2$ suit donc la loi gamma de paramètres $2t_n$ et $1/2$.

De même $Y_n^2 \hookrightarrow \Gamma(2t_n, 1/2)$.

$X_n$ et $Y_n$ étant indépendantes, $X_n^2$ et $Y_n^2$ le sont également.

Le théorème de stabilité sur les lois gamma montre que : $X_n^2+Y_n^2 \hookrightarrow \Gamma(2t_n, 1)$.

$D_n^2 = X_n^2+Y_n^2 \hookrightarrow \Gamma(2t_n,1)$ ce qui signifie que $D_n^2$ suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2t_n}$. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{D_n^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2t_n} e^{-x/2t_n} & \text{si } x \in ]0,+\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ; $f_{D_n^2}$ est une densité de $D_n^2$.

$D_n$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Notons $F_{D_n}$ sa fonction de répartition.

$\forall x \in ]-\infty,0[,\ F_{D_n}(x) = 0$.

$\forall x \in [0,+\infty[,\ F_{D_n}(x) = P(D_n \leq x) = P(D_n^2 \leq x^2) = F_{D_n^2}(x^2)$.

$F_{D_n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et elle donc $C^1$ au moins sur $\mathbb{R}^*$ car $f_{D_n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$

Alors $F_D$ est continue sur $]-\infty,0[$ et sur $[0,+\infty[$, et de classe $C^1$ au moins sur $\mathbb{R}^*$ ($x \mapsto x^2$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}$).

$\lim_{x \to 0^-} F_{D_n}(x) = 0$ & $F_{D_n^2}(0) = \int_{-\infty}^{0} f_{D_n^2}(t)\,dt = 0$.

Alors $\lim_{x\to 0^-} F_{D_n}(x) = 0 = F_{D_n^2}(0) = F_{D_n^2}(0^2) = F_{D_n}(0)$ ; $F_{D_n}$ est continue à gauche en 0.

$F_{D_n}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Ceci suffit pour dire que

$D_n$ est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in ]-\infty,0[,\ F_{D_n}(x) = 0$ donc $\forall x \in ]-\infty,0[,\ F'_{D_n}(x) = 0$.

$\forall x \in ]0,+\infty[,\ F_{D_n}(x) = F_{D_n^2}(x^2)$ donc $\forall x \in ]0,+\infty[,\ F'_{D_n}(x) = 2x F'_{D_n^2}(x^2) = 2x f_{D_n^2}(x^2)$

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{D_n}(x) = \begin{cases} 2x f_{D_n^2}(x^2) & \text{si } x \in ]0,+\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$f_{D_n}$ est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec $F'_{D_n}$ sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

<u>$f_{D_n}$ est une densité de $D_n$.</u>

<u>$\forall x \in ]0,+\infty[$, $f_{D_n}(x) = 2x \times \frac{1}{2n} e^{-\frac{x^2}{2n}} = \frac{x}{n} e^{-\frac{x^2}{2n}}$ et $\forall x \in ]-\infty, 0]$, $f_{D_n}(x) = 0$.</u>

Pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-x^2/2n}$. $\varphi$ est une densité d'une variable aléatoire

qui suit la loi normale de paramètre de paramètres $0$ et $\sqrt{n}^2$.

Si $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sqrt{n}^2)$, $E(Z^2)$ existe et vaut $V(Z) + (E(Z))^2$ donc $n$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x)\,dx$ existe et vaut $n$. Par parité $\int_0^{+\infty} x^2 \varphi(x)\,dx$ existe et vaut $\frac{n}{2}$.

$\forall x \in ]0,+\infty[$, $x f_{D_n}(x) = x \frac{x}{n} \sqrt{2\pi}\sqrt{n}\,\varphi(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} x^2 \varphi(x)$.

Alors $\int_0^{+\infty} x f_{D_n}(x)\,dx$ existe et vaut $\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \times \frac{n}{2} = \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$.

Comme $\int_{-\infty}^{0} x f_{D_n}(x)$ existe et vaut $0$ : <u>$E(D_n)$ existe et vaut $\sqrt{\frac{n\pi}{2}}$.</u> ▲

<u>b)</u> Notons $p_n$ la probabilité qu'à l'instant $n$ le point se trouve dans le disque de centre O et de rayon 1

$p_n = P(D_n \leq 1) = P(D_n^2 \leq 1) = F_{D_n^2}(1) = 1 - e^{-\frac{1}{2n}}$.

<u>La probabilité qu'à l'instant $n$ le point se trouve dans le disque de centre O et de rayon 1 est</u>

<u>$1 - e^{-1/2n}$.</u>

---

▲ On peut retrouver $E(D_n)$ en utilisant le théorème de transfert. $D_n = |D_n| = \sqrt{D_n^2}$

Pour $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g(t) = \sqrt{t}$. $D_n^2$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $g$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Alors $E(g \circ D_n^2)$ existe si $\int_0^{+\infty} g(t) f_{D_n^2}(t)\,dt$ est absolument convergente ou

convergente car $\forall t \in ]0,+\infty[$, $g(t) f_{D_n^2}(t) \geq 0$

Or $\forall t \in ]0,+\infty[$, $g(t) f_{D_n^2}(t) = \sqrt{t}\,\frac{1}{2n} e^{-\frac{t}{2n}} = \frac{(2n)^{3/2}\Gamma(3/2)}{2n} \frac{t^{\frac{3}{2}-1} e^{-\frac{t}{2n}}}{(2n)^{3/2}\Gamma(3/2)}$.

$\int_0^{+\infty} \frac{t^{3/2-1} e^{-t/2n}}{(2n)^{3/2}\Gamma(3/2)}\,dt$ existe et vaut 1 ; $\int_0^{+\infty} g(t) f_{D_n^2}(t)\,dt$ existe et vaut $\sqrt{2n}\,\Gamma(3/2)$.

Alors $E(D_n)$ existe et vaut : $\sqrt{2n}\,\Gamma(3/2) = \sqrt{2n}\,\frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \sqrt{2n}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$.

**Exercice 29** **En plus 00 ! Loi normale.**

Q1. Le poids $X$ en Kg d'un nouveau né suit une loi normale de paramètres 3,2 et $(0,4)^2$. Déterminer : $P(2,8 \leqslant X \leqslant 3,6)$.

Q2. Une machine tire des pièces de longueur aléatoire suivant une loi normale de moyenne 1 m. La probabilité pour que la longueur soit inférieure à 98 cm est 1/10. Estimer l'écart type.

---

Q1 $X \hookrightarrow \mathcal{N}(3,2\,;(0,4)^2)$. $\frac{X-3,2}{0,4} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

$P(2,8\leq X\leq 3,6) = P\left(\frac{2,8-3,2}{0,4} \leq \frac{X-3,2}{0,4} \leq \frac{3,6-3,2}{0,4}\right) = P\left(-1\leq \frac{X-3,2}{0,4}\leq 1\right)$.

Notons $\Phi$ la fonction de répartition d'une variable qui suit la loi normale centrée réduite.

$P(2,8\leq X\leq 3,6)=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1 \simeq 2\times 0,8413-1=0,6826$

$P(2,8\leq X\leq 3,6)\simeq 0,6826$

Q2 Notons L la variable aléatoire égale à la longueur de la pièce.

$L \hookrightarrow \mathcal{N}(1,\sigma^2)$ où $\sigma$ est l'écart type de L. $\frac{L-1}{\sigma}\hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

$P(L\leq 0,98)=\frac{1}{10}$ ; $P\left(\frac{L-1}{\sigma}\leq\frac{0,98-1}{\sigma}\right)=\frac{1}{10}$ ; $P\left(\frac{L-1}{\sigma}\leq -\frac{0,02}{\sigma}\right)=\frac{1}{10}$.

$\Phi\left(-\frac{0,02}{\sigma}\right)=\frac{1}{10}$. $\Phi\left(\frac{0,02}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(-\frac{0,02}{\sigma}\right)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}=0,9$

Alors $\frac{0,02}{\sigma}=\Phi^{-1}(0,9)$. $\sigma=\frac{0,02}{\Phi^{-1}(0,9)}$.

$\Phi^{-1}(0,9)\simeq 1,28$. Nous obtenons $\sigma \simeq \frac{0,02}{1,28}=\frac{1}{64}$. $\sigma\simeq 0,015625$

Nous pouvons convenir que $\sigma$ vaut raisonnablement 0,0156.