---

**Exercice 1** ESCP 98 Pour tout élément $x$ de $\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2}{(1+x)^2}$ si $x$ appartient à $[0, 1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

Q1. Montrer que $f$ est une densité de probabilité.

Q2. $X$ est une variable aléatoire de densité $f$. Touver la fonction de répartition $F$ de $X$. Calculer $E(X)$.

Q3. On pose $Y = X + \dfrac{1}{X}\cdot$ $t$ est un réel. Résoudre l'inéquation : $x \in \mathbb{R}$ et $x^2 - tx + 1 \leqslant 0$.

Étudier $Y$. $Y$ admet-elle une espérance ?

---

**Exercice 2** ($H$96) Un baton de longueur 1 et d'extrémités $A$ et $B$ est cassé en deux au hasard. La longeur $L$ du morceau d'extrémité $A$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Q1. Etudier la variable aléatoire $X$ égale à la longueur du plus petit morceau et calculer son espérance.

Q2. Même chose avec la longeur du plus gand morceau.

Q3. Soit $Z$ la variable aléatoire égale au rapport de la longeur du plus petit morceau à celle du plus grand. Déterminer la loi de $Z$ et son espérance.

---

**Exercice 3** $X$ est une variable aléatoire de densité $f$ paire et continue sur $\mathbb{R}$.

On pose $Y = X^2$ et on suppose que : $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer $f$.

---

**Exercice 4** Un circuit est composé de trois résistances $R_1$, $R_2$ et $R_3$. $R_1$ est suivie de $R_2$ et $R_3$ qui sont en parallèles. La durée de vie des trois résistances sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi exponentielle de paramètre $\lambda$. $T$ est la variable aléatoire égale à la durée de vie du circuit.

Étudier $T$ et donner son espérance.

---

**Exercice 5** ESCP 98 **Produit de variables aléatoires à densité**.

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Pour tout élément $n$ de $\mathbb{N}^*$, on pose : $Y_n = -\ln X_n$ et $Z_n = X_1 X_2 \cdots X_n$.

Q1. Donner la loi de $Y_1$.

Q2. $n$ appartient à $\mathbb{N}^*$. Montrer que $Z_n$ est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

---

**Exercice 6** $X_1$ et $X_2$ sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$. Montrer que $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_1 + m_2, \left(\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)^2\right)$ (on pourra commencer par le cas $m_1 = m_2 = 0$)

---

**Exercice 7** $\alpha$ est réel. $\forall x \in\, ]-\infty, 0[$, $f(x) = \alpha 2^x$ et $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \alpha 2^{-x}$

Q1. Trouver $\alpha$ pour que $f$ soit une densité de probabilité.

Q2. $X$ est une variable aléatoire de densité $f$. Trouver la fonction de répartition de $X$ et calculer $E(X)$.

Q3. $x$ est un réel. Calculer $P(X < x / X \geqslant -1)$.

Q4. Etudier $Y = 2^{X/2}$.

---

**Exercice 8** Q1. $\forall x \in\, ]-\infty, 1[$, $f(x) = 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $f(x) = 1/x^2$

Montrer que $f$ est une densité de probabilité.

$X$ est une variable aléatoire de densité $f$. Etudier l'existence de $E(X)$.

Q2. $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ sont $n$ variables aléatoires indépendantes de densité $f$.

Étudier $U = \text{Min}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $W = \text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Étudier l'existence de $E(U)$, $E(W)$, $V(U)$ et $V(W)$.

---

**Exercice 9** **Partie entière d'une variable aléatoirs à densité**

---

**Exercice 10** On tire un nombre au hasard dans l'intervalle $[0, 1]$ et on recommence jusqu'à ce que la somme des résultats obtenus soit strictement supérieure à 1. $X$ est la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués. Pour tout élément $i$ de $\mathbb{N}^*$, $U_i$ est la variable aléatoire égale au résultat du $i^{\text{ème}}$ tirage.

Q1. Ecrire une fonction en TP4 qui simule cette expérience.

Q2. Faire des hypothèses raisonnables sur les $U_i$.

Q3. Trouver la loi de $U_1 + U_2$.

Q4. Montrer que, pour tout élément $n$ de $\mathbb{N}^*$, $U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ est une variable aléatoire à densité et qu'il existe une densité $f_n$ de cette variable vérifiant :

$$\forall x \in ]-\infty, 0[,\ f_n(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, 1],\ f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Q5. Déterminer, pour tout élément $n$ de $\mathbb{N}$, $P(X > n)$. En déduire la loi de $X$, son espérance et sa variance.

---

**Exercice 11** **Inégalité de Markov**.

Soit $X$ une variable aléatoire à densité possèdant une espérance et prenant des valeurs positives. Montrer que si $a$ est réel strictement positif :

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

---

**Exercice 12** $a$ est un réel strictement positif. Soit $X$ une variable aléatoire à densité possèdant un moment d'ordre 2 et prenant ses valeurs dans $[-a, a]$. Montrer que si $\alpha$ est réel strictement positif :

$$P(|X| \geqslant \alpha) \geqslant \frac{E(X^2) - \alpha^2}{a^2}$$

---

**Exercice 13** $N$ est une variable aléatoire suivant une loi binômiale de paramètres $n$ et $p$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

$X_0$, $X_1$, ..., $X_n$ sont $n + 1$ variables aléatoires qui suivent une loi uniforme sur $[0, 1]$.

On suppose encore que $X_0$, $X_1$, ..., $X_n$, $N$ sont mutuellement indépendantes.

Q1. $k$ est un élément de $[\![0, n]\!]$. Etudier $T_k = \text{Min}(X_0, X_1, \dots, X_k)$.

Q2. Déterminer la loi de $T = \text{Min}(X_0, X_1, \dots, X_N)$.

---

**Exercice 14** ESCP 99 **Varad+ Convolution**.

Soient $X$ et $Y$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre 1.

Soit $Z = \dfrac{X}{X + Y}$.

Q1. Pour tout $t \in [0, 1]$, déterminer une densité sur $\mathbb{R}^+$ de la variable $t(X+Y)-X$ (qui s'écrit également $(t-1)X+tY$).

Q2. En déduire la loi de $Z$.

---

**Exercice 15**

---

**Exercice 16** $X$ est une variable aléatoire de densité $f$ continue et telle que $E(X^2)$ existe.

Q1. Montrer que si $x$ est un réel strictement positif :

$$0 \leqslant x^2 P(|X| \geqslant x) \leqslant \int_{-\infty}^{-x} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(x^2 P(|X| \geqslant x)\big) = 0$.

Q2. Soit $x$ un réel positif. Montrer que :

$$\int_0^x t\,P(|X| \geqslant t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}\,P(|X| \geqslant x) + \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

(utiliser la fonction de répartition $F$ et une intégration par parties).

En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,P(|X| \geqslant t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $E(X^2)/2$.

---

**Exercice 17** Un point $M$ se promène au hasard à l'intérieur d'une boule de centre $O$ et de rayon de $R$.

La probabilité pour que $M$ se trouve dans une portion de la boule est proportionnelle au volume de cette portion.

Etudier la variable aléatoire $X$ égale à la distance de $O$ à $M$ (... $4\pi R^3/3$).

---

**Exercice 18** **ESCP 98**.

Q1. $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent une loi uniforme sur $[0,1]$. Etudier $X - Y$ et $XY$.

Q2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}\,e^{-|x|}$. Montrer que $f$ est une densité de probabilité. $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes ayant $f$ pour densité. Etudier $S = X + Y$.

---

**Exercice 19** ESCP 98 $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi uniforme sur $]0, r]$. On pose $U = \ln(X/r)$ et $V = -\ln(Y/r)$.

Q1. a) Etudier $U$ et $V$.

b) Trouver une densité de $U + V$.

c) Etudier $Q = X/Y$ et $Q' = 1/Q$.

Q2. $Z_1$, $Z_2$, ..., $Z_n$ sont $n$ variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi uniforme sur $]0, r]$. Pour tout $i$ on pose $W_i = 1/Z_i$.

a) Montrer que $W_1$ suit une loi de Pareto.

b) Même chose pour $W = \mathrm{Min}(W_1, W_2, \ldots, W_n)$. Trouver l'espérance et la variance de $W$.

---

**Exercice 20** **ESCP 98**.

$Z$ et $T$ sont deux varable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes suivant toutes les deux une loi uniforme sur $[0,1]$.

Q1. Donner la fonction de répartition et une densité de la variable $-T$.

Q2. Donner la fonction de répartition et une densité de la variable $Z^2$.

Q3. Donner une densité et la fonction de répartition de la variable $Z^2 - T$. Représenter graphiquement cette densité.

**Exercice 21** **Min et max**.

$n$ particules se désintègrent de façon indépendante.

Pour $i$ élément de $[\![1, n]\!]$, la durée de vie $X_i$ de la $i^{\text{ème}}$ particule suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

On pose $M = \text{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $I = \text{Min}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Q1. Etudier $M$ et $I$. Calculer $E(I)$.

Q2. Montrer que $E(M) = \dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

Q3. $t$ est un réel strictement positif. Etudier la variable aléatoire $N_t$ égale au nombre de particules désintégrées entre les instants 0 et $t$.

**Exercice 22** ESCP 95 On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$. On tire sur la cible représentée par le carré de sommets $O$, $I$, $K$, $J$ de coordonnées respectives $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$. On suppose que pour toute partie $A$ de la cible, la probabilité que le point d'impact soit dans $A$ est égale à l'aire de $A$.

On note $X$ et $Y$ les coordonnées aléatoires du point d'impact.

Q1. Etudier $X$ et $Y$.

Q2. Soit $Z$ la variable aléatoire égale au produit $XY$. Déterminer $Z(\Omega)$. Pour tout $t$ dans $Z(\Omega)$, que représente graphiquement $\{Z \leqslant t\}$.

Trouver la loi de $Z$. Calculer, si possible son espérance et sa variance.

Q3. Même chose avec $T = Y/X$.

Q4. Etudier $U = [T]$ (partie entière).

**Exercice 23** **Doublon ! !** $X$ est une variable aléatoire de densité $f$ paire et continue sur $\mathbb{R}$.

On pose $Y = X^2$ et on suppose que : $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer $f$.

**Exercice 24** ESCP 97 Q1. Soit $x$ un élément de $]0, 1]$.

On considère l'intégrale $I_x = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}\,\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer l'existence de $I_x$.

b) Calculer cette intégrale en effectuant le changement de variable $t = x \sin^2 \theta$ avec $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.

Q2. On dessine dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le carré de centre $O$ et de côté 2 ( ? !), c'est à dire l'ensemble des points de coordonnées $(x, y)$ vérifiant $-1 \leqslant x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

On choisit un point $M$ au hasard dans ce carré et on cherche la probabilité que ce point se trouve dans le disque de centre $O$ et de rayon 1.

Soit $X$ la variable aléatoire égale à l'abscisse de $M$ et $Y$ la variable égale à son ordonnée.

On suppose que $X$ et $Y$ sont indépendantes et suivent une loi uniforme sur $[-1, 1]$.

a) Montrer que $X^2$ est une variable aléatoire à densité et en trouver une densité.

b) Donner sous forme intégrale simple une densité $h$ de $X^2 + Y^2$.

c) Préciser $h$ sur l'intervalle $[0, 1]$ et en déduire le calcul de $P(X^2 + Y^2 \leqslant 1)$.

d) Justifier géométriquement le résultat obtenu.

---

**Exercice 25** ESCP 97 **Somme de variables aléatoires à densité**.

Trois personnes notées $A$, $B$ et $C$ sont simultanément dans un bureau de poste muni de deux cabines téléphoniques. Une unité de temps étant choisie, $A$ et $B$ occupent simultanément à l'instant 0 les deux cabines. $C$ attend et occupe ensuite la première cabine disponible, lorsque l'une ou l'autre des deux personnes $A$ ou $B$ a terminé sa communication.

On suppose que les durées des communications des trois personnes $A$ $B$, $C$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi uniforme sur $[0, 1]$ et notées respectivement $X$, $Y$ et $Z$.

Q1. On pose $U = \text{Sup}(X, Y)$ et $V = \text{Inf}(X, Y)$. Déterminer une densité de $U$ (resp. $V$) et son espérance.

Q2. On note $T$ le temps total passé par $C$ dans le bureau de poste. Trouver une densité pour $T$ et la représenter graphiquement. Calculer $E(T)$.

---

**Exercice 26** **C'était le bon temps...** 15'-12h00

Un circuit est composé de trois résistances $R_1$, $R_2$ et $R_3$.
La durée de vie de la résistance $R_i$ est une variable aléatoire $X_i$ qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.
$X_1$, $X_2$ et $X_3$ sont indépendantes et la durée de vie $T$ du circuit ne dépend que de $R_1$, $R_2$ et $R_3$.

Q1. Trouver la loi de $T$ lorsque $R_1$ est en parallèle avec $R_2$ et $R_3$ qui se suivent.

Q4. Calculer l'espérance.

---

**Exercice 27** ESCP 97 $X$ est une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.

Q1. Etudier $Z = -\ln(X)$.

Q2. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout élément $n$ de $\mathbb{N}^*$ on pose : $Y_n = \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Min}}(X_k)$ et $Z_n = \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Max}}(X_k) - \ln n$.

a) $n$ est un élément de $\mathbb{N}^*$. Etudier $Y_n$, calculer son espérance et sa variance.

b) Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers $Z$.

---

**Exercice 28** $a$, $b$ et $c$ sont trois réels. On suppose que $a$ est strictement positif.

Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a\,t^2+b\,t+c)}\,\mathrm{d}t$.

---

**Exercice 29** $X$ est une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

Q1. Etudier $Y = |X|$. Calculer $E(Y)$.

Q2. Trouver la fonction de répartition de $Z = \dfrac{X + |X|}{2}$. $Z$ est-elle une variable aléatoire à densité ?

---

**Exercice 30** $\Phi$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))\,\mathrm{d}t$.

---

**Exercice 31** $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y = \sqrt{X}$. Montrer que $Y$ est une variable aléatoire à densité et en trouver une densité.

Calculer $E(Y)$.

---

**Exercice 32**

---

**Exercice 33**

$X$ est une variable aléatoire réelle à densité de fonction de répartition $F$. On pose $Y = F \circ X$.

On se propose de montrer que $Y$ est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

a) Soit $y$ un élément de $[1, +\infty[$. Montrer que $\{Y \leqslant y\}$ est un événement et en donner la probabilité.

b) Même chose avec $y$ dans $]-\infty, 0[$.

c) Ici $y$ est un élément de $]0, 1[$. On pose $A_y = \{t \in \mathbb{R} \mid F(t) \leqslant y\}$. Montrer que $A_y$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Prouver que la borne supérieure $t_0$ de $A_y$ vérifie $F(t_0) = y$ et que $A_y = ]-\infty, t_0]$.

Montrer alors $\{Y \leqslant y\}$ est un événement et en donner la probabilité. Examiner le cas où $y = 0$ et conclure l'exercice.

---

**Exercice 34** $f$ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\infty, 1[ \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \in [1, +\infty[ \end{cases}$$

**Q1** Montrer que $f$ est une densité de probabilité.

**Q2** $X$ est une variable aléatoire à densité de densité $f$.

a) Trouver la fonction de répartition $F$ de $X$.

b) On pose $Y = \ln X$. Étudier $Y$. Donner directement une densité de $-Y$.

**Q3** $U$ est une variable aléatoire réelle à densité admettant pour densité la fonction $f_U$, définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R} - D$ où $D$ est fini.

Montrer que $V = e^U$ est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

**Q4** $X_1$ et $X_2$ sont deux variables aléatoires à densité, indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que $X_1$ et $X_2$ ont pour densité $f$.

a) Déterminer une densité de $Z = \ln X_1 - \ln X_2$. Étudier $T = \dfrac{X_1}{X_2}\cdot$

b) **Facultatif** Donner, sans calcul, une densité de $\ln X_1 + \ln X_2$. Étudier $S = X_1 X_2$.

---

**Exercice 35** L'engouement du public pour un jeu de foire, permettant de gagner des lots divers et variés, est tel qu'il est nécessaire d'en présélectionner les candidats. On organise donc une suite d'épreuves de sélection, chaque épreuve réunissant $n$ candidats, $n \geqslant 1$ étant fixé, toutes basées sur le même principe.
A chaque épreuve :

- un nombre réel mystère $a$ est déterminé au hasard par la fonction **Random** d'un calculateur électronique ($a$ est donc la réalisation d'une variable aléatoire de densité uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$, et $a$ est susceptible de changer d'une épreuve à l'autre, mais est une constante pour une épreuve donnée).
- chacun des $n$ candidats est alors invité à proposer son évaluation de $a$, en inscrivant, en secret et indépendamment des autres, sa réponse sur papier.
- sera alors sélectionné pour le jeu celui des $n$ candidats dont la réponse sera la plus proche de $a$ (par valeur supérieure ou inférieure).

On fait les hypothèses suivantes :

- la réponse du candidat $i$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, est une variable aléatoire, note $X_i$, à densité, de loi uniforme sur $[0, 1]$.

- les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

On admet que chaque épreuve de sélection ne fournit qu'un seul gagnant.
On s'intéresse à la variable aléatoire $Z_a$, mesurant l'erreur aléatoire d'évaluation de $a$ par le gagnant d'une épreuve de sélection.

Q1. Exprimer $Z_a$ en fonction des variables aléatoires $X_i, (1 \leqslant i \leqslant n)$ et de $a$. Préciser $Z_a(\Omega)$.

Q2. Le calculateur fournit la valeur $a = 1$.
 a) Déterminer la fonction de répartition de $Z_1$ ; en déduire une densité de $Z_1$.
 b) Calculer l'espérance et la variance de $Z_1$.

Q3. On revient au cas général où $a$ est une valeur quelconque de l'intervalle $[0, 1]$ .
 a) Déterminer la fonction de répartition de $Z_a$ (on distinguera deux cas en comparant $a$ à $1/2$).
 b) En déduire une densité de $Z_a$.

Q4. En plus d'être l'heureux élu, le candidat sélectionné gagne, en cadeau de bienvenue, la somme $1 - Z_a$, exprimée en milliers d'Euros. Calculer l'espérance de gain, à l'issue de cette phase de sélection, du vainqueur d'une épreuve.

---

**Exercice 36** **HEC 1999** **Quotient de variables aléatoires à densité.**

$X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la loi exponentielle de paramètre 1.

Q1. $t$ est un réel strictement positif. Montrer que $-t\,Y$ est une variable aléatoire réelle à densité et en donner une densité.

Montrer que $X - t\,Y$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction $h$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{t+1} & \text{si } x \in ]0, +\infty[ \\ \dfrac{e^{\frac{x}{t}}}{t+1} & \text{si } x \in ]-\infty, 0] \end{cases}$$

Q2. Utiliser ce qui précède pour montrer que $Z = \dfrac{X}{Y}$ est une variable aléatoire à densité et pour en donner une densité.

Q3. Montrer que $U = \dfrac{X}{X+Y}$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

---

**Exercice 37** **Loi Bêta.**

Q1. Trouver le domaine de définition $D$ de $B : (\alpha, \beta) \to \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}\,(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$.

Rappeler la valeur de $B(r+1, s+1)$ pour $r$ et $s$ dans $\mathbb{N}$.

Q2. $(\alpha, \beta)$ est un élément de $D$. $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)}\, t^{\alpha-1}\,(1-t)^{\beta-1} & \text{si } t \in ]0, 1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que $f$ est une densité de probabilité. On dit qu'une variable aléatoire qui admet $f$ pour densité suit une loi bêta de paramères $\alpha$ et $\beta$.

Q3. $n$ et un élément de $\mathbb{N}^*$ et $p$ est un élément de $[\![0, n-1]\!]$. Le contrôle d'embarquement des voitures de la SNCM dans le port de Nice est constitué de $n$ postes.

Une voiture $\gamma$ se présente au contôle. Tous les postes sont occupés et $p$ voitures attendent déjà. On suppose que :

- L'intant 0 est l'instant où la voiture arrive au contrôle ;
- Chaque contôle prend $a$ minutes $(a > 0)$ ;

• les instants des débuts des contrôles des $n$ voitures qui occupent les postes sont des variables aléatoires indépendantes $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ qui suivent une loi uniforme sur $[-a, 0]$.

On note $T$ le temps d'attente de la voiture $\gamma$.

a) Préciser $T(\Omega)$. En déduire une bonne partie de la fonction de répartition $F_T$ de $T$.

b) $t$ est un élément de $[0, a[$. Préciser la loi de la variable aléatoire $Y_t$ égale au nombre de postes qui se libèrent pour la première fois avant l'instant $t$. En déduire $F_T(t)$.

c) Montrer que $T$ est une variable aléatoire à densité et en donner une densité. Montrer que $\dfrac{1}{a}T$ suit une loi Bêta.

d) Calculer $E(T)$.

---

**Exercice 38** **Loi normale. Loi gamma** Un point se déplace dans un plan muni d'un repère orthonormé. Il part de l'origine $O$ des coordonnées à l'instant 0.

Si à l'instant $t = k, k \in \mathbb{N}$ il se situe au point de coordonnées $(X_k, Y_k)$, alors à l'instant $t = k+1$ il se trouve au point de coordonnées $(X_{k+1}, Y_{k+1})$ de sorte que $A_{k+1} = X_{k+1} - X_k$ et $B_{k+1} = Y_{k+1} - Y_k$ suivent la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

On suppose les $A_i$ et les $B_j$ mutuellement indépendantes. On rappelle que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Q1. a) Quelle est la loi suivie par $X_n$ ?

b) Soit $M_n$ le point de coordonnées $(X_n, Y_n)$. Exprimer, à l'aide de la fonction de répartition $\Phi$ d'une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, la probabilité qu'à l'instant $n$ le point $M_n$ se trouve dans le carré $C = [-1, 1]^2$.

Q2. Soit $D_n$ la distance de $M_n$ à l'origine : $D_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}$.

a) Reconnaître la loi de $X_n^2$, puis celle de $D_n^2$. En déduire la loi de $D_n$ et calculer son espérance.

b) Quelle est la probabilité qu'à l'instant $n$ le point se trouve dans le disque de centre $O$ et de rayon 1 ?

---

**Exercice 39** **En plus 00 ! Loi normale.**

Q1. Le poids $X$ en Kg d'un nouveau né suit une loi normale de paramètres 3,2 et $(0,4)^2$. Déterminer : $P(2,8 \leqslant X \leqslant 3,6)$.

Q2. Une machine tire des pièces de longueur aléatoire suivant une loi normale de moyenne 1 m. La probabilité pour que la longueur soit inférieure à 98 cm est 1/10. Estimer l'écart type.

---

**Exercice 40** **Loi log-normale**.

$X$ est une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètres $m$ et $\sigma^2$.

Q1. Montrer que $Y = e^X$ est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

Q2. a) m=0. Utiliser le théorème de transfert pour montrer l'existence et calculer $E(Y)$.

b) Traiter la même question avec $m$ quelconque (on se ramènera au a)).

---

**Exercice 41** **Densité, fonction de répartition, espérance, variance.**

$a$ est un réel strictement positif. On considère la fonction $f_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_a(t) = \begin{cases} at^{-a-1} & \text{si } t \in [1, +\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Q1. Montrer que $f_a$ est une densité de probabililité.

Q2. $X$ est une variable aléatoire réelle admettant pour densité $f_a$.

a) Trouver la fonction de répartition $F_X$ de $X$.

b) $X$ possède -t-elle une espérance ? Si oui la calculer. Même chose pour la variance.

c) $Y = \ln X$. Trouver la fonction de répartition $F_Y$ de $Y$.

---

**Exercice 42** **D'après oral-HEC 2002. Statistique d'ordre.**

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ toutes de même loi uniforme sur $[0,1]$.

Pour tout entier naturel $n$ et tout élément $\omega$ de $\Omega$ on réordonne par ordre croissant les réels $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, ..., $X_{2n+1}(\omega)$ et on note $M_n(\omega)$ le terme médian i.e. le $(n+1)^{\text{ème}}$ dans l'ordre croissant.

La variable aléatoire $M_n$ est la médiane de $(X_1, X_2, \dots, X_{2n+1})$.

On rappelle que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $\displaystyle\int_0^1 t^p\,(1-t)^q\,\mathrm{d}t = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$.

Q1. Pour tout réel $x$ élément de $[0,1]$, exprimer $P(M_n \leqslant x)$ à l'aide d'une somme de termes ( ! !).

Montrer que $M_n$ est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

Montrer que $E(M_n)$ existe.

Q2. En considérant les variables aléatoires $X'_k = 1 - X_k$, montrer que la variable aléatoire $M_n$ a pour espérance $1/2$ (on pourra trouver des liens entre $M_n$ et la médiane $M'_n$ de $(X'_1, X'_2, \dots, X'_{2n+1})$).

Q3. Prouver l'égalité $E(M_n) = \displaystyle\int_0^1 P(M_n > t)\,\mathrm{d}t$. Retouver $E(M_n)$.

Q4. Retrouver encore $E(M_n)$ en utilisant une densité de $M_n$.

---

**Exercice 43** **Convergence en probabilité. Méthode de Monte-carlo.**

$X$ est une variable aléatoire qui possède un moment d'ordre 2.

Q1. Pour quelle valeur de $m$, $E\big((X-m)^2\big)$ atteint son minimum ?

Q2. On suppose que $P(X \in [a,b]) = 1$. Montrer que $V(X) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$ (on pourra poser $m = \frac{a+b}{2}$).

Q3. $f$ est une application continue de $[0,1]$ sur $[a,b]$.

$(U_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[0,1]$.

a) Montrer que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, $P\left(\left|\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(U_k)\right| > \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4\,n\varepsilon^2}$.

b) Qu'en déduire sur le plan théorique ?

c) Qu'en déduire sur le plan pratique ?

---