Exercice 1 **EDHEC 2000 Ex 1**

Q1 La durée de vie d'un composant électronique est une variable aléatoire X de densité f continue et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, et nulle sur $\mathbb{R}_-$. On note F la fonction de répartition de X.

a) On désigne par t et h deux réels strictement positifs. Exprimer, à l'aide de la fonction F, la probabilité $p(t,h)$ que le composant tombe en panne avant l'instant $t+h$ sachant qu'il fonctionnait encore à l'instant t.

b) Établir que, lorsque h est au voisinage de 0^+, $p(t,h) \sim \dfrac{f(t)}{1-F(t)}h$.

On pose désormais, pour tout réel positif t : $\lambda_X(t) = \dfrac{f(t)}{1-F(t)}$. On a bien sûr $\lambda_X(t) \geqslant 0$.

La fonction positive λ_X est appelée taux de panne du composant ou taux de panne de X.

Q2 Soit X une variable aléatoire qui possède une densité continue et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et de taux de panne λ_X.

a) Pour tout réel strictement positif t, calculer $\displaystyle\int_0^t \lambda_X(u)\,\mathrm{d}u$ puis montrer que la seule connaissance de la fonction "taux de panne" λ_X permet de déterminer la fonction de répartition F de X.

b) Déduire de la question précédente que les variables suivant des lois exponentielles possèdent un taux de panne constant et qu'elles sont les seules dans ce cas.

Q3 La durée de vie (en années) d'un appareil est une variable aléatoire X dont le "taux de panne" est la fonction λ_X définie par $\lambda_X(t) = t^3$.

a) Quelle est la probabilité que cet appareil survive plus d'un an ?

b) Quelle est la probabilité que cet appareil, âgé de 1 an, survive plus de 2 ans ?

Exercice 2 **EDHEC 2002 Ex 3**

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 de densités respectives f_1 et f_2 strictement positives et dérivables sur $\mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe une fonction g, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$, telle que :

$$\forall (x.y) \in \mathbb{R}^2,\ f_1(x)f_2(y) = g(x^2+y^2).$$

Q1 On suppose, dans cette question seulement, que X_1, et X_2 suivent toutes les deux la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(x) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-\dfrac{x}{2}}$.

Q2 a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R},\ \dfrac{f_1'(x)}{xf_1(x)} = \dfrac{2g'(x^2+y^2)}{g(x^2+y^2)}$

b) On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \dfrac{f_1'(x)}{xf_1(x)}$.

Soient x_1, et x_2 deux réels distincts et non nuls. Montrer que $h(x_1) = h(x_2)$ et en déduire que h est une fonction constante sur $\mathbb{R}^*$. On note a cette constante.

c) Soit k la fonction définie pour tout réel x par $k(x) = f_1(x)e^{-\frac{ax^2}{2}}$.

Montrer que k est constante sur $]0,+\infty[$ ainsi que sur $]-\infty,0[$. En déduire que k est constante sur $\mathbb{R}$, puis **montrer qu'il existe un réel K tel que** :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = K\, e^{\dfrac{ax^2}{2}}.$$

d) Utiliser le fait que f_1 est une densité de probabilité pour montrer que a est strictement négatif.

On pose dorénavant $\sigma_1 = \sqrt{\dfrac{-1}{a}}$.

e) En déduire que X_1 suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_1)$.

Q3 On admet que l'on peut montrer de la même façon qu'il existe un réel σ_2 strictement positif tel que X_2 suive la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_2)$.

Montrer, en revenant à la définition de g et en calculant $g(1)$ de deux façons, que $\sigma_1 = \sigma_2$, c'est-à-dire que X_1 et X_2 suivent toutes les deux la même loi normale.

Exercice 3 **EDHEC 2004 Ex 3**

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies toutes les deux sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $Z = X + Y$.

Q1 a) Déterminer une densité de Z.

b) Montrer que, pour tout x de $]0, 1[$, les événements $(Z > 1)$ et $(1 - x < Z \leqslant 1 + x)$ sont indépendants.

Q2 a) On pose $T = \text{Max}(X, Y)$. On admet que T est une variable aléatoire définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Montrer que T est une variable à densité puis donner une densité de T.

b) En déduire que T possède une espérance $E(T)$ et la déterminer.

c) On pose $U = |X - Y|$ et on admet que U est une variable aléatoire définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que U est combinaison linéaire de Z et T, puis en déduire l'espérance de U.

Exercice 4 **EDHEC 2005 Ex 2**

Pour tout réel x, on note $\text{Ent}\,(x)$ la partie entière de x et on rappelle que $\text{Ent}\,(x)$ est le seul entier vérifiant : $\text{Ent}\,(x) \leqslant x < \text{Ent}\,(x) + 1$.

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$). On note F sa fonction de répartition.

On pose $X_1 = \text{Ent}\,(X)\,,\ X_2 = \text{Ent}\,(10(X - X_1))$ et l'on admet que X_1 et X_2 sont des variables aléatoires définies elles aussi sur $((\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Q1 a) Déterminer $X_1(\Omega)$.

b) Pour tout k de $X_1(\Omega)$, exprimer $P(X_1 = k)$ à l'aide de F.

c) En déduire que $X_1 + 1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

d) Déterminer $E(X_1)$ en fonction de λ.

Q2 a) Déterminer $X_2(\Omega)$ et dire ce que représente X_2.

b) Justifier que, pour tout k élément de $[\![0, 9]\!]$, $P(X_2 = k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P\big(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k\}\big)$, puis montrer que :

$$\forall k \in [\![0, 9]\!],\ P(X_2 = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(F\Big(i + \frac{k+1}{10}\Big) - F\Big(i + \frac{k}{10}\Big) \right).$$

En déduire que : $\quad \forall k \in [\![0, 9]\!],\ P(X_2 = k) = e^{-\frac{\lambda k}{10}} \dfrac{1 - e^{-\frac{\lambda}{10}}}{1 - e^{-\lambda}}$.

Q3 Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes.

Exercice 5 **EDHEC 2006 Ex 3**

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ indé pendantes et suivant toutes deux la loi normale centrée réduite (de densité notée φ et de fonction de répartition notée Φ).

JF : nous supposerons que φ est l'unique densité de X continue sur $\mathbb{R}$...

On pose $Z = \mathrm{Sup}(X, Y)$ et l'on se propose de déterminer la loi de Z, ainsi que son espérance et sa variance.

Q1 a) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

b) Vérifier que Z admet pour densité la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = 2\,\varphi(x)\,\Phi(x)$

Q2 a) Rappeler la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$.

b) En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

c) En remarquant que, pour tout réel x, $\varphi'(x) = -x\,\varphi(x)$, montrer, grâce à une intégration par parties, que :

$$\int_0^{+\infty} x\,f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

d) Montrer de même que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\mathrm{d}\ t$.

En déduire que Z a une espérance et donner sa valeur.

Q3 a) a. Montrer que X^2 et Z^2 suivent la même loi.

b) Déterminer $E(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de Z.

Exercice 6 **EDHEC 2007 Ex 3**

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A})$, mutuellement indépendantes, et qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Q1. Rappeler quelle est la loi suivie par S_n. Donner l'espérance et la variance de S_n.

Q2. À l'aide du théorème de la limite centrée, établir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(S_n \leqslant n) = \frac{1}{2}\cdot$

Q3. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-t}dt$.

Q4. a) Utiliser le résultat précédent pour montrer que $\displaystyle\int_0^1 z^{n-1}e^{-nz}dz \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{2\,n^{n+1}}\cdot$

b) On admet que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\,n^n\,e^{-n}$. En déduire un nouvel équivalent de $\displaystyle\int_0^1 z^{n-1}e^{-nz}dz$.

Exercice 7 **EDHEC 2008 Ex 1**

Q1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2\,x \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels x et y pour que la matrice A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q2. Dans la suite X et Y sont deux variables aléatoires réelles, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes qui suivent toutes les deux la loi uniforme sur $[0, 1]$.

a) Déterminer une densité de X^2 (on ne demande pas de vérifier que X^2 est une variable aléatoire à densité).

b) Déterminer une densité de $-Y$ (on ne demande pas de vérifier que $-Y$ est une variable aléatoire à densité).

c) En déduire que la variable aléatoire $X^2 - Y$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } x \in [-1,0[\\ 1-\sqrt{x} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

d) Déterminer la probabilité pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2\,X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 8 **ECRICOME 2000 Ex 2**

a et b sont deux réels strictement positifs, s est un réel vérifiant $0 < s < 1$.

Q1 a) Etablir la convergence de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^u + a}\,\mathrm{d}u$.

b) Calculer J.

On considère une suite de variables aléatoires $(Y_k)_{k>0}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la même loi exponentielle de paramètre b.

On considère également une variable aléatoire N définie sur le même espace probabilisé, indépendante des Y_k et suivant la loi géométrique de paramètre s.

On admet que Z définie par $Z = \mathrm{Max}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_N)$ est une variable aléatoire à densité.

On rappelle que si ω est un élément de Ω alors $Z(\omega)$ est le plus grand des réels :

$$Y_1(\omega), Y_2(\omega), \ldots, Y_{N(\omega)}(\omega)$$

Q2 Soit j un entier strictement positif et t un réel positif. Calculer la probabilité conditionnelle $P(Z \leqslant t/N = j)$.

Q3 a) En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire Z.

b) Déterminer une densité de Z.

Q4 Montrer que Z admet une espérance et que l'on a : $E(Z) = \dfrac{-\ln(s)}{b(1-s)}$

Seul le résultat de la question 4) est nécessaire pour traiter les questions suivantes.

Q5 Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(0) = 1$ et $g(t) = \dfrac{t \cdot e^{-t}}{1-e^{-t}}$ pour $t > 0$.

a) Montrer que la fonction g est continue et bornée sur $[0,+\infty[$.

b) Etablir, pour tout réel t appartenant à $[0,+\infty[$ et tout entier n positif, l'égalité :

$$g(t) = g(t)\cdot e^{-(n+1)t} + \sum_{k=0}^{n} te^{-(k+1)t}$$

Q6 Justifier la convergence, pour tout entier positif k, de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \cdot e^{-(k+1)t}\,\mathrm{d}t$ et la calculer.

Q7 Montrer alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et égale à $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Q8 On admet que la somme de cette série est $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Montrer que la valeur moyenne de $E(Z)$ sur $]0,1[$, c est-à-dire $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(s)}{b(1-s)}\,\mathrm{d}s$ est égale à $\dfrac{\pi^2}{6b}$.

Exercice 9 **ECRICOME 2001 Ex 1**

Soient a et b deux réels strictement positifs, X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, suivant chacune une loi exponentielle de paramètres respectifs a et b.

Q1 Déterminer la fonction de répartition, puis une densité, de la variable aléatoire $-X$.

Q2 Montrer que $Y - X$ admet une densité, notée h, définie par

$$h(t) = \frac{ab}{a+b}\, e^{-bt} \quad \text{pour} \quad t > 0 \quad \text{et} \quad h(t) = \frac{ab}{a+b}\, e^{at} \quad \text{pour} \quad t \leqslant 0$$

On considère la variable aléatoire $Z = |X - Y|$.

Q3 Soit s un réel positif. Etablir l'égalité : $P(Z \leqslant s) = 1 - \dfrac{b\, e^{-as} + a\, e^{-bs}}{a+b}$.

Q4 a) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

b) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.
