
Exercice 40 **Loi log-normale.**

X est une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètres m et σ^2.

Q1. Montrer que $Y = e^X$ est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

Q2. a) m=0. Utiliser le théorème de transfert pour montrer l'existence et calculer $E(Y)$.

b) Traiter la même question avec m quelconque (on se ramènera au a)).

Q1 Notons F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et Y.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$. f_X est une densité de X et f_X est continue sur $\mathbb{R}$ donc F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'_X(x) = f_X(x)$.

Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi $\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_Y(x) = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(e^X \leq x) = P(X \leq \ln x) = F_X(\ln x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} F_X(\ln x) & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

F_Y est nulle sur $]-\infty, 0]$ donc F_Y est de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$.

$x \mapsto \ln x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Par composition F_Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$

Alors <u>F_Y est de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de point.</u> (1)

Notons que F_Y est continue à gauche en 0.

$\lim_{x \to 0^+} F_Y(x) = \lim_{x \to 0^+} F_X(\ln x) = \lim_{y \to -\infty} F_X(y) = 0 = F_Y(0)$; F_Y est continue à droite en 0.

ceci achève de montrer que <u>F_Y est continue sur $\mathbb{R}$</u> (2).

<u>(1) et (2) montrent que Y est une variable aléatoire à densité.</u>

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_Y(x) = 0$. $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F'_Y(x) = 0$.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $F_Y(x) = F_X(\ln x)$ et $F'_X = f_X$ donc $\forall x \in]0, +\infty[$, $F'_Y(x) = \frac{1}{x} f_X(\ln x)$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} f_X(\ln x) & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f_Y est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_Y sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. f_Y est une densité de Y.

Notons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \frac{1}{x} e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \end{cases}$

Q2 a) Ici $m = 0$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.

- X prend ses valeurs dans l'intervalle $I =]-\infty, +\infty[$
- $\varphi : t \mapsto e^t$ est continue sur I.
- X est une variable aléatoire de densité f_X.

Alors $E(\varphi \circ X)$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f_X(t)\, dt$ est absolument convergente

Donc $E(Y)$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f_X(t)\, dt$ est absolument convergente.

Notons que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) f_X(t) \geq 0$.

Donc $E(Y)$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f_X(t)\, dt$ est convergente.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} + t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t^2 - 2\sigma^2 t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t^2 - 2\sigma^2 t + \sigma^4 - \sigma^4)}$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) f_X(t) = e^{\frac{\sigma^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(t - \sigma^2)^2}{2\sigma^2}}$.

$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) f_X(t) = e^{\sigma^2/2} h(t)$ où h est la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}$.

h est la densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres σ^2 et σ^2. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt$ existe et vaut 1.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f_X(t)\,dt$ existe et vaut $e^{\sigma^2/2}$.

Ceci achève de montrer que $\underline{\underline{E(Y) \text{ existe et vaut } e^{\sigma^2/2}.}}$

b) Ici m est quelconque. Posons $Z = X - m$.

Alors $X = Z + m$ et Z suit la loi normale de paramètres 0 et σ^2.

Donc $E(e^Z)$ existe et vaut $e^{\sigma^2/2}$ d'après a).

Or $Y = e^X = e^{Z+m} = e^m e^Z$. Alors $E(Y)$ existe et vaut $e^m e^{\sigma^2/2}$.

$\underline{\underline{E(Y) \text{ existe et vaut } e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}.}}$

⚠ En toute rigueur nous aurions dû commencer à montrer que Y est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ relatif à X car le texte ne dit pas que Y est une variable aléatoire. Faisons le maintenant.

$\forall x \in]-\infty, 0],\ Y^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \leq x\} = \{\omega \in \Omega \mid e^X \leq x\} = \emptyset \in \mathcal{A}$.

$\forall x \in]0, +\infty[,\ Y^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid e^X \leq x\} = \{\omega \in \Omega \mid X \leq \ln x\} = X^{-1}(]-\infty, \ln x]) \in \mathcal{A}$

X est une variable aléatoire

Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ Y^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A}$. Ceci suffit pour dire que Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Exercice 41 **Densité, fonction de répartition, espérance, variance.**

a est un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_a(t) = \begin{cases} at^{-a-1} & \text{si } t \in [1, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Q1. Montrer que f_a est une densité de probabililité.

Q2. X est une variable aléatoire réelle admettant pour densité f_a.

a) Trouver la fonction de répartition F_X de X.

b) X possède -t-elle une espérance ? Si oui la calculer. Même chose pour la variance.

c) $Y = \ln X$. Trouver la fonction de répartition F_Y de Y.

Q1 * $\forall t \in]-\infty, 1[$, $f_a(t) = 0 \geqslant 0$! $\forall t \in [1, +\infty[$, $f_a(t) = a t^{-a-1} \geqslant 0$.

Donc f_a est positive sur son domaine de définition $\mathbb{R}$.

* f_a est nulle sur $]-\infty, 1[$ donc f_a est continue sur $]-\infty, 1[$.

$t \mapsto a t^{-a-1}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc f_a est continue sur $[1, +\infty[$.

Finalement f_a est au moins continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

f_a est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

* → $\int_{-\infty}^{1} f_a(t)\,dt$ converge et vaut 0

→ f_a est continue sur $[1, +\infty[$.

$\forall x \in [1, +\infty[$, $\int_1^x f_a(t)\,dt = \int_1^x a t^{-a-1}\,dt = \left[a \frac{t^{-a}}{-a} \right]_1^x = 1 - \frac{1}{x^a}$ (*)

$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x f_a(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^a}\right) = 1.$

Donc $\int_1^{+\infty} f_a(t)\,dt$ converge et vaut 1.

Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)\,dt$ converge et vaut 1.

Ceci achève de montrer que f_a est une densité de probabilité.

Q2 a) $\forall x \in]-\infty, 1[,\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_c(t)\,dt = 0.$

$\forall x \in [1, +\infty[,\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_c(t)\,dt = \int_{1}^{x} f_c(t)\,dt \underset{(*) \leftarrow Q1}{=} 1 - \dfrac{1}{x^a}.$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^a} & \text{si } x \in [1, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

b) Soit $r \in \mathbb{N}$. $\int_{-\infty}^{1} t^r f_c(t)\,dt$ converge et vaut 0.

$\forall t \in [1, +\infty[,\ t^r f_c(t) = \dfrac{a}{t^{a+1-r}}.$

Alors $\int_{1}^{+\infty} t^r f_c(t)\,dt$ converge si et seulement si $a + 1 - r > 1$ ou si $a > r$.

X possède un moment d'ordre r si et seulement si $a > r$.

Supposons $a > r$. $m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_c(t)\,dt = \int_{1}^{+\infty} t^r f_c(t)\,dt = \int_{1}^{+\infty} a\, t^{r-a-1}\,dt$

$$m_r(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_{1}^{x} a\, t^{r-a-1}\,dt = \lim_{x \to +\infty} \left[a\, \frac{t^{r-a}}{r-a} \right]_1^x = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a}{r-a} (x^{r-a} - 1) \right) = -\frac{a}{r-a}$$

Donc $m_r(X) = \dfrac{a}{a-r}$.

X possède un moment d'ordre r si et seulement si $a > r$.

En cas d'existence $m_r(X) = \dfrac{a}{a-r}$.

Alors X possède une espérance si et seulement si $a > 1$.

En cas d'existence $E(X) = \dfrac{a}{a-1}$.

X possède une variance si et seulement si X possède un moment d'ordre 2 donc si et seulement si $a > 2$.

Supposons $a>2$. $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = m_2(X) - \left(\frac{a}{a-1}\right)^2 = \frac{a}{a-2} - \frac{a^2}{(a-1)^2}$.

$V(X) = \frac{a}{(a-2)(a-1)^2}\left[(a-1)^2 - a(a-2)\right] = \frac{a}{(a-2)(a-1)^2}$.

X possède une variance si et seulement si $a>2$.

En cas d'existence $V(X) = \frac{a}{(a-2)(a-1)^2}$.

c) X prend ses valeurs dans $[1,+\infty[$ donc Y prend ses valeurs dans $[0,+\infty[$

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_Y(x) = 0$.

$\forall x \in [0,+\infty[,\ F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\ln X \leq x) = P(X \leq e^x) = F_X(e^x) \underset{\substack{\uparrow \\ e^x \geq 1}}{=} 1 - \frac{1}{(e^x)^a}$.

$\forall x \in [0,+\infty[,\ F_Y(x) = 1 - e^{-ax}$.

Y suit la loi exponentielle de paramètre a.

Exercice 12 **D'après oral-HEC 2002. Statistique d'ordre.**

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ toutes de même loi uniforme sur $[0,1]$.

Pour tout entier naturel n et tout élément ω de Ω on réordonne par ordre croissant les réels $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, ..., $X_{2n+1}(\omega)$ et on note $M_n(\omega)$ le terme médian i.e. le $(n+1)^{\text{ème}}$ dans l'ordre croissant.

La variable aléatoire M_n est la médiane de $(X_1, X_2, \ldots, X_{2n+1})$.

On rappelle que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $\displaystyle\int_0^1 t^p\,(1-t)^q\,\mathrm{d}t = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$.

Q1. Pour tout réel x élément de $[0,1]$, exprimer $P(M_n \leqslant x)$ à l'aide d'une somme de termes (!!).

Montrer que M_n est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

Montrer que $E(M_n)$ existe.

Q2. En considérant les variables aléatoires $X'_k = 1 - X_k$, montrer que la variable aléatoire M_n a pour espérance $1/2$ (on pourra trouver des liens entre M_n et la médiane M'_n de $(X'_1, X'_2, \ldots, X'_{2n+1})$).

Q3. Prouver l'égalité $E(M_n) = \displaystyle\int_0^1 P(M_n > t)\,\mathrm{d}t$. Retouver $E(M_n)$.

Q4. Retrouver encore $E(M_n)$ en utilisant une densité de M_n.

Q1 Soit $x \in [0,1]$. Notons T_x la variable aléatoire égale au nombre de variables aléatoires ayant pris une valeur inférieure ou égale à x.

T_x suit la loi binômiale de paramètres $2n+1$ et p où p est la probabilité pour que X_1 prenne une valeur inférieure ou égale à x.

$p = P(X_1 \leq x) = x$ car $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. Alors $T_x \hookrightarrow \mathcal{B}(2n+1, x)$.

Observons alors que $\{M_n \leq x\}$ est réalisé si au moins $n+1$ variables de la suite $X_1, X_2, \ldots, X_{2n+1}$ ont pris une valeur inférieure ou égale à x.

Donc $P(M_n \leq x) = P\left(\bigcup_{k=n+1}^{2n+1} \{T_x = k\}\right) = \underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n+1} P(T_x = k)}_{\text{incompatibilité}} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k (1-x)^{2n+1-k}$

$$\forall x \in [0,1],\ P(M_n \leq x) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k (1-x)^{2n+1-k}$$

Notons F_{M_n} la fonction de répartition de M_n.

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_{M_n}(x) = 0$; $\forall x \in [0,1],\ F_{M_n}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k (1-x)^{2n+1-k}$ et

$\forall x \in]1, +\infty[,\ F_{M_n}(x) = 1$.

$x\mapsto 0$, $x\mapsto \sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}x^k(1-x)^{2n+1-k}$, $x\mapsto 1$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Donc F_{Π_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$, $[0,1]$ et $]1,+\infty[$. Alors :

1°) <u>F_{Π_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.</u>

2°) F_{Π_n} est continue à droite en 0 et à gauche en 1.

$\forall x\in[0,1]$, $F_{\Pi_n}(x)=\sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n+1}{k}x^k(1-x)^{2n+1-k}+x^{2n+1}$.

Alors $F_{\Pi_n}(0)=0$ et $F_{\Pi_n}(1)=1$.

$\forall x\in]-\infty,0[$, $F_{\Pi_n}(x)=0$; alors $\lim_{x\mapsto 0^-}F_{\Pi_n}(x)=0=F_{\Pi_n}(0)$; F_{Π_n} est continue à gauche en 0.

$\forall x\in]1,+\infty[$, $F_{\Pi_n}(x)=1$; alors $\lim_{x\mapsto 1^+}F_{\Pi_n}(x)=1=F_{\Pi_n}(1)$; F_{Π_n} est continue à droite en 1, ce qui est assez normal pour une fonction de répartition !

ceci achève de montrer que F_{Π_n} est continue sur $\mathbb{R}$.

ce qui précède permet de dire que <u>Π_n est une variable aléatoire à densité.</u>

$\forall x\in]-\infty,0[$, $F_{\Pi_n}(x)=0$ et $F'_{\Pi_n}(x)=0$.

$\forall x\in]1,+\infty[$, $F_{\Pi_n}(x)=1$ et $F'_{\Pi_n}(x)=0$.

$\forall x\in]0,1[$, $F_{\Pi_n}(x)=\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}x^k(1-x)^{2n+1-k}$ et $F'_{\Pi_n}(x)=\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\left[kx^{k-1}(1-x)^{2n+1-k}-(2n+1-k)x^k(1-x)^{2n-k}\right]$

Posons $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\left[kx^{k-1}(1-x)^{2n+1-k}-(2n+1-k)x^k(1-x)^{2n-k}\right] & \text{si } x\in[0,1]\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$

f est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_{Π_n} sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Alors <u>f est une densité de Π_n.</u>

R.

3

Simplifions f. Soit $x \in [0,1]$.

$$f(x) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} k x^{k-1}(1-x)^{2n+1-k} - \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}(2n+1-k)x^k(1-x)^{2n-k}.$$

$\downarrow k \leftarrow k+1$

$$f(x) = \sum_{k=n}^{2n} \binom{2n+1}{k+1}(k+1)x^k(1-x)^{2n-k} - \sum_{k=n+1}^{2n+1 \text{ ou } 2n} \binom{2n+1}{k}(2n+1-k)x^k(1-x)^{2n-k}.$$

$$f(x) = \binom{2n+1}{n+1}(n+1)x^n(1-x)^n - \sum_{k=n+1}^{2n} \underbrace{\left[(k+1)\binom{2n+1}{k+1} - (2n+1-k)\binom{2n+1}{k}\right]}_{d_k} x^k(1-x)^{2n-k}.$$

Soit $k \in [\![n+1, 2n]\!]$.

$$d_k = (k+1)\frac{(2n+1)!}{(2n-k)!\,(k+1)!} - (2n+1-k)\frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!} = \frac{(2n+1)!}{(2n-k)!\,k!} - \frac{(2n+1)!}{k!\,(2n-k)!} = 0 \quad !!!$$

Alors $f(x) = \binom{2n+1}{n+1}(n+1)x^n(1-x)^n = \dfrac{(2n+1)!}{(n+1)!\,n!}(n+1)x^n(1-x)^n = \dfrac{(2n+1)!}{n!\,n!}x^n(1-x)^n.$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{(2n+1)!}{n!\,n!} x^n(1-x)^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Π_n possède une espérance

car Π_n possède une densité nulle hors du segment $[0,1]$.

Remarque.. Notons que : $\dfrac{n!\,n!}{(2n+1)!} = \displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt.$

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt} x^n(1-x)^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Plus clairement Π_n suit la loi bêta de première espèce de paramètres $n+1$ et $n+1$

Q2 Posons $\forall k \in [\![1, 2n+1]\!]$. $X'_k = 1 - X_k$. X'_k est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $[0,1]$. Notons $F_{X'_k}$ et F_{X_k} les fonctions de répartition de X'_k et X_k. $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_{X'_k}(x) = 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $F_{X'_k}(x) = 1$. Soit $x \in [0,1[$.

$$F_{X'_k}(x) = P(X'_k \leq x) = P(1 - X_k \leq x) = P(X_k \geq 1-x) = 1 - P(X_k < 1-x) = 1 - P(X_k \leq 1-x).$$

$F_{X'_k}(x) = 1 - F_{X_k}(1-x) = 1 - (1-x) = x.$

$\uparrow \begin{cases} 1-x \in]0,1] \\ X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]) \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{X'_k}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\\ x \text{ si } x \in [0,1[\\ 1 \text{ si } x \in [1,+\infty[\end{cases}$; $X'_k \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

Ainsi pour tout k dans $[\![1, 2n+1]\!]$, X'_k et X_k ont même loi.

Alors $\underline{M'_n \text{ et } M_n \text{ ont même loi}}$ donc $\underline{\underline{E(M'_n) = E(M_n)}}$.

Soit $\omega \in \Omega$. Il existe une permutation σ de $[\![1, 2n+1]\!]$ (que je devrais noter σ_ω car elle dépend de ω) telle que : $X_{\sigma(1)}(\omega) \leq X_{\sigma(2)}(\omega) \leq \dots \leq X_{\sigma(2n+1)}(\omega)$.

Alors $M_n(\omega) = X_{\sigma(n+1)}(\omega)$.

Notons que $1 - X_{\sigma(2n+1)}(\omega) \leq 1 - X_{\sigma(2n)}(\omega) \leq \dots \leq 1 - X_{\sigma(1)}(\omega)$

donc $X'_{\sigma(2n+1)}(\omega) \leq X'_{\sigma(2n)}(\omega) \leq \dots \leq X'_{\sigma(1)}(\omega)$. Alors $M'_n(\omega) = X'_{\sigma(n+1)}(\omega)$

donc $M'_n(\omega) = 1 - X_{\sigma(n+1)}(\omega) = 1 - M_n(\omega)$.

$\forall \omega \in \Omega,\ M'_n(\omega) = 1 - M_n(\omega)$. $\underline{M'_n = 1 - M_n}$. Alors $\underline{\underline{E(M'_n) = 1 - E(M_n)}}$.

donc $E(M_n) = 1 - E(M'_n) = 1 - E(M_n)$; $\underline{\underline{E(M_n) = \frac{1}{2}}}$.

(Q3) Notons que f est continue sur $\mathbb{R}$ donc F_{M_n} est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ F'_{M_n}(t) = f(t)$.

$E(M_n) = \int_0^1 t f(t)\,dt \underset{\text{IPP}}{=} \left[t\,(F_{M_n}(t) - 1)\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times (F_{M_n}(t) - 1)\,dt = F_{M_n}(1) - 1 + \int_0^1 (1 - F_{M_n}(t))\,dt$

Or $F_{M_n}(1) = 1$ et $\forall t \in [0,1],\ 1 - F_{M_n}(t) = 1 - P(M_n \leq t) = P(M_n > t)$.

donc $\underline{\underline{E(M_n) = \int_0^1 P(M_n > t)\,dt}}$.

$$\forall t \in [0,1],\ P(M_n \leq t) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} t^k (1-t)^{2n+1-k}.$$

$$E(M_n) = \int_0^1 P(M_n > t)\,dt = \int_0^1 \left(1 - \sum_{\ell=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{\ell} t^\ell (1-t)^{2n+1-\ell}\right).$$

$$E(M_n) = 1 - \sum_{\ell=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{\ell} \underbrace{\int_0^1 t^\ell (1-t)^{2n+1-\ell}}_{\frac{k!(2n+1-k)!}{(2n+2)!}} = 1 - \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!} \times \frac{k!(2n+1-k)!}{(2n+2)!}.$$

$$E(M_n) = 1 - \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{2n+2}$$

$$E(M_n) = 1 - (2n+1-n) \times \frac{1}{2n+2} = 1 - \frac{n+1}{2(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\quad \underline{\underline{E(M_n) = \frac{1}{2}.}}$$

Q4 $E(M_n) = \int_0^1 t f(t)\,dt = \frac{(2n+1)!}{n!\,n!} \int_0^1 t\, t^n (1-t)^n\,dt = \frac{(2n+1)!}{n!\,n!} \int_0^1 t^{n+1}(1-t)^n\,dt.$

$$E(M_n) = \frac{(2n+1)!}{n!\,n!} \cdot \frac{(n+1)!\,n!}{(2n+2)!} = \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2}.\quad \underline{\underline{E(M_n) = \frac{1}{2}}}$$ pour

la troisième fois !

R

1

Exercice **Convergence en probabilité. Méthode de Monte-carlo.**

X est une variable aléatoire qui possède un moment d'ordre 2.

Q1. Pour quelle valeur de m, $E\big((X-m)^2\big)$ atteint son minimum ?

Q2. On suppose que $P(X \in [a,b]) = 1$. Montrer que $V(X) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$ (on pourra poser $m = \frac{a+b}{2}$).

Q3. f est une application continue de $[0,1]$ sur $[a,b]$.

$(U_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[0,1]$.

a) Montrer que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, $P\left(\left|\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(U_k)\right| > \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4n\varepsilon^2}$.

b) Qu'en déduire sur le plan théorique ?

c) Qu'en déduire sur le plan pratique ?

Q1 X possède un moment d'ordre 2 donc $E(X)$, $E(X^2)$ et $V(X)$ existent.

$\forall m \in \mathbb{R}$, $(X-m)^2 = X^2 - 2mX + m^2$.

Alors pour tout réel m, $E\big((X-m)^2\big)$ existe et vaut $E(X^2) - 2m\,E(X) + m^2$.

Posons $\forall m \in \mathbb{R}$, $\varphi(m) = E\big((X-m)^2\big)$.

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall m \in \mathbb{R}$, $\varphi'(m) = -2E(X) + 2m = 2(m - E(X))$.

φ est donc strictement décroissante sur $]-\infty, E(X)]$ et strictement croissante sur $[E(X), +\infty[$.

Alors φ possède un minimum sur $\mathbb{R}$ et $E(X)$ est le seul point qui le réalise.

Notons que $\varphi(E(X)) = E\big((X-E(X))^2\big) = V(X)$.

<u>$E\big((X-m)^2\big)$ atteint son minimum en $m = E(X)$ et ce minimum vaut $V(X)$.</u>

Q2 Posons $Y = \left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2$. $V(X) \underset{\text{Q1}}{\leqslant} E\left(\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2\right) = E(Y)$.

Soit $\omega \in \Omega$. $X(\omega) \in [a,b] \Leftrightarrow X(\omega) - \frac{a+b}{2} \in \left[a - \frac{a+b}{2}, b - \frac{a+b}{2}\right]$

$X(\omega) \in [a,b] \Leftrightarrow X(\omega) - \frac{a+b}{2} \in \left[-\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}\right] \Leftrightarrow \left|X(\omega) - \frac{a+b}{2}\right| \leqslant \frac{b-a}{2}$.

$X(\omega) \in [a,b] \Leftrightarrow \left(X(\omega) - \frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{(b-a)^2}{4} \Leftrightarrow Y(\omega) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$.

Alors $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in [a,b]\} = \left\{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}\right\}$

$\{X \in [a,b]\} = \left\{Y \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}\right\}$. Ainsi $P\left(Y \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}\right) = P(X \in [a,b]) = 1$.

1) $P\left(Y-\frac{(b-a)^2}{4}\leq 0\right)=1$

2) $Y-\frac{(b-a)^2}{4}$ possède une espérance

La croissance de l'espérance donne : $E\left(Y-\frac{(b-a)^2}{4}\right)\leq 0$ ou $E(Y)\leq E\left(\frac{(b-a)^2}{4}\right)=\frac{(b-a)^2}{4}$

Donc $V(X)\leq E\left(\left(X-\frac{b+a}{2}\right)^2\right)=E(Y)\leq\frac{(b-a)^2}{4}$. $\underline{\underline{V(X)\leq\frac{(b-a)^2}{4}}}$.

Q3 a) Montrons que pour tout r dans $\mathbb{N}$, $(f(U_1))^r$ possède une espérance.

Posons $\forall t\in[0,1]$, $\varphi_r(t)=(f(t))^r$.

→ U_1 est une variable aléatoire à densité prenant ses valeurs dans $[0,1]$

Posons $\forall t\in\mathbb{R}$, $g(t)=\begin{cases}1 & \text{si } t\in[0,1]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. g est une densité de U_1.

→ φ_r est continue sur $[0,1]$.

Le théorème de transfert montre que $E(\varphi_r\circ U_1)$ possède une espérance si et seulement si $\int_0^1\varphi_r(t)g(t)\,dt$ est absolument convergente.

$\forall t\in[0,1]$, $|\varphi_r(t)g(t)|=|f|^r(t)$ et $|f|^r$ est continue sur $[0,1]$.

Alors $\int_0^1|\varphi_r(t)g(t)|\,dt$ converge donc $E(\varphi_r\circ U_1)$ existe.

Ainsi $\underline{\underline{(f(U_1))^r \text{ possède une espérance et ceci pour tout } r \text{ dans } \mathbb{N}}}$.

Notons que $\forall r\in\mathbb{N}$, $E((f(U_1))^r)=\int_0^1(f(t))^r\,dt$.

En particulier $\underline{\underline{E(f(U_1))=\int_0^1 f(t)\,dt}}$.

Notons également que $\underline{\underline{f(U_1) \text{ possède une variance}}}$.

U_1 prend ses valeurs dans $[0,1]$ et f est une application de $[0,1]$ dans $[a,b]$.

Alors $P(f(U_1)\in[a,b])=1$ donc $\underline{\underline{V(f(U_1))\leq\frac{(b-a)^2}{4}}}$.

Toutes les variables aléatoires de la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ont même loi que U_1.

Ainsi pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $E(f(U_k))$ existe et vaut $\int_0^1 f(t)dt$ et $V(f(U_k))$ existe et est majorée par $\frac{(b-a)^2}{4}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $F_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(U_k)$.

Alors $E(F_n)$ existe et vaut $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(f(U_k))$ donc $E(F_n)=\int_0^1 f(t)dt$.

$U_1, U_2, \dots, U_n$ sont indépendantes donc $f(U_1), f(U_2), \dots, f(U_n)$ sont indépendantes et possèdent une variance.

Alors F_n possède une variance et $V(F_n)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}V(f(U_k))=\frac{1}{n}V(f(U_1))$;

$V(F_n)=\frac{1}{n}V(f(U_1))$. $V(F_n)\leq\frac{(b-a)^2}{4n}$.

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$P(|E(F_n)-F_n|\geq\varepsilon)=P(|F_n-E(F_n)|\geq\varepsilon)\leq\frac{V(F_n)}{\varepsilon^2}\leq\frac{(b-a)^2}{4n\varepsilon^2}$. Ce qui s'écrit :

$$P\left(\left|\int_0^1 f(t)dt-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(U_k)\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{(b-a)^2}{4n\varepsilon^2}.$$

b) Pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{(b-a)^2}{4n\varepsilon^2}=0$.

Alors $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n\to+\infty}P\left(\left|\int_0^1 f(t)dt-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(U_k)\right|\geq\varepsilon\right)=0$.

Ainsi la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(U_k)\right)_{n\geq1}$ converge en probabilité vers la variable certaine $\int_0^1 f(t)dt$.

Ce n'est pas un scoop mais la loi faible des grands nombres !

c) Soit h une fonction continue sur $[0,1]$. $h([0,1])$ est un segment.

Posons $h([0,1]) = [\alpha,\beta]$. Nous sommes dans les conditions de ce qui précède. $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h(U_k)\right)_{n\geq 1}$ converge en proba vers la variable certaine égale à $\int_0^1 h(t)dt$.

Pour n assez grand, en choisissant au hasard n réels $u_1, u_2, \dots, u_n$ dans $\mathbb{R}$ on peut espérer que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h(u_k)$ soit une valeur approchée de $\int_0^1 h(t)dt$.

C'est la méthode de Monte-Carlo pour calculer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction continue sur $[0,1]$.

Voila deux petites fonctions pour calculer $\int_0^1 e^{t^2}dt$!

On peut généraliser à $\int_a^b h(t)dt$. Voir la troisième fonction.

```
Function f(x:real):real;

begin
f:=exp(x*x);
end;


Function Monte_Carlo1(n:integer):real;

var i:integer;s:real;

begin
s:=0;
for i:=1 to n do
s:=s+f(random);
Monte_Carlo1:=s/n;
end;


Function Monte_Carlo2(n:integer;a,b:real):real;

var i:integer;s:real;

begin
s:=0;
for i:=1 to n do
s:=s+f((b-a)*random+a);
Monte_Carlo2:=s*(b-a)/n;
end;
```