**F 1** Assez simple ou proche du cours.

**F 2** Demande du travail.

**F 3** Délicat.

## EXERCICES SANS PRÉPARATION HEC 2005

### Question 11 D'après HEC 2005-11 **F 2**

$X$ est une variable aléatoire de densité $f$ nulle sur $]-\infty, 0[$ et continue sur $[0, +\infty[$. On pose $Y = [X]$ (partie entière...)

Montrer que $X$ possède une espérance si et seulement si $Y$ possède une espérance.

## EXERCICES SANS PRÉPARATION 2006

### Question 7 HEC 2006-7 **F 1** *élève*

$X$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$. Donner la loi de $Y = e^X$. Existence et valeur du moment d'ordre $k$.

## EXERCICES SANS PRÉPARATION 2007

### Question 7 HEC 07-7 **F 1**

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs positives ou nulles et admettant une densité $f$ qui est continue sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que $X$ possède un moment d'ordre 2.

Q1. Étudier le comportement de $x^2\, P(X \geqslant x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

Q2. Établir une relation entre $E(X^2)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, P(X \geqslant x)\, \mathrm{d}x$.

Q3. Prouver que : $\displaystyle\left(\int_0^{+\infty} P(X \geqslant x)\, \mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 2 \int_0^{+\infty} x\, P(X \geqslant x)\, \mathrm{d}x$.

### Question 10 HEC 07-10 **F 1⁻**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = a\, e^{x - a\, e^x}$.

Q1. À quelle(s) condition(s) $f$ est-elle une densité de probabilité ?

Q2. Soit $X$ une variable aléatoire admettant $f$ pour densité, quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = e^X$ ?

### Question 18 HEC 07-18-S124 **F 2**

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires et $N$ une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et toutes indépendantes.

On suppose que les variables aléatoire $X_k$ suivent la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ et que $N$ suit la loi géométrique de paramètre $p \in ]0, 1[$. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k$.

Q1. Que dire de $X_1 + X_2 + \cdots + X_r$ lorsque $r$ appartient à $\mathbb{N}^*$ ?

Q2. En déduire la fonction de répartition puis la loi de $S$. Vérifier que $E(S) = E(N)E(X_1)$.

## EXERCICES SANS PRÉPARATION 2008

## Question 7 **HEC 2008 S7** $\boxed{\textbf{F2}}$

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On considère $n$ variable aléatoires à densité, de même loi que et indépendantes $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$. On note $F$ la fonction de répartition et $f$ une densité des $X_i$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $\big(Y_1(\omega), Y_2(\omega), \dots, Y_n(\omega)\big)$ la suite des $X_i(\omega)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ réordonnés par ordre croissant.

On a donc $Y_1(\omega) \leqslant Y_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant Y_n(\omega)$ pour tout $\omega$ de $\Omega$.

Q1. Si $1 \leqslant k \leqslant n$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que $P(Y_k \leqslant x) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(x))^j \, (1 - F(x))^{n-j}$.

Q2. En déduire que $Y_k$ admet une densité que l'on explicitera sans signe $\sum$.

---

## Question 9 **HEC 2008 S9** $\boxed{\textbf{F1}}$

$U$ est une variable aléatoire définie sur un espace probablilsé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de loi uniforme sur $]0, 1]$, et $q \in ]0, 1[$.

Déterminer la loi de la variable alétaoire $X = 1 + \left\lfloor \dfrac{\ln U}{\ln q} \right\rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel $x$.

---

# EXERCICES SANS PRÉPARATION 2009

---

## Question 10 **HEC 2009** $\boxed{\textbf{F 2}}$ M. DESSUGES

$a$ et $b$ sont deux réels strictement positifs. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ayant même loi, prenant leurs valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ P(X_n > x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{a}{x^b}.$$

Montrer que la suite de terme général $\dfrac{1}{n^{1/b}} \operatorname{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ converge en loi.

---

## Question 11 **HEC 2009** $\boxed{\textbf{F 1}}$ M. ANGLADE

$n$ appartient à $\mathbb{N}^*$. $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ sont $n$ variable aléatoires à densité indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant pour densité la fonction $f$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} e^{-(x-a)} & \text{si } x \in [a, +\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ et $T_n = \operatorname{Min}(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Calculer $E(M_n)$ et $E(T_n)$.

Déduire de $M_n$ et $T_n$ deux estimateurs sans biais et convergents de $a$. Quel est le meilleur ?

---

# EXERCICES SANS PRÉPARATION 2010

---

## Question 1 **HEC 2010** $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit $X$ une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un $n$-échantillon i.i.d. de la loi de $X$.

Q1. Déterminer une densité de $Y_k = -\operatorname{Max}(X_1, X_2, \dots, X_k)$, pour tout $k$ dans $[\![1, n-1]\!]$.

Q2. En déduire $P(\{X_n \geqslant X_1\} \cap \cdots \cap (\{X_n \geqslant X_{n-1}\})$.

---

**Question 4** **HEC 2010** $\boxed{\textbf{F 2}}$ Vu par JF

Q1. Montrer qu'il existe un réel $c$ pour lequel la fonction $f$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{c}{1+x^2}$ est une densité de probabilité.

Q2. Une variable aléatoire réelle ayant une telle densité possède-t-elle une espérance ?

Q3. Montrer que si $X$ est une variable aléatoire réelle de densité $f$, $X$ et $\dfrac{1}{X}$ ont même loi.

**Cours** *Matrice inversible : définition et propriétés.*

---

**Question 7** **HEC 2010** $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes et de même loi.

On suppose qu'il existe deux réels strictement positifs $\alpha$ et $\lambda$ tels que $P(X_1 > x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{x^\lambda}$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Z_n = n^{-\frac{1}{\lambda}}\ \mathrm{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi

---

## EXERCICES SANS PRÉPARATION 2011

---

**Question 2** **HEC 2011** **S 1152** $\boxed{\textbf{F1}^-}$

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ i.i.d..

On suppose que, pour tout $k$ dans $\mathbb{N}^*$, la variable alétoire $X_k$ suit une loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

On pose $Y_n = \mathrm{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Étudier la convergence de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

**Cours** *Théorème de d'Alembert-Gauss*

---

**Question 6** **HEC 2011** **S 1175** $\boxed{\textbf{F1}^+}$

On considère une suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes une loi uniforme sur le segment $[0, \theta]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = \mathrm{Max}(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

Q1. Prouver que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers $\theta$.

Q2. Étudier la convergence en loi de $Y_n = n\,(\theta - X_n)$.

*Question de cours : Caractériser les isomorphismes d'espaces vectoriels de dimensions finies.*

---

**Question 11** **HEC 2011** **S 113** $\boxed{\textbf{F3}}$

On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant chacune la loi exponentielle de paramètre 1.

Q1 Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

a) Quelle est la loi de $S_n$ ?

b) Quelle est la limite, quand $n$ tend vers l'infini, de la probabilité $P(S_n \geqslant n + \sqrt{n})$ ?

Q2. Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire $N_n$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante des $X_k$ et dont la loi est donnée par :

$N_n(\Omega) = \{n, n+1\}$ et $P(N_n = n) = P(N_n = n+1) = \dfrac{1}{2}\cdot$

a) $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver l'espérance et la variance de la variable aléatoire $T_n$ définie par : $\forall \omega \in \Omega,\ T_n(\omega) = S_{N_n(\omega)}$.

b) Quelle est la limite, quand $n$ tend vers l'infini, de la probabilité $P(T_n \geqslant n + \sqrt{n})$ ?

**Cours** *Rappeler la définition du rang d'une matrice. Une matrice carrée et sa transposée ont-elles nécessairement le même rang ?*

---

## EXERCICES SANS PRÉPARATION 2011 (suite)

---

### Question 2 **HEC 2011** Obtenu par M. CARRIERE $\boxed{\textbf{F1}^-}$

$X$ est une variable aléatoire dont la fonction de répartition est définie par :

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x-a)} & \text{si } x \in ]a, +\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$(X_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes ayant même loi que $X$.

Donner la loi de $n\left(\underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\text{Min}} X_k - a\right)$.

**Cours** *Inégalité de Taylor-Lagrange.*

---

### Question 5 **HEC 2011** G. FOUBART $\boxed{\textbf{F2}}$

Q1. $X$ suit la loi normale centrée réduite. Montrer que $Z = e^X$ est une variable aléatoire à densité et en donner une denité $f_Z$.

Q2. $a$ est un élément de $[-1, 1]$. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = \begin{cases} (1 + a\ \sin(2\pi\ \ln x))\, f_Z(x) & \text{si } x \in ]0, +\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que $f_a$ est une densité de probabilité.

*Plus une question non lue.*

*Je propose :* $T$ est une variable aléatoire à densité de densité $f_a$. Existence et valeur éventuelle de $E(T)$.

*Question de cours : Comparaison des séries à termes positifs.*

---

### Question 6 **HEC 2011** C. DAUDET $\boxed{\textbf{F1}^-}$

Soit $n$ un entier naturel non nul.

Q1. Trouver un réel $C_n$ pour que la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = \begin{cases} C_n\, e^{-4n\,t}\, t^{n-1} & \text{si } t \in [0, +\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ soit une densité de probabilité.

Q2. $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de variables indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 4.

Trouver, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, la loi de $Z_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Montrer que la suite $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ converge en probabilité.

*Question de cours : Définition d'une forme linéaire. Noyau et image d'une forme linéaire.*

---

## EXERCICES SANS PRÉPARATION 2012

---

### Question 1 HEC 2012-1-S7 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi uniforme sur $]0, 1]$.

On pose pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$ : $X_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} U_i^{\frac{1}{n}}$ et $Y_n = (e\,X_n)^{\sqrt{n}}$.

Montrer que la suite de variables aléatoires $\big(\ln Y_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

*Question de cours. Définition et proppriétés des fonctions indicatrices des parties d'un ensemble.*

---

### Question 6 HEC 2012-6-S23 $\boxed{\text{F 1}}$ I. KARDASZEWICZ

$a$, $b$ sont deux réels strictement positifs. $\alpha$ est réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.

Soit $X$ une variable aléatoire définie sur un espace probabilissé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, vérifiant les conditions suivantes :

- $P(X = 0) = 0$ ;
- $P(X > 0) = \alpha$ ;
- $P_{\{X>0\}}(X \leqslant x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ ;
- $P_{\{X<0\}}(-X \leqslant x) = \begin{cases} 1 - e^{-bx} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. *Je mettrais plutôt* $P_{\{X<0\}}(-X < x) = \begin{cases} 1 - e^{-bx} & \textit{si } x > 0 \\ 0 & \textit{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Q1. Déterminer la fonction de répartition de $X$.

Q2. La variable aléatoire $X$ est-elle à à densité ?

Q3. Établir l'existence de $E(X)$. Calculer $E(X)$.

*Question de cours. Développement limité d'ordre 1 au point $a$ de $\mathbb{R}^n$ pour une fonction numérique $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.*

---

### Question 7 HEC 2012-7-S27 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit $X$ une variable à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

Q1. On suppose que la variable aléatoire $X + \dfrac{1}{X}$ admet une espérance. Montrer que $X$ admet une espérance.

Q2. La réciproque est-elle vraie ?

*Question de cours. Ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.*

---

### Question 13 HEC 2012-13-S40 $\boxed{\text{F 2}}$

On considère une variable aléatoire $X$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $]0{,}1[$.

Déterminer toutes les fonctions $g$ continues et strictement monotones de $]0, 1[$ sur $g(]0, 1[)$ telles que la variable aléatoire $Y = g(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.

*Question de cours. Comparaison des séries à termes positifs.*

---

## Question 15 **HEC 2012-15** $\boxed{\textbf{F1}}$ **N. KARPIEL**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes une loi normale centrée réduite.

Soit $\theta$ un réel. On pose $Y_0 = X_0$ et pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, $Y_n = \theta\, Y_{n-1} + X_n$.

Q1. Donner la loi de $Y_n$.

Q2. Calculer $\text{cov}(Y_n, Y_{n-k})$ pour $n > k > 0$.

*Déjà vu en 2007.*

*Question de cours Théorème de d'Alembert.*

---