VECTEURS ALÉATOIRES DISCRETS

VECTEURS ALÉATOIRES DISCRETS

P mentionne des résultats particulièrement utiles et souvent oubliés dans la pratique des vecteurs aléatoires...

★ mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SD mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

! Notions ou résultats qui ne semblent pas toujours très importants mais qui figurent explicitement dans le programme donc qui sont exigibles.

I LE PROPOS

On considère une expérience aléatoire à laquelle on associe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On peut être amené à faire correspondre à chaque résultat de cette expérience plusieurs réels donc à définir une application X de Ω dans $\mathbb{R}^n$. Le centre d'intérêt se déplace de Ω vers $\mathbb{R}^n$. Il convient alors de construire un espace probabilisé autour de $\mathbb{R}^n$ rendant compte du nouveau point de vue.

Dans ce chapitre nous étudierons le cas où X est une application Ω dans $\mathbb{R}^n$. Il est naturel de munir $\mathbb{R}^n$ de la tribu engendrée par les produits de n intervalles de $\mathbb{R}$ donc de la tribu $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ des boréliens.

Dès lors il convient d'étudier dans quelle mesure X va permet de "transférer" la probabilité P sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$. Si B est borélien on peut penser à lui donner comme probabilité $P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\})$... à condition que $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$ soit dans $\mathcal{A}$...

II GÉNÉRALITÉS

▶ 1. Définitions.

Déf. 1 *Complément* On appelle tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$ la tribu de $\mathbb{R}^n$ engendrée par les produits de n intervalles de $\mathbb{R}$.

Prop. 1 *Complément* La tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$ est encore la tribu de $\mathbb{R}^n$ engendrée par :

- les produits de n intervalles de $\mathbb{R}$ du type $]-\infty, x]$;
- les produits de n boréliens de $\mathbb{R}$;
- les produits de n ouverts de $\mathbb{R}$;
- $\boxed{\text{les ouverts de } \mathbb{R}^n}$.

Th. 1 et **déf. 2** *Complément* Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$.

Si X est une application de Ω dans $\mathbb{R}^n$, les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Pour tout borélien B de $\mathbb{R}^n$: $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

ii) $\forall (I_1, I_2, \ldots, I_n) \in \mathcal{I}^n,\ X^{-1}(I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n) \in \mathcal{A}$.

iii) $\forall (B_1, B_2, \ldots, B_n) \in \big(\mathcal{B}_R\big)^n,\ X^{-1}(B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n) \in \mathcal{A}$.

vi) $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ X^{-1}(]-\infty, x_1] \times]-\infty, x_2] \times \cdots \times]-\infty, x_n]) \in \mathcal{A}$.

On appelle **variable aléatoire sur** $(\Omega, \mathcal{A})$ **à valeurs dans** $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ toute application X de Ω dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant l'une de ces assertions.

▶ 2. Probabilité image.

Th. 2 et **déf. 3** *Complément* Soit X une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

L'application $P_{(X)}$ de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n},\ P_{(X)}(B) = P\big(X^{-1}(B)\big)$ est une probabilité sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$.

On l'appelle la **probabilité image** de P par X (on parle également de loi de probabilité de X).

★ Lorsque l'on ne risque pas de confusion avec les probabilités conditionnelles on écrit P_X à la place de $P_{(X)}$.

▶ 3. Vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Déf. 4 Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle **vecteur aléatoire sur $(\boldsymbol{\Omega}, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$** tout n-uplet $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Th. 3 *Complément* Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisé et X une application de Ω dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$, X_i est l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ qui à chaque élément ω de Ω associe la $i^{\text{ème}}$ composante de $X(\omega)$ (dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

1. $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$.

2. X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si et seulement si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est un vecteur aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$; autrement dit si et seulement si pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$, X_i est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

★★ **PP** Dès lors étudier les variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs sur $\mathbb{R}^n$ revient à étudier les vecteurs aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ c'est à dire les n-uplets de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

▶ 4. Tribu des événements liés à un vecteur aléatoire.

Th. 4 et **déf. 5** *Complément* Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

$\{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$.

On l'appelle **tribu des événements liés à X** et on la note $\mathcal{A}_X$.

Th. 5 et **déf. 6** Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire, sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

L'ensemble des $\Big\{\{\omega \in \Omega \mid (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \in B\}, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\Big\}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$.

C'est la **tribu des événements liés au vecteur $(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \ldots, \mathbf{X_n})$** et on la note $\mathcal{A}_{(X_1, X_2, \ldots, X_n)}$.

Prop. 2 Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire, sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

$\mathcal{A}_{(X_1, X_2, \ldots, X_n)}$ contient toutes les tribus $\mathcal{A}_{X_1}$, $\mathcal{A}_{X_2}$, ..., $\mathcal{A}_{X_n}$.

▶ 5. Fonction de répartition

Déf. 7 *Complément* Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

La **fonction de répartition** de X est l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout réel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ associe $P\Big(X^{-1}\big(]-\infty, x_1] \times]-\infty, x_2] \times \cdots \times]-\infty, x_n]\big)\Big)$.

Nous la noterons le plus souvent F_X.

Déf. 8 Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

La **fonction de répartition** de $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ associe $P\Big(\big\{\omega \in \Omega \mid (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in]-\infty, x_1] \times]-\infty, x_2] \times \cdots \times]-\infty, x_n]\big\}\Big)$.

Nous la noterons le plus souvent $F_{(X_1, X_2, \dots, X_n)}$.

$\boxed{\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ F_{(X_1, X_2, \dots, X_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\{X_1 \leqslant x_1\} \cap \{X_2 \leqslant x_2\} \cap \cdots \{X_n \leqslant x_n\})}$.

▶ 6. Vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Déf. 9 Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle **vecteur aléatoire discret sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$** tout n-uplet $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Th. 6 et **déf. 10** Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire discret sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

$\Big(\{X_1 = x_1\} \cap \{X_2 = x_2\} \cap \cdots \cap \{X_n = x_n\}\Big)_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)}$ est un système complet d'événements de $(\Omega, \mathcal{A})$.

On l'appelle **système complet d'événements associé ou lié au vecteur $(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \dots, \mathbf{X_n})$**.

Prop. 3 Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire discret sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

- Le système complet d'événements associé au vecteur aléatoire $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ engendre la tribu $\mathcal{A}_{(X_1, X_2, \dots, X_n)}$ des événements liés au vecteur aléatoire $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
- $\mathcal{A}_{(X_1, X_2, \dots, X_n)}$ contient toutes les tribus $\mathcal{A}_{X_1}$, $\mathcal{A}_{X_2}$, ..., $\mathcal{A}_{X_n}$.

Déf. 11 Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire discret sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

La **loi conjointe du vecteur** $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est $\boxed{\text{l'application}}$ φ de $X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$ dans $[0, 1]$ qui à tout élément $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$ associe :

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\Big(\{X_1 = x_1\} \cap \{X_2 = x_2\} \cap \cdots \cap \{X_n = x_n\}\Big).$$

Les lois de X_1, X_2,... X_n sont les **lois marginales** du vecteur $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

★ La loi conjointe de $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ permet d'obtenir la fonction de répartition de $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

III COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

▶ 1. Remarque.

On peut extrapoler une bonne partie des résultats qui suivent à un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

▶ 2. Notations usuelles.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $X(\Omega)$ (resp. $Y(\Omega)$) est équipotent à un intervalle I (resp. J) de $\mathbb{N}$ (voire de $\mathbb{Z}$).

Ceci permet d'écrire $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in J\}$.

On pose usuellement, pour tout élément (i, j) de $I \times J$:

$$\boxed{p_{ij} = P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})} \quad \boxed{p_{i\bullet} = P(\{X = x_i\}) \quad \text{et} \quad p_{\bullet j} = P(\{Y = y_j\})}$$

★★★ Dans la suite ces notations seront implicites. En particulier lorsque nous écrirons $X(\Omega)=\{x_i,\, i\in I\}$ cela sous-entendra que I est un intervalle de $\mathbb{N}$ (voire de $\mathbb{Z}$) et que $i\to x_i$ est une bijection de I sur $X(\Omega)$.

▶ 3. Loi conjointe et lois marginales (rappel).

Déf. 12 Soit (X,Y) un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

La loi conjointe de (X,Y) est l'application φ de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ dans $[0,1]$ définie par :

$$\forall (x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega),\ \varphi(x,y)=P(\{X=x\}\cap\{Y=y\})=P(\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)=x \text{ et } Y(\omega)=y\})$$

Les lois de X et de Y sont **les lois marginales** du vecteur (X,Y).

▶ 4. De la loi conjointe aux lois marginales

Th. 7 Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

$X(\Omega)=\{x_i,\, i\in I\}$ et $Y(\Omega)=\{y_j,\, j\in J\}$.

$$\boxed{\forall i\in I,\ p_{i\bullet}=P(\{X=x_i\})=\sum_{j\in J}p_{ij}} \quad \boxed{\forall j\in J,\ p_{\bullet j}=P(\{Y=y_j\})=\sum_{i\in I}p_{ij}}$$

$$\boxed{\forall x\in X(\Omega),\ P(\{X=x\})=\sum_{y\in Y(\Omega)}P(\{X=x\}\cap\{Y=y\})=\sum_{j\in J}P(\{X=x\}\cap\{Y=y_j\})}$$

$$\boxed{\forall y\in Y(\Omega),\ P(\{Y=y\})=\sum_{x\in X(\Omega)}P(\{X=x\}\cap\{Y=y\})=\sum_{i\in I}P(\{X=x_i\}\cap\{Y=y\})}$$

$$\boxed{\sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)}P(\{X=x\}\cap\{Y=y\})=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}p_{ij}=\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}p_{ij}=1=\sum_{i\in I}p_{i\bullet}=\sum_{j\in J}p_{\bullet j}}$$

▶ 5. Loi conditionnelles.

Déf. 13 Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

$X(\Omega)=\{x_i,\, i\in I\}$ et $Y(\Omega)=\{y_j,\, j\in J\}$.

• Soit i un élément de I tel que $P(\{X=x_i\})\neq 0$.

La **loi conditionnelle de Y sachant que $\{\mathbf{X}=\mathbf{x_i}\}$** est l'application :

$$\begin{array}{rcl} Y(\Omega) & \to & [0,1] \\ y_j & \to & P_{\{X=x_i\}}(\{Y=y_j\}) \end{array}$$

Soit j un élément de J tel que $p\{Y=y_j\}\neq 0$.

La **loi conditionnelle de X sachant que $\{\mathbf{Y}=\mathbf{y_j}\}$** est l'application :

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & \to & [0,1] \\ x_i & \to & P_{\{Y=y_j\}}(\{X=x_i\}) \end{array}$$

Th. 8 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$X(\Omega) = \{x_i,\, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j,\, j \in J\}$.

1. Soit i un élément de I tel que $P(\{X = x_i\}) \neq 0$.

$\forall j \in J,\ P_{\{X=x_i\}}(\{Y = y_j\}) = \dfrac{P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})}{P(\{X = x_i\})} = \dfrac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}\cdot$

2. La loi conditionnelle de Y sachant que $\{X = x_i\}$ est une loi de probabilité.

3. Soit j un élément de J tel que $P(\{Y = y_j\}) \neq 0$.

$\forall i \in I,\ P_{\{Y=y_j\}}(\{X = x_i\}) = \dfrac{P(\{Y = y_j\} \cap \{X = x_i\})}{P(\{Y = y_j\})} = \dfrac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}\cdot$

4. La loi conditionnelle de X sachant que $\{Y = y_j\}$ est une loi de probabilité.

IV VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES

0. Rappels sur l'indépendance des tribus.

Déf. 14 $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-tribus d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est une famille de **tribus mutuellement indépendantes** si pour toute partie **finie** non vide J de I et pour toute famille $(A_i)_{i\in J}$ d'événements telle que $\forall i \in J,\ A_i \in \mathcal{A}_i$ on a :

$$P\Big(\bigcap_{i\in J} A_i\Big) = \prod_{i\in J} P(A_i).$$

Th. 9 $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-tribus d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est une famille de tribus mutuellement indépendantes si et seulement si toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements telle que $\forall i \in I,\ A_i \in \mathcal{A}_i$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Th. 10 $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement (resp. deux à deux) indépendants si et seulement si la famille des tribus engendrées par ces événements est une famille de tribus mutuellement (resp. deux à deux) indépendantes.

Th. 11 *Le cas des suites finies de tribus* $\boxed{\textbf{PP}}$ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n)$ est une suite de sous-tribus de $\mathcal{A}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n)$ est une suite de tribus indépendantes.

i') Pour toute partie non vide J de $[\![1, n]\!]$, pour toute famille $(A_i)_{i \in J}$ telle que $\forall i \in J,\ A_i \in \mathcal{A}_i$ on a : $P\Big(\bigcap_{i \in J} A_i\Big) = \prod_{i \in J} P(A_i)$.

ii) Toute suite $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ A_i \in \mathcal{A}_i$ est une suite d'événements mutuellement indépendants.

iii) $\forall (A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n,\ P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2) \cdots P(A_n)$.

★★ Il convient de faire la différence entre l'indépendance d'une suite de tribus et l'indépendance d'une suite d'événements. En particulier cette équivalence entre ii) et iii) ne doit pas conduire à dire que les événements A_1, A_2, ..., A_n sont indépendants si $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2) \cdots P(A_n)$

Th. 12 *Le cas des suites infinies de tribus* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. $(\mathcal{A}_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de sous-tribus de $\mathcal{A}$.

$(\mathcal{A}_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de tribus mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout élément n de $[\![n_0 + 1, +\infty[\![$, $(\mathcal{A}_{n_0}, \mathcal{A}_{n_0+1}, \ldots, \mathcal{A}_n)$ est une suite de tribus mutuellement indépendantes.

▶ 1. Indépendance de deux variables aléatoires réelles.

Déf. 15 X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit que **les variables aléatoires X et Y sont indépendantes** ou que (X, Y) est un couple de variables aléatoires indépendantes si les tribus $\mathcal{A}_X$ et $\mathcal{A}_Y$ sont indépendantes.

Th. 13 X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) X et Y sont indépendantes.

i') Les tribus $\mathcal{A}_X$ et $\mathcal{A}_Y$ sont indépendantes.

i") Pour tout couple (B, B') de boréliens de $\mathbb{R}$, les événements $X^{-1}(B)$ et $Y^{-1}(B')$ sont indépendants.

ii) Pour tout couple (I, I') d'intervalles de $\mathbb{R}$, les événements $X^{-1}(I)$ et $Y^{-1}(I')$ sont indépendants.

iii) Pour tout couple (x, y) de réels les événements $X^{-1}(]-\infty, x])$ et $Y^{-1}(]-\infty, y])$ sont indépendants.

Th. 14 $\boxed{\textbf{PP}}$ X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. $\mathcal{I}$ est l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) X et Y sont indépendantes.

ii) $\forall (B, B') \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2,\ P(\{X \in B\} \cap \{Y \in B'\}) = P(\{X \in B\})\, P(\{Y \in B'\})$.

iii) $\forall (I, I') \in \mathcal{I}^2,\ P(\{X \in I\} \cap \{Y \in I'\}) = P(\{X \in I\})\, P(\{Y \in I'\})$.

iv) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ P(\{X \leqslant x\} \cap \{Y \leqslant y\}) = P(\{X \leqslant x\})\, P(\{Y \leqslant y\})$.

iv') $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ F_{(X,Y)}(x, y) = F_X(x)\, F_Y(y)$.

2. Indépendance d'une famille de variables aléatoires réelles.

Déf. 16 Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de variables aléatoires réeles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$(X_i)_{i\in I}$ **une famille de variables aléatoires indépendantes** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ si $(\mathcal{A}_{X_i})_{i\in I}$ est une famille de tribus indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

▸ 3. Indépendance de n variables aléatoires réelles.

Déf. 17 X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit que **les variables aléatoires $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_1}$, ..., $\mathbf{X_n}$ sont deux à deux indépendantes** ou que $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes si, pour tout couple (i, j) d'éléments de $[\![1, n]\!]$ tel que $i \neq j$ ou $i < j$, X_i et X_j sont indépendantes.

Déf. 18 X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit que **$\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, ..., $\mathbf{X_n}$ sont mutuellement indépendantes** ou que $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes si les tribus $\mathcal{A}_{X_1}$, $\mathcal{A}_{X_2}$, ..., $\mathcal{A}_{X_n}$ sont mutuellement indépendantes.

★ L'indépendance mutuelle donne l'indépendance deux à deux mais la réciproque est fausse.

Th. 15 X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i') X_1, X_2, ..., X_n sont mutuellement indépendantes.

i') Les tribus $\mathcal{A}_{X_1}$, $\mathcal{A}_{X_2}$, ..., $\mathcal{A}_{X_n}$ sont mutuellement indépendantes.

i") Pour tout n-uplet $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ de boréliens, les événements $X_1^{-1}(B_1)$, $X_2^{-1}(B_2)$, ..., $X_n^{-1}(B_n)$ sont mutuellement indépendants.

ii) Pour tout n-uplet $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ de boréliens de $\mathbb{R}$:

$$P(\{X_1 \in B_1\} \cap \{X_2 \in B_2\} \cap \cdots \cap \{X_n \in B_n\}) = P(\{X_1 \in B_1\})\, P(\{X_2 \in B_2\}) \cdots P(\{X_n \in B_n\}).$$

Th. 16 X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) X_1, X_2, ..., X_n sont mutuellement indépendantes.

ii) Pour tout n-uplet $(I_1, I_2, \ldots, I_n)$ d'intervalles de $\mathbb{R}$, les événements $X_1^{-1}(I_1)$, $X_2^{-1}(I_2)$, ..., $X_n^{-1}(I_n)$ sont mutuellement indépendants.

iii) Pour tout n-uplet $(I_1, I_2, \ldots, I_n)$ d'intervalles de $\mathbb{R}$:

$$P(\{X \in I_1\} \cap \{X \in I_2\} \cap \cdots \cap \{X \in I_n\}) = P(\{X_1 \in I_1\})\, P(\{X_2 \in I_2\}) \cdots P(\{X_n \in I_n\}).$$

Th. 17 X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) X_1, X_2, ..., X_n sont mutuellement indépendantes.

ii) Pour tout n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de réels les événements $X_1^{-1}(]-\infty, x_1])$, $X_2^{-1}(]-\infty, x_1])$, ..., $X_n^{-1}(]-\infty, x_n])$ sont mutuellement indépendants.

iii) Pour tout n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de réels :

$$P(\{X_1 \leqslant x_1\} \cap \{X_2 \leqslant x_2\} \cap \cdots \cap \{X_n \leqslant x_n\}) = P(\{X_1 \leqslant x_1\})\, P(\{X_2 \leqslant x_2\}) \cdots P(\{X_n \leqslant x_n\}).$$

iii') Pour tout n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de réels :

$$F_{(X_1, X_2, \ldots, X_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1)\, F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_1}(x_n).$$

★★ Une fois encore les résultats précédents ne doivent pas conduire à dire que des événements A_1, A_2, ..., A_n sont indépendants si $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2) \cdots P(A_n)$

▶ 4. Indépendance d'une suite de variables aléatoires réelles.

Prop. 4 $(X_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$(X_n)_{n \geqslant n_0}$ est une **suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes** si pour tout élément k de $[\![2, +\infty[\![$ et pour toute suite croissante $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ de $[\![n_0, +\infty[\![$, $(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k},)$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Prop. 5 $(X_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$(X_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes si et seulement si $(\mathcal{A}_{X_n})_{n \geqslant n_0}$ est une suite de tribus mutuellement indépendantes.

Prop. 6 $(X_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$(X_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes si et seulement si, pour tout élément n de $[\![n_0 + 1, +\infty[\![$, $(X_{n_0}, X_{n_0+1}, \ldots, X_n)$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

V VAR DISCRÈTES INDÉPENDANTES

▶ 1. Le cas de deux variables aléatoires réelles discrètes.

Th. 18 **PP** Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in J\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) X et Y sont indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

ii) Pour tout élément (x, y) de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ les événements $\{X = x\}$ et $\{Y = y\}$ sont indépendants.

ii') $\boxed{\forall x \in X(\Omega),\ \forall y \in Y(\Omega),\ P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(\{X = x\})\, P(\{Y = y\})}$

ii") $\forall (i, j) \in I \times J,\ P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = P(\{X = x_i\})\, P(\{Y = y_j\})$

Sous les hypothèses du théorème précédent, si X et Y sont indépendantes, on peut obtenir la loi conjointe du vecteur (X, Y) à partir de ses lois marginales.

Prop. 7 • Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. A et B sont indépendants si et seulement si leurs indicatrices sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

• Deux variables aléatoires réelles de Bernoulli X et Y, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, sont indépendantes si et seulement si $P(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) = P(\{X = 1\})\, P(\{Y = 1\})$.

Th. 19 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

φ (resp. ψ) est une fonction numérique de la variable réelle dont le domaine contient $X(\Omega)$ (resp. $Y(\Omega)$).

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes $\varphi(X)$ et $\psi(Y)$ le sont aussi.

Cor. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes et indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

• $aX + b$ et $cY + d$ sont deux variables aléatoires réelles indépendantes (a, b , c et d sont quatre réels).

• X^n et Y^p sont deux variables aléatoires réelles indépendantes (n et p sont deux entiers).

• Si Q et R sont deux polynômes, $Q(X)$ et $R(Y)$ sont deux variables aléatoires réelles indépendantes.

• Pour tout réel t strictement positif, t^X et t^Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes.

▶ 2. Le cas d'une suite de variables aléatoires discrètes.

Th. 20 **PP** X_1, X_2, ...,X_n sont n variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) X_1, X_2, ..., X_n sont mutuellement indépendantes.

ii) Pour tout élément $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots X_n(\Omega)$:

$$\boxed{P(\{X_1 = x_1\} \cap \{X_2 = x_2\} \cap \cdots \cap \{X_n = x_n\}) = P(\{X_1 = x_1\})P(\{X_2 = x_2\}) \cdots P(\{X_n = x_n\})}$$

iii) Pour tout élément $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots X_n(\Omega)$, $\big(\{X_1 = x_1\}, \{X_2 = x_2\}, \ldots, \{X_n = x_n\}\big)$ est une suite d'événements mutuellement indépendants.

★★ Que ce résultat ne soit pas encore l'occasion pour écrire que n événements A_1, A_2, ..., A_n sont indépendants si $P(A_1) \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_n)$. Ok ? !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

Sous les hypothèses du théorème précédent, si X_1, X_1, ..., X_n sont mutuellement indépendantes, on peut obtenir la loi conjointe du vecteur $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ à partir de ses lois marginales.

Prop. 8 X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

• Si X_1, X_2, ..., X_n sont mutuellement indépendantes il en est de même pour X_{i_1}, X_{i_2}, ..., X_{i_k} sachant que i_1, i_2,..., i_k sont k éléments distincts de $[\![1, n]\!]$.

• **!** Si X_1, X_2, ..., X_n sont mutuellement indépendantes et si p appartient à $[\![1, n-1]\!]$, les tribus associées aux vecteurs $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ et $(X_{p+1}, X_{p+2}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

Th. 21 X_1, X_2, ...,X_n sont n variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mutuellement indépendantes et p est un élément de $[\![1, n-1]\!]$.

Toute fonction de X_1, X_2, ..., X_p est indépendante de toute fonction de X_{p+1}, X_{p+2}, ...,X_n.

Plus précisément soit φ (resp. ψ) une fonction de $\mathbb{R}^p$ (resp. $\mathbb{R}^{n-p}$) dans $\mathbb{R}$ dont le domaine de définition contient $X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_p(\Omega)$ (resp. $X_{p+1}(\Omega) \times X_{p+2}(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$).

Alors $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ et $\psi(X_{p+1}, X_{p+2}, \ldots, X_n)$ sont deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes.

★ Les hypothèses sont celles du théorème précédent. Le résultat précédent se généralise de la manière suivante. Si on regroupe ces n variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes en r “paquets” non vides et disjoints et si l'on prend pour chaque paquet une fonction des variables aléatoires discrètes qui le constituent, on obtient r variables aléatoires discrètes encore mutuellement indépendantes.

Th. 22 Soit $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de variables aléatoires discrètes réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

ii) Pour tout n dans $[\![n_0+1, +\infty[\![$, pour tout $(x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots, x_n)$ dans $X_{n_0}(\Omega)\times X_{n_0+1}(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)$:

$$P(\{X_{n_0}=x_{n_0}\}\cap\{X_{n_0+1}=x_{n_0+1}\}\cap\cdots\{X_n=x_n\}) = P(X_{n_0}=x_{n_0})\,P(X_{n_0+1}=x_{n_0+1})\cdots P(X_n=x_n).$$

VI ESPÉRANCE CONDITIONNELLE

▸ 1. Définition.

Déf. 19 Soient X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et A est un événement de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle.

L'espérance de X sachant A ou **l'espérance de X conditionnelle à A** est, lorsqu'elle existe, l'espérance de X pour la probabilité P_A. On la note $E(X|A)$.

Th. 23 Soient X une variable aléatoire réelle discrète $\boxed{\text{finie}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et A est un événement de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle.

On suppose que $X(\Omega)$ possède n éléments distincts x_1, x_2, ..., x_n.

$E(X|A)$ existe et vaut : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\,P_A(X=x_k)$.

Th. 24 Soient X une variable aléatoire réelle discrète $\boxed{\text{infinie}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et A un événement de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle.

On pose : $X(\Omega)=\{x_k,\ k\in[\![n_0,+\infty[\![\ \}$.

$E(X|A)$ existe si et seulement si la série de terme général $x_k\,P_A(\{X=x_k\})$ est absolument convergente.

En cas d'existence $E(X|A)=\displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} x_k\,P_A(\{X=x_k\})$.

Th. 25 Soient X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et A est un événement de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle.

Si X possède une espérance alors $E(X|A)$ existe. La réciproque est clairement fausse.

▸ 2. Espérance conditionnelle et système complet.

Th. 26 $\boxed{\textbf{SD}}$ Soient X une variable aléatoire discrète $\boxed{\text{finie}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet (ou quasi-complet) d'événements de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On pose $I'=\{i\in I \mid P(A_i)\neq 0\}$. Alors : $\boxed{E(X)=\displaystyle\sum_{i\in I'} E(X|A_i)\,P(A_i)}$.

Cor. X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que $\boxed{Y \text{ est finie}}$.

On pose $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $I' = \{i \in I \mid P(X = x_i) \neq 0\}$.

Alors : $\boxed{E(Y) = \sum_{i \in I'} E(Y|\{X = x_i\})\, P(X = x_i)}$.

Th. 27 Soient X une variable aléatoire discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet (ou quasi-complet) d'événements de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On pose : $I' = \{i \in I \mid P(A_i) \neq 0\}$. X possède une espérance si et seulement si :

1. Pour tout élément i de I', $E(X|A_i)$ existe (ce qui assure l'existence de $E(|X|\,|\,A_i)$! !) ;
2. $\displaystyle\sum_{i\in I'} E(|X|\,|\,A_i)\,P(A_i)$ existe.

Si $E(X)$ existe : $E(X) = \displaystyle\sum_{i\in I'} E(X|A_i)\,P(A_i)$.

★★ L'énoncé proposé dans le programme est grossièrement faux. L'énoncé proposé par le "Précis" de Bréal (édition 2004) est simplement faux... qu'on se le dise.

Cor. X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $I' = \{i \in I \mid P(X = x_i) \neq 0\}$. Y possède une espérance si et seulement si :

1. Pour tout élément i de I', $E(Y|\{X = x_i\})$ existe ;
2. $\displaystyle\sum_{i\in I'} E(|Y|\,|\,\{X = x_i\})\,P(\{X = x_i\})$ existe.

Si $E(Y)$ existe : $E(Y) = \displaystyle\sum_{i\in I'} E(Y|\{X = x_i\})\,P(\{X = x_i\})$.

VII LA VARIABLE ALÉATOIRE Z=g(X,Y)

▶ 1. Remarque.

On peut extrapoler une bonne partie des résultats qui suivent à $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ où $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

▶ 2. Loi de Z=g(X,Y).

Th. 28 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit g une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ dont le domaine de définition contient $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Pour tout ω dans Ω on pose : $Z(w) = g(X(\omega), Y(\omega))$. Z est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Th. 29 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in J\}$.

Soit g une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ dont le domaine de définition contient $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. $Z = g(X, Y)$.

Si z est un élément de $Z(\Omega)$ et si l'on pose $G_z = \{(i, j) \in I \times J \mid g(x_i, y_j) = z\}$ alors :

$$P(\{Z = z\}) = \sum_{(i,j)\in G_z} P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$$

en abrégé :

$$P(\{Z = z\}) = \sum_{g(x,y)=z} P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$$

▸ 3. Espérance de Z=g(X,Y).

Th. 30 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes finies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_q\}$.

Soit g une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ dont le domaine de définition contient $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Alors $Z = g(X, Y)$ est une variable aléatoire réelle discrète finie et :

$$\boxed{E(Z) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} g(x_i, y_j)\ P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})}$$

Th. 31 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$, I et J étant deux intervalles de $\mathbb{N}$ (ou de $\mathbb{Z}$).

Soit g une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ dont le domaine de définition contient $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. $Z = g(X, Y)$.

• Z possède une espérance si et seulement si $\displaystyle\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |g(x_i, y_j)|\ P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$ existe.

• Si Z possède une espérance :

$$E(Z) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} g(x_i, y_j)\ P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} g(x_i, y_j)\ P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$$

VIII SOMME ET PRODUIT DE VARIABLES ALÉATOIRES RÉLLES DISCRÈTES

▸ 1. Loi d'une somme.

Th. 32 X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$, $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in J\}$.

Soit z un élément de $(X + Y)(\Omega)$.

$$\boxed{P(\{X + Y = z\}) = \sum_{(i,j) \in S_z} P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) \quad \text{avec } S_z = \{(i, j) \in I \times J \mid x_i + y_j = z\}}$$

En abrégé :

$$\boxed{P(\{X + Y = z\}) = \sum_{x_i + y_j = z} P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = \sum_{x + y = z} P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})}$$

En utilisant les systèmes complets d'événements $(\{X = x_i\})_{i \in I}$ et $(\{Y = y_j\})_{j \in J}$, on peut encore écrire :

$$\boxed{P(\{X + Y = z\}) = \sum_{i \in I} P(\{X = x_i\} \cap \{Y = z - x_i\}) = \sum_{j \in J} P(\{X = z - y_j\} \cap \{Y = y_j\})}$$

▶ 2. Loi d'un produit.

Th. 33 X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$X(\Omega) = \{x_i,\, i \in I\}$, $Y(\Omega) = \{y_j,\, j \in J\}$.

$$\boxed{\forall z \in (XY)(\Omega),\ P(\{XY = z\}) = \sum_{(i,j)\in P_z} P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) \quad \text{où } P_z = \{(i,j) \in I \times J \mid x_i y_j = z\}}$$

En abrégé :

$$\boxed{\forall z \in (XY)(\Omega),\ P(\{XY = z\}) = \sum_{x_i y_j = z} P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = \sum_{xy=z} P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})}$$

▶ 3. Sommes classiques.

Th. 34 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles $\boxed{\text{indépendantes}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$$\boxed{\text{Si} \quad X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p) \quad \text{alors} \quad X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n+m,p)}$$

Th. 35 X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires réelles de Bernoulli sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\boxed{\text{mutuellement indépendantes}}$ et de paramètre p alors : $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ est une variable aléatoire réelle suivant une loi binômiale de paramètres n et p

Th. 36 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles $\boxed{\text{indépendantes}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$$\boxed{\text{Si} \quad X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu) \quad \text{alors} \quad X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)}$$

IX MOMENTS ET OPÉRATIONS

▶ 1. Espérance d'une somme.

Th. 37 X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. λ est un réel.

Si X et Y possèdent une espérance alors :

1. λX et $X + Y$ possèdent une espérance.
2. $\boxed{E(\lambda X) = \lambda E(X)}$ et $\boxed{E(X+Y) = E(X) + E(Y)}$

Cor. 1 L'ensemble des variables aléatoires discrètes réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possédant une espérance est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $X \to E(X)$ est une forme linéaire sur ce sous-espace vectoriel.

Cor. 2 X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possédant une espérance.

α_1, α_2, ..., α_n sont n réels. Alors $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_2 X_n$ possède une espérance et :

$$E(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n) = \alpha_1 E(X_1) + \alpha_2 E(X_2) + \cdots + \alpha_n E(X_n).$$

Cor. 3 X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui possède un moment d'ordre 2.

Alors $E(X)$, $V(X)$, $E\big(X(X+1)\big)$, $E\big(X(X-1)\big)$ existent et :

$$\boxed{V(X) = E\big(X(X-1)\big) + E(X) - \big(E(X)\big)^2} \qquad \boxed{V(X) = E\big(X(X+1)\big) - E(X) - \big(E(X)\big)^2}$$

Th. 38 **Croissance de l'espérance** Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui possèdent une espérance.

• Si X prend presque sûrement ses valeurs dans $[0, +\infty[$, $E(X) \geqslant 0$.

• Si l'on a presque sûrement $X \leqslant Y$ (autrement dit si $P(X \leqslant Y) = 1$) alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

▸ 2. Espérance d'un produit.

Th. 39 X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui possèdent un moment d'ordre 2.

On suppose que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$, I et J étant deux intervalles de $\mathbb{N}$ (ou de $\mathbb{Z}$).

Alors XY possède une espérance et :

$$\boxed{E(XY) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_i y_j \, P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} x_i y_j \, P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})}$$

★ L'existence d'un moment d'ordre 2 pour X et Y est une condition suffisante pour que XY possède une espérance mais pas nécessaire.

Th. 40 X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $\boxed{\boxed{\text{indépendantes}}}$ et possèdant une espérance.

Alors XY possède une espérance et $\boxed{E(XY) = E(X)E(Y)}$

▸ 3. Moment d'ordre 2 d'une somme.

Th. 41 • X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possèdant un moment d'ordre 2.

Alors $X + Y$ possède un moment d'ordre 2.

• L'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possèdant un moment d'ordre 2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

▸ 4. Covariance.

Th. 42 et **déf. 20** X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possèdant un moment d'ordre 2 ou une variance.

• $E\Big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\Big]$ et $E(XY) - E(X)E(Y)$ existent et :

$$E\Big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\Big] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

• Le réel $E\Big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\Big] = E(XY) - E(X)E(Y)$ s'appelle la **covariance** du couple (X, Y) ; on la note $\text{cov}(X, Y)$.

$$\boxed{\text{cov}(X, Y) = E\Big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\Big] = E(XY) - E(X)E(Y)}$$

Th. 43 X, Y, et Z sont trois variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possèdant un moment d'ordre 2.

1. $\boxed{\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \operatorname{cov}(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha \operatorname{cov}(X, Z) + \beta \operatorname{cov}(Y, Z)}$
2. $\boxed{\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \operatorname{cov}(X, \alpha Y + \beta Z) = \alpha \operatorname{cov}(X, Y) + \beta \operatorname{cov}(X, Z)}$
3. $\boxed{\operatorname{cov}(Y, X) = \operatorname{cov}(X, Y)}$
4. $\boxed{\operatorname{cov}(X, X) = V(X)}$
5. Si X (resp. Y) est constante (ou quasi-constante) : $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$.
6. $\boxed{\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4,\ \operatorname{cov}(aX + b, cY + d) = ac \operatorname{cov}(X, Y)}$

Prop. 9 $(X, Y) \to \operatorname{cov}(X, Y)$ est une forme bilinéaire symétrique positive (non définie en général) sur l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possèdant un moment d'ordre 2.

Th. 44 X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possèdant un moment d'ordre 2.

$\boxed{\text{Si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes : } \operatorname{cov}(X, Y) = 0}$.

★★ La réciproque de ce résultat est fausse (voir complément).

▸ 5. Variance d'une somme.

Th. 45 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes possèdant un moment d'ordre 2.

$X + Y$ possède une variance et : $\boxed{V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \operatorname{cov}(X, Y)}$.

Si de plus X et Y sont $\boxed{\text{indépendantes}}$: $\boxed{V(X + Y) = V(X) + V(Y)}$.

Th. 46 X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires réelles discrètes possèdant un moment d'ordre 2.

1. $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ possède une variance et

$$\boxed{V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \operatorname{cov}(X_i, X_j)}$$

2. Si X_1, X_2, ..., X_n sont $\boxed{\text{deux à deux}}$ indépendantes :

$$\boxed{V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)}$$

▸ 6. Matrice de covariance.

Déf. 21 X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires réelles discrètes possèdant un moment d'ordre 2.

La matrice $A = \big(\operatorname{cov}(X_i, X_j)\big)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la **matrice de covariance** de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Th. 47 X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires réelles possèdant un moment d'ordre 2.

$A = (\operatorname{cov}(X_i, X_j))$ est la matrice de covariance de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

1. A est une matrice symétrique.
2. Si α_1, α_2, ..., α_n sont des réels et $U = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ alors : $\boxed{V(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n) = {}^t U A U}$

▶ 7. Coefficient de corrélation.

Déf. 22 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles ayant une variance non nulle.

Le **coefficient de corrélation** du couple (X, Y) est le réel noté $\rho_{X,Y}$ et égal à $\dfrac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}$.

Prop. 10 Soient deux variables aléatoires réelles X et Y possèdant des variances non nulles.

1. $|\rho_{X,Y}| \leqslant 1$.

2. $|\rho_{X,Y}| = 1$ si et seulement si Y est une fonction quasi- affine de X.

3. Posons $U = aX + b$ et $V = cY + d$ avec a et c dans $\mathbb{R}^*$ et b et d dans $\mathbb{R}$. $|\rho_{U,V}| = |\rho_{X,Y}|$.

X SAVOIR FAIRE

• Déterminer les lois marginales à partir de la loi conjointe.

• Déterminer les lois conditionnelles à partir de la loi conjointe.

• Déterminer la loi conjointe à partir d'une loi et et des lois conditionnelles de l'autre loi.

• Utiliser des espérances conditionnelles pour calculer une espérance.

• Utiliser l'indépendance de variables aléatoires.

• Montrer l'indépendance de variables aléatoires.

• Trouver la loi d'une somme et son espérance.

• Trouver la loi d'un produit et son espérance.

• Trouver la loi de $Z = g(X, Y)$ et son espérance.

• Calculer une covariance.

• Calculer la variance d'une somme.

• Ecrire une variable aléatoire comme somme ou combinaison linéaire de variables de Bernoulli pour en calculer l'espérance (resp. la variance).

• Utiliser les propriétés de la covariance.

• Trouver la matrice de covariance d'un n-uplet de variables aléatoires.

• Exploiter des espérances conditionnelles.

XI COMPLÉMENTS

▶ 1. Encore quelques sommes.

Prop. 11 X_1, X_2, ..., X_r sont r variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et suivant une loi géométrique de paramètre p.

$X_1 + X_2 + \ldots + X_r$ est une variable aléatoire réelle suivant une loi de Pascal de paramètres r et p.

Prop. 12 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(r, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(r', p)$ alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(r + r', p)$.

▶ 2. Indépendance de deux variables de Bernoulli.

Prop. 13 Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

X et Y sont indépendantes si et seulement si $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$.

▶ 3. Un contre-exemple utile.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$, X et Y ne sont pas nécessairement indépendantes. Illustrons.

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle $X(\Omega) = \{-1, 1, 0\}$ avec $P(\{X = -1\}) = 1/4$, $P(\{X = 0\}) = 1/2$ et $P(\{X = 1\}) = 1/4$. $E(X) = E(X^3) = 0$ donc $\operatorname{cov}(X, X^2) = 0$.

Cependant X et X^2 ne sont pas indépendantes ; en effet : $P(\{X = 1\} \cap \{X^2 = 0\}) = 0 \neq P(\{X = 1\})P(\{X^2 = 0\})$.

▶ 4. Expression matricielle de la covariance.

Prop. 14 X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes finies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_q\}$.

Considérons la matrice $A = \Big(P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})\Big)$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ la matrice $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

et la matrice $V = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$.

$$\operatorname{cov}(X,Y) = {}^tUAV - E(X)E(Y).$$