R.

Question 11 D'après HEC 2005 $\boxed{\text{F 2}}$

X est une variable aléatoire de densité f nulle sur $]-\infty, 0[$ et continue sur $[0, +\infty[$. On pose $Y = [X]$ (partie entière...)

Montrer que X possède une espérance si et seulement si Y possède une espérance.

$Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(Y=k) = P(k \leq X < k+1) = \int_k^{k+1} f(t)\,dt$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $k\,P(Y=k) = k\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq \int_k^{k+1} t f(t)\,dt \leq (k+1)\int_k^{k+1} f(t)\,dt = k\,P(Y=k) + P(Y=k)$

La série de terme général $P(Y=k)$ étant convergente ce qui précède montre que les séries de termes généraux $k\,P(Y=k)$ et $\int_k^{k+1} t f(t)\,dt$ sont de même nature.

Alors $E(Y)$ existe ssi la série de terme général $\int_k^{k+1} t f(t)\,dt$ converge.

- Supposons que $E(X)$ existe. $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge.

  $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} t f(t)\,dt = \int_0^{n+1} t f(t)\,dt \leq \int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$.

  La série de terme général $\int_k^{k+1} t f(t)\,dt$ converge car elle est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée. $E(Y)$ existe.

- Supposons que la série de terme général $\int_k^{k+1} t f(t)\,dt$ converge donc que $E(Y)$ existe.

  $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $t f(t) \geq 0$. Pour montrer que $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge il suffit de prouver que $x \mapsto \int_0^x t f(t)\,dt$ est majorée.

  $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \int_0^x t f(t)\,dt \leq \sum_{k=0}^{[x]} \int_k^{k+1} t f(t)\,dt \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+1} t f(t)\,dt$.

  $x \mapsto \int_0^x t f(t)\,dt$ est majorée par $\sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+1} t f(t)\,dt$. $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge. $E(X)$ existe.

Ceci achève de montrer que $E(X)$ existe ssi $E(Y)$ existe.

<u>Remarque</u>... En cas d'existence : $E(Y) \leq E(X) \leq E(Y) + 1$!

R

Question 7 **HEC 2006** $\boxed{\textbf{F 1}}$ *élève*

X suit une loi exponentielle de paramètre λ. Donner la loi de $Y = e^X$. Existence et valeur du moment d'ordre k.

$Y(\Omega) = [1, +\infty[$. $\forall x \in]-\infty, 1[$, $F_Y(x) = 0$

$\forall x \in [1, +\infty[$, $F_Y(x) = P(e^X \leq x) = P(X \leq \ln x) = 1 - e^{-\lambda \ln x} = 1 - x^{-\lambda}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_Y(x) = \begin{cases} \lambda x^{-\lambda-1} & \text{si } x \in [1, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f_Y est une densité de Y.

Soit $k \in \mathbb{N}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} t^k f_Y(t)\,dt$ existe et vaut 0.

$\forall t \in [1, +\infty[$, $t^k f_Y(t) = \lambda \dfrac{1}{t^{\lambda+1-k}}$

Alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^k f_Y(t)\,dt$ existe ssi $\lambda + 1 - k > 1$ ou si $\lambda > k$.

Y possède un moment d'ordre k ssi $k < \lambda$.

Supposons $k < \lambda$: $E(Y^k) = \lambda \displaystyle\int_1^{+\infty} t^{k-\lambda-1} = \lambda \lim_{A \to +\infty} \dfrac{A^{k-\lambda} - 1}{k - \lambda} = \dfrac{\lambda}{\lambda - k}$.

Remarque.. $Y = e^X$ suit la loi de Pareto de paramètres λ et 1.

Exercice Reprendre l'étude de l'existence et la détermination de la valeur de $E(Y^k)$ en utilisant le théorème de transfert.

R

R.

Question 7 **HEC 07-7** $\boxed{\textbf{F 1}}$ Soit X une variable aléatoire à valeurs positives ou nulles et admettant une densité f qui est continue sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que X possède un moment d'ordre 2.

Q1. Étudier le comportement de $x^2\,P(X \geqslant x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Q2. Établir une relation entre $E(X^2)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,P(X \geqslant x)\,\mathrm{d}x$.

Q3. Prouver que : $\displaystyle\left(\int_0^{+\infty} P(X \geqslant x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 2\int_0^{+\infty} x\,P(X \geqslant x)\,\mathrm{d}x$.

Q1 Soit $x \in [0,+\infty[$.

$$0 \leq x^2 P(X \geq x) = x^2 \int_x^{+\infty} f(t)\,dt = \int_x^{+\infty} x^2 f(t)\,dt.$$

Or $\forall t \in [x,+\infty[$, $x^2 \leq t^2$ et $f(t) \geq 0$ donc $\forall t \in [x,+\infty[$, $x^2 f(t) \leq t^2 f(t)$.

De plus $\int_x^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ converge car X possède un moment d'ordre 2.

Alors $0 \leq x^2 P(X \geq x) \leq \int_x^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ et $\lim_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = 0$ (reste d'une intégrale convergente). Par encadrement $\underline{\underline{\lim_{x \to +\infty} (x^2 P(X \geq x)) = 0}}$.

Q2 Posons $\forall x \in [0,+\infty[$, $u(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt$ et $v(x) = \frac{x^2}{2}$. Notons que $\forall x \in [0,+\infty[$, $u(x) = P(X \geq x)$.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $u(x) = -\int_1^x f(t)\,dt + \int_1^{+\infty} f(t)\,dt$. Comme f est continue sur $[0,+\infty[$, $x \mapsto \int_1^x f(t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. Alors u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ de plus $\forall x \in [0,+\infty[$, $u'(x) = -f(x) + 0 = -f(x)$.

v est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et $\forall x \in [0,+\infty[$, $v'(x) = x$.

Ceci justifie l'intégration par parties qui suit. Soit $x \in [0,+\infty[$.

$$\int_0^x t\,P(X \geq t)\,dt = \int_0^x v'(t)u(t)\,dt = [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u'(t)v(t)\,dt.$$

$$\int_0^x t\,P(X \geq t)\,dt = P(X \geq x) \times \frac{x^2}{2} - 0 - \int_0^x (-f(t))\frac{t^2}{2}\,dt = \frac{x^2}{2} P(X \geq x) + \frac{1}{2}\int_0^x f(t)\,t^2\,dt.$$

$E(X^2)$ existe et $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ (car X prend ses valeurs dans $[0,+\infty[$).

Donc $\lim_{x \to +\infty} \left(\int_0^x f(t)\,t^2\,dt\right) = E(X^2)$. De plus $\lim_{x\to+\infty} (x^2 P(X \geqslant x)) = 0$.

Alors $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x t\,P(X \geqslant t)\,dt = \frac{1}{2} E(X^2)$.

$\underline{\int_0^{+\infty} t\,P(X \geqslant t)\,dt \text{ converge et vaut } \frac{1}{2} E(X^2)}$. $\underline{E(X^2) = 2\int_0^{+\infty} x\,P(X \geqslant x)\,dx}$.

Q3 $V(X)$ existe car X possède un moment d'ordre 2.

$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) \geqslant 0$ (... croissance de l'espérance).

Alors $E(X^2) - (E(X))^2 \geqslant 0$. $(E(X))^2 \leqslant E(X^2) = 2\int_0^{+\infty} x\,P(X \geqslant x)\,dx$.

Montrons alors, à l'aide d'une intégration par partie que $E(X) = \int_0^{+\infty} P(X \geqslant x)\,dx$.

Soit $A \in \mathbb{R}^+$.

$\int_0^A u(t)\,dt = [t\,u(t)]_0^A - \int_0^A t\,u'(t)\,dt = A\,u(A) - \int_0^A t\,(-f(t))\,dt = A\,u(A) + \int_0^A t f(t)\,dt$.

Notons que $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A t f(t)\,dt = E(X)$ (car X prend ses valeurs dans $[0,+\infty[$ et X possède une espérance car elle a un moment d'ordre 2).

$0 \leqslant A\,u(A) = A\int_A^{+\infty} f(t)\,dt = \int_A^{+\infty} A f(t)\,dt \leqslant \int_A^{+\infty} t f(t)\,dt$

car $\begin{cases} \forall t \in [A,+\infty[,\ A \leqslant t \text{ et } f(t) \geqslant 0 \text{ et} \\ \int_A^{+\infty} t f(t)\,dt \text{ existe.} \end{cases}$

de plus $\lim_{A\to+\infty} \int_A^{+\infty} t f(t)\,dt = 0$ comme reste d'une intégrale convergente.

Ainsi par encadrement $\lim_{A\to+\infty} (A\,u(A)) = 0$. Alors $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A u(t)\,dt = 0 + E(X) = E(X)$.

$\underline{\text{Donc } \int_0^{+\infty} P(X \geqslant t)\,dt \text{ converge et vaut } E(X).}$

Ainsi $\left(\int_0^{+\infty} P(X \geqslant t)\,dt\right)^2 = (E(X))^2 \leqslant E(X^2) = 2\int_0^{+\infty} x\,P(X \geqslant x)\,dx$. Donc $\underline{\left(\int_0^{+\infty} P(X \geqslant x)\,dx\right)^2 \leqslant 2\int_0^{+\infty} x\,P(X \geqslant x)\,dx}$

R.

Question 10 HEC 07-10 $\boxed{\text{F } 1^-}$ Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = a\, e^{x - a\, e^x}$.

Q1. À quelle(s) condition(s) f est-elle une densité de probabilité ?

Q2. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité, quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = e^X$?

Q1 * Si $a < 0$: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0$; f n'est pas une densité de probabilité.

* Si $a = 0$: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut 0 ; f n'est toujours pas une densité de probabilité.

* Supposons $a > 0$. • f est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. $\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x a\, e^t e^{-ae^t}\,dt = \left[-e^{-ae^t}\right]_0^x = e^{-a} - e^{-ae^x}$ (1).

On a aussi $\int_x^0 f(t)\,dt = e^{-ae^x} - e^{-a}$ (2).

$\lim_{x \mapsto +\infty} e^{-ae^x} = 0$ car $\lim_{x \mapsto +\infty} (-ae^x) \overset{a>0}{=} -\infty$. Alors $\lim_{x \mapsto +\infty} \int_0^x f(t)\,dt = e^{-a}$.

$\lim_{x \mapsto -\infty} e^{-ae^x} = 1$ car $\lim_{x \mapsto -\infty} (-ae^x) = 0$. Alors $\lim_{x \mapsto -\infty} \int_x^0 f(t)\,dt = 1 - e^{-a}$.

Donc $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut e^{-a}, et $\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt$ converge et vaut $1 - e^{-a}$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1. Ceci achève de montrer que f est une densité de probabilité.

Finalement f est une densité de probabilité si et seulement si $a > 0$.

$a > 0$!

Q2 Soit F_Y la fonction de répartition de Y. Y prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$.

Donc $\forall x \in]-\infty, 0],\ F_Y(x) = 0$. Soit $x \in]0, +\infty[$.

$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(e^X \leq x) = P(X \leq \ln x) = \int_{-\infty}^{\ln x} a\, e^t e^{-ae^t}\,dt = \lim_{z \mapsto -\infty} \left[-e^{-ae^t}\right]_z^{\ln x}$.

$F_Y(x) = \lim_{z \mapsto -\infty} \left(e^{-ae^z} - e^{-ae^{\ln x}}\right) = 1 - e^{-ax}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. $Y = e^X$ suit la loi exponentielle de paramètre a.

Question 18 **HEC 07-18-S124** $\boxed{\text{F 2}}$ Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires et N une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et toutes indépendantes.

On suppose que les variables aléatoire X_k suivent la loi exponentielle de paramètre λ et que N suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$.

Q1. Que dire de $X_1 + X_2 + \cdots + X_r$ lorsque r appartient à $\mathbb{N}^*$?

Q2. En déduire la fonction de répartition puis la loi de S. Vérifier que $E(S) = E(N)E(X_1)$.

Q1 Soit $r\in\mathbb{N}^*$. $X_1, X_2, \dots, X_r$ sont indépendantes et $\forall \ell \in [\![1,r]\!]$, $X_\ell \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ ou $X_\ell \hookrightarrow \Gamma(\frac{1}{\lambda}, 1)$. Le théorème de stabilité sur les lois gamma montre que

$\underline{\underline{X_1+X_2+\cdots+X_r \text{ suit la loi gamma de paramètres } \lambda, r.}}$

Pour $\forall t\in\mathbb{R}$, $f_r(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda t}\, t^{r-1}}{(1/\lambda)^r\, \Gamma(r)} & \text{si } t\in[0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f_r est une densité de $X_1+X_2+\cdots+X_r$

Q2 Notons F_S la fonction de répartition de S. S prend ses valeurs dans $[0,+\infty[$.
$\forall x\in]-\infty,0[$, $F_S(x)=0$. Soit $x\in[0,+\infty[$. $(\{N=r\})_{r\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'évènements et $\forall r\in\mathbb{N}^*$, $P(N=r)=pq^{r-1}\neq 0$ $\underline{(q=1-p)}$.

$F_S(x)=P(S\leqslant x)=\sum_{r=1}^{+\infty} P(\{S\leqslant x\}\cap\{N=r\}) = \sum_{r=1}^{+\infty} P(\{X_1+X_2+\cdots+X_r\leqslant x\}\cap\{N=r\})$.

Or si $r\in\mathbb{N}^*$, $X_1, X_2, \dots, X_r, N$ sont indépendantes donc $X_1+X_2+\cdots+X_r$ et N sont indépendantes.

Alors $F_S(x) = \sum_{r=1}^{+\infty} P(X_1+X_2+\cdots+X_r\leqslant x)\,P(N=r) = \sum_{r=1}^{+\infty}\left(\int_0^x f_r(t)\,dt\right)pq^{r-1}$

$F_S(x) = p\sum_{r=1}^{+\infty}\int_0^x \dfrac{e^{-\lambda t}\,t^{r-1}q^{r-1}}{(1/\lambda)^r\,\underbrace{\Gamma(r)}_{(r-1)!}}\,dt = p\lambda\sum_{r=0}^{+\infty}\int_0^x \dfrac{e^{-\lambda t}(tq\lambda)^r}{r!}\,dt$
"$r\leftarrow r+1$"

Continuons formellement !

" $F_S(x) \overset{(*)}{=} p\lambda\int_0^x e^{-\lambda t}\sum_{r=0}^{+\infty}\dfrac{(tq\lambda)^r}{r!}\,dt = p\lambda\int_0^x e^{-\lambda t}e^{tq\lambda}\,dt = p\lambda\int_0^x e^{-\lambda t(1-q)}\,dt = p\lambda\left[\dfrac{e^{-\lambda t p}}{-\lambda p}\right]_0^x$ "

" $F_S(x) = 1-e^{-\lambda p x}$ ". Sauf que $(*)$ n'est pas justifiée !!

Notons que ce résultat démontré nous aurions $S \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda p)$

Montrons que $\sum_{r=0}^{+\infty}\int_0^x \frac{e^{-\lambda t}(\lambda q t)^r}{r!}dt = \int_0^x e^{-\lambda t}\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{(\lambda q t)^r}{r!}dt$.

ce qui revient à montrer que : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{r=0}^{n}\int_0^x \frac{e^{-\lambda t}(\lambda q t)^r}{r!} = \int_0^x e^{-\lambda t}e^{\lambda q t}dt$

ou encore que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^x e^{-\lambda t}\left[e^{\lambda q t}-\sum_{r=0}^{n}\frac{(\lambda q t)^r}{r!}\right]dt=0$. Posons $\forall u\in\mathbb{R}$, $\varphi(u)=e^u$.

φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. $\forall k\in\mathbb{N}$, $\varphi^{(k)}=\varphi$. Soit $n\in\mathbb{N}$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre n donne :

$\forall u\in\mathbb{R}$, $\left|\varphi(u)-\sum_{r=0}^{n}\frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!}u^r\right|\leq\frac{|u|^{n+1}}{(n+1)!}\max_{z\in\widetilde{[0,u]}}|\varphi^{(n+1)}(z)|$

$\forall u\in\mathbb{R}$, $\left|e^u-\sum_{r=0}^{n}\frac{u^r}{r!}\right|\leq\frac{|u|^{n+1}}{(n+1)!}\max_{z\in\widetilde{[0,u]}}e^z=\frac{|u|^{n+1}}{(n+1)!}e^{\max(0,u)}\leq\frac{|u|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|u|}$.

Donc $\forall t\in[0,x]$, $\left|e^{\lambda q t}-\sum_{r=0}^{n}\frac{(\lambda q t)^r}{r!}\right|\leq\frac{(\lambda q t)^{n+1}}{(n+1)!}e^{\lambda q t}$ $(\lambda q t\geq 0)$

Alors $\left|\int_0^x e^{-\lambda t}\left[e^{\lambda q t}-\sum_{r=0}^{n}\frac{(\lambda q t)^r}{r!}\right]dt\right|\underset{x\geq 0}{\leq}\int_0^x e^{-\lambda t}\left|e^{\lambda q t}-\sum_{r=0}^{n}\frac{(\lambda q t)^r}{r!}\right|dt\underset{x\geq 0}{\leq}\int_0^x e^{-\lambda t}\frac{(\lambda q t)^{n+1}}{(n+1)!}e^{\lambda q t}dt$.

$\left|\int_0^x e^{-\lambda t}\left[e^{\lambda q t}-\sum_{r=0}^{n}\frac{(\lambda q t)^r}{r!}\right]dt\right|\leq\frac{(\lambda q x)^{n+1}}{(n+1)!}\int_0^x e^{-\lambda t(1-q)}dt$.

$\forall t\in[0,x]$, $\frac{(\lambda q t)^{n+1}}{(n+1)!}\leq\frac{(\lambda q x)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $e^{-\lambda t}e^{\lambda q t}\geq 0$.

$\lim_{n\to+\infty}\frac{(\lambda q x)^{n+1}}{(n+1)!}=0$ car la série de terme général $\frac{(\lambda q x)^{n+1}}{(n+1)!}$ converge.

Donc par encadrement il vient : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^x e^{-\lambda t}\left[e^{\lambda q t}-\sum_{r=0}^{n}\frac{(\lambda q t)^r}{r!}\right]dt=0$.

Alors $\lim_{n\to+\infty}\left[\int_0^x e^{-\lambda t(1-q)}dt-\sum_{r=0}^{n}\int_0^x\frac{e^{-\lambda t}(\lambda q t)^r}{r!}dt\right]=0$.

Donc $\lim_{n\to+\infty}\sum_{r=0}^{n}\int_0^x\frac{e^{-\lambda t}(\lambda q t)^r}{r!}dt=\int_0^x e^{-\lambda t(1-q)}dt=\int_0^x e^{-\lambda t p}dt$.

Ainsi $\sum_{r=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{e^{-\lambda t}(\lambda q t)^r}{r!} dt = \int_0^x e^{-\lambda p t} dt = \left[\frac{e^{-\lambda p t}}{-\lambda p}\right]_0^x = \frac{1}{\lambda p} - \frac{1}{\lambda p} e^{-\lambda p x}$.

Alors $F_S(x) = p\lambda \sum_{r=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{e^{-\lambda t}(\lambda q t)^r}{r!} dt = p\lambda \left[\frac{1}{\lambda p} - \frac{1}{\lambda p} e^{-\lambda p x}\right] = 1 - e^{-\lambda p x}$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ F_S(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda p x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

S suit la loi exponentielle de paramètre λp.

Ainsi $E(S) = \frac{1}{\lambda p} = \frac{1}{p} \frac{1}{\lambda} = E(N)\, E(X_1)$. $E(S) = E(N)\, E(X_1)$.

Remarque.. La loi de S sachant $\{N = r\}$ est la loi gamma de paramètres $\frac{1}{\lambda}$ et r donc $E(S \mid N = r) = \frac{r}{\lambda}$ et ceci pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

$E(N) = \sum_{r=1}^{+\infty} r\, P(N = r) = \frac{1}{p}$; $\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{r}{\lambda} P(N = r) = \frac{1}{\lambda p} = E(S)$.

Ainsi on a : $E(S) = \sum_{r=1}^{+\infty} E(S \mid N = r)\, P(N = r)$

Question 7 HEC 2008 S7 $\boxed{\text{F2}}$

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On considère n variable aléatoires à densité, de même loi que et indépendantes X_1, X_2, ..., X_n. On note F la fonction de répartition et f une densité des X_i.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $\big(Y_1(\omega), Y_2(\omega), \dots, Y_n(\omega)\big)$ la suite des $X_i(\omega)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ réordonnés par ordre croissant.

On a donc $Y_1(\omega) \leqslant Y_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant Y_n(\omega)$ pour tout ω de Ω.

Q1. Si $1 \leqslant k \leqslant n$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que $P(Y_k \leqslant x) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(x))^j \, (1 - F(x))^{n-j}$.

Q2. En déduire que Y_k admet une densité que l'on explicitera sans signe $\sum$.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1 Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons T_x le nombre de variables aléatoires X_i ayant des valeurs inférieures à x. $T_x \hookrightarrow \mathcal{B}(n, F(x))$.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Alors $P(Y_k \leqslant x) = P(T_x \geqslant k) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(x))^j (1-F(x))^{n-j}$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\underline{\underline{P(Y_k \leqslant x) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(x))^j (1-F(x))^{n-j}}}$.

Q2 Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Notons F_k la fonction de répartition de Y_k. $F_k = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F^j (1-F)^{n-j}$.

* F est continue sur $\mathbb{R}$ donc F_k est continue sur $\mathbb{R}$.
* f est continue sur $\mathbb{R} \setminus D$ où D est une partie finie de $\mathbb{R}$. Alors F est de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R} \setminus D$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus D$, $F'(x) = f(x)$.

Ainsi F_k est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus D$. Ceci achève de montrer que $\underline{\underline{Y_k \text{ est une variable aléatoire à densité}}}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus D$, $F'_k(x) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} j f(x) (F(x))^{j-1} (1-F(x))^{n-j} - \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(x))^j (n-j) f(x) (1-F(x))^{n-j-1}$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} j f(x) (F(x))^{j-1} (1-F(x))^{n-j} - \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(x))^j (n-j) f(x) (1-F(x))^{n-j-1}$

f_k est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_k sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Alors $\underline{\underline{f_k \text{ est une densité de } Y_k}}$ qu'il convient de simplifier.

Soit x dans $\mathbb{R}$. Effectuons le changement d'indice $j \leftarrow j-1$ dans la seconde somme.

R

ou n !

$$f_k(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} j f(x) (F(x))^{j-1} (1-F(x))^{n-j} - \sum_{j=k+1}^{n+1} \binom{n}{j-1} (F(x))^{j-1} (n-j+1) f(x) (1-F(x))^{n-j}$$

$$f_k(x) = \binom{n}{k} k f(x) (F(x))^{k-1} (1-F(x))^{n-k} + \sum_{j=k+1}^{n} f(x) F(x)^{j-1} (1-F(x))^{n-j} \underbrace{\left[j \binom{n}{j} - (n-j+1) \binom{n}{j-1} \right]}_{\alpha_j}$$

soit $j \in [\![k+1, n]\!]$.

$$\alpha_j = j \frac{n!}{j!(n-j)!} - (n-j+1) \frac{n!}{(n-j+1)!(j-1)!} = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} - \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} = 0.$$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = k \binom{n}{k} f(x) (F(x))^{k-1} (1-F(x))^{n-k}$.

Remarque.. Si la loi des X_i est uniforme sur $[0,1]$, Y_k suit une loi bêta de première espèce.

Question 9 **HEC 2008 S9** $\boxed{\textbf{F1}}$

U est une variable aléatoire définie sur un espace probablilsé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de loi uniforme sur $]0,1]$, et $q \in]0,1[$.

Déterminer la loi de la variable alétaoire $X = 1 + \left\lfloor \dfrac{\ln U}{\ln q} \right\rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}$. $P(X=k) = P\left(\left\lfloor \dfrac{\ln U}{\ln q} \right\rfloor = k-1\right) = P\left(k-1 \leqslant \dfrac{\ln U}{\ln q} < k\right)$

$P(X=k) \overset{\ln q<0}{=} P((k-1)\ln q \geqslant \ln U > k \ln q) = P(q^{k-1} \geqslant U > q^k) = P(q^k < U \leqslant q^{k-1})$

$P(X=k) = F_U(q^{k-1}) - F_U(q^k) = q^{k-1} - q^k = (1-q)q^{k-1}$.

F_U est la fonction de répartition de U — $F_U(x) = x$ si $x \in [0,1]$

<u>X suit la loi géométrique de paramètre $1-q$.</u>

R

R.

Question 10 **HEC 2009** $\boxed{\text{F 2}}$ M. DESSUGES

a et b sont deux réels strictement positifs. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ayant même loi, prenant leurs valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_n > x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{a}{x^b}.$$

Montrer que la suite de terme général $\dfrac{1}{n^{1/b}}\,\mathrm{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ converge en loi.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Notons F_n la fonction de répartition de $Y_n = \dfrac{1}{n^{1/b}}\,\mathrm{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Notons F la fonction de répartition des variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$. $F_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P(\mathrm{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leqslant n^{1/b}x)$

$F_n(x) = P(\{X_1 \leqslant n^{1/b}x\} \cap \ldots \cap \{X_n \leqslant n^{1/b}x\}) \underset{\substack{\uparrow \\ X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ sont indépendantes}}}{=} P(X_1 \leqslant n^{1/b}x)\cdots P(X_n \leqslant n^{1/b}x) = \left(F(n^{1/b}x)\right)^n.$

$\forall x\in\mathbb{R},\ F_n(x) = \left(F(n^{1/b}x)\right)^n.$

Notons que $1 - F(x) = P(X_1 > x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{x^b}$. Cherchons $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

1er cas.. $x\in\,]-\infty, 0[$. $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^{1/b}x) = -\infty$. $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n^{1/b}x) = 0$ car $\lim\limits_{z\to-\infty} F(z) = 0$.

$\exists n_0\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\in[\![n_0, +\infty[\![,\ 0 \leqslant F(n^{1/b}x) \leqslant \frac{1}{2}.$

Alors $\forall n\in[\![n_0, +\infty[\![,\ 0 \leqslant (F(n^{1/b}x))^n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$.

Par encadrement on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(F(n^{1/b}x)\right)^n = 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$.

2ème cas.. $x = 0$. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ F_n(x) = (F(0))^n$

Supposons que $F(0) = 1$. Alors $\forall x\in[0, +\infty[,\ F(x) = 1$.

Donc $\dfrac{a}{x^b} \underset{x\to+\infty}{\sim} P(X > x) = 1 - F(x)$ et $1 - F$ est nulle sur $[0, +\infty[$.

Donc $\dfrac{a}{x^b} \underset{x\to+\infty}{\sim} 0$ ou $0 \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{x^b}$. Alors $1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{0}{\frac{a}{x^b}} = 0$!!

Alors $0 \leq F(0) < 1$. Donc $\lim_{n\mapsto+\infty} F_n(x) = \lim_{n\mapsto+\infty} (F(0))^n = 0$. $\lim_{n\mapsto+\infty} F_n(x) = 0$.

3ème cas.. $x \in]0,+\infty[$.

$\lim_{n\mapsto+\infty} (n^{1/b}x) = +\infty$ donc $\lim_{n\mapsto+\infty} F(n^{1/b}x) = 1$. car $\lim_{z\mapsto+\infty} F(z) = 1$.

Alors $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in [\![n_1, +\infty[\![$, $F(n^{1/b}x) > 0$.

$\forall n \in [\![n_1, +\infty[\![$, $F_n(x) = (F(n^{1/b}x))^n = e^{n \ln F(n^{1/b}x)}$. $\lim_{n\mapsto+\infty}(n^{1/b}x) = +\infty$

$\lim_{n\mapsto+\infty} F(n^{1/b}x) = 1$ donc $n \ln F(n^{1/b}x) \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} n(F(n^{1/b}x)-1) \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} -n \dfrac{a}{(n^{1/b}x)^b} = -\dfrac{a}{x^b}$.

$1-F(z) \underset{z\mapsto+\infty}{\sim} \dfrac{a}{z^b}$

Alors $\lim_{n\mapsto+\infty} n \ln(F(n^{1/b}x)) = -\dfrac{a}{x^b}$.

Par continuité de la fonction exponentielle : $\lim_{n\mapsto+\infty} e^{n\ln(F(n^{1/b}x))} = e^{-\frac{a}{x^b}}$.

donc $\lim_{n\mapsto+\infty} F_n(x) = e^{-\frac{a}{x^b}}$

Finalement $\lim_{n\mapsto+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ e^{-\frac{a}{x^b}} & \text{si } x \in]0,+\infty[\end{cases}$

posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ e^{-\frac{a}{x^b}} & \text{si } x \in]0,+\infty[\end{cases}$.

Montrons que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

* $\lim_{x\mapsto-\infty} G(x) = 0$. $\lim_{x\mapsto+\infty} -\dfrac{a}{x^b} = 0$ donc $\lim_{x\mapsto+\infty} G(x) = 1$.

* Montrons que G est croissante sur $\mathbb{R}$.

Soient x et y deux réels tels que $x < y$.

1er cas.. $x < y \leq 0$. Alors $G(x) = G(y) = 0$ donc $G(x) \leq G(y)$.

2ème cas.. $x \leq 0 < y$. Alors $G(x) = 0 \leq e^{-\frac{a}{y^b}} = G(y)$; $G(x) \leq G(y)$.

3ème cas.- $0 < x < y$. Alors $0 < x^b < y^b$ car $b > 0$.

Donc $-\frac{1}{x^b} < -\frac{1}{y^b}$; $-\frac{a}{x^b} \overset{a>0}{<} -\frac{a}{y^b}$; $e^{-\frac{a}{x^b}} < e^{-\frac{a}{y^b}}$.

Alors $G(x) < G(y)$. Donc $G(x) \leq G(y)$.

Finalement $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x < y \Rightarrow G(x) \leq G(y)$. G est croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque.- La croissance de G sur $\mathbb{R}$ et les deux limites du premier point montrent que G est bien une application de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$... pour ceux qui en doutaient.

* $x \mapsto x^b$ est de classe C^1 et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
Alors $x \mapsto -\frac{a}{x^b}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition $x \mapsto e^{-\frac{a}{x^b}}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ car $x \mapsto e^x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Alors G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

G est nulle sur $]-\infty, 0]$ donc G est de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$.

Alors → G est de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points,
→ G est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ et continue à gauche en 0

De plus $\lim_{x \to 0^+} \frac{a}{x^b} = +\infty$ car $a > 0$ et $b > 0$ donc $\lim_{x \to 0^+} G(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{a}{x^b}} = 0 = G(0)$.

G est donc continue à droite en 0.
Alors G est continue en 0. Finalement G est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Ceci achève de montrer que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Ainsi la suite $\left(\frac{1}{n^{1/b}} \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité de fonction de répartition G.

R.

Question 11 **HEC 2009** $\boxed{\text{F 1}}$ M. ANGLADE

n appartient à $\mathbb{N}^*$. X_1, X_2, ..., X_n sont n variable aléatoires à densité indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant pour densité la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{-(x-a)} & \text{si } x \in [a, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ et $T_n = \mathrm{Min}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Calculer $E(M_n)$ et $E(T_n)$.

Déduire de M_n et T_n deux estimateurs sans biais et convergents de a. Quel est le meilleur ?

Posons $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $Y_k = X_k - a$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

Y_k est une variable aléatoire à densité et $g : x \mapsto \frac{1}{|1|} f\left(\frac{x-(-a)}{1}\right)$ en est une densité.

$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x+a) = \begin{cases} e^{-(x-(x+a))} & \text{si } x+a \in [a, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors Y_k suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Donc $E(Y_k)$ et $V(Y_k)$ existent et valent 1.

Comme $X_k = Y_k + a$, $E(X_k)$ (resp. $V(X_k)$) existe et vaut $a+1$ (resp. 1)

Alors $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ existe et vaut $E(\sum_{k=1}^{n} X_k)$ donc $\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$ c'est à dire $n(a+1)$.

Ainsi $\underline{\underline{E(M_n) \text{ existe et vaut } a+1.}}$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes et possèdent une variance qui vaut 1.

Alors $V(X_1 + \cdots + X_n)$ existe et vaut $V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$ donc n.

donc $\underline{\underline{V(M_n) \text{ existe et vaut } \frac{1}{n^2} \times n \text{ soit } \frac{1}{n}.}}$

Posons $U_n = T_n - a$. $U_n = \text{Min}(X_1, X_2, \ldots, X_n) - a = \text{Min}(X_1 - a, X_2 - a, \ldots, X_n - a)$.

Alors $U_n = \text{Min}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$. Soit F_n la fonction de répartition de U_n.

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}^+$ donc U_n prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_n(x) = 0$.

R.

Soit $x \in [0,+\infty[$, $F_n(x) = P(U_n \leq x) = P(\min(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \leq x)$.

$F_n(x) = 1 - P(\min(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) > x) = 1 - P(\{Y_1 > x\} \cap \{Y_2 > x\} \cap \dots \cap \{Y_n > x\})$.

Par indépendance de $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ (qui résulte de l'indépendance de $X_1, X_2, \dots, X_n$) il vient :

$F_n(x) = 1 - P(Y_1 > x)P(Y_2 > x)\dots P(Y_n > x) = 1 - (1 - P(Y_1 \leq x))(1 - P(Y_2 \leq x))\cdots(1 - P(Y_n \leq x))$.

$F_n(x) = 1 - (1 - (1 - e^{-x}))^n = 1 - e^{-nx}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 1 - e^{-nx} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors U_n suit la loi exponentielle

de paramètre n. Donc $E(U_n)$ existe et vaut $\frac{1}{n}$ et $V(U_n)$ existe et vaut $\frac{1}{n^2}$.

$T_n = U_n + a$. Donc $\underline{E(T_n) \text{ existe et vaut } a + \frac{1}{n} \text{ et } V(T_n) \text{ existe et vaut } \frac{1}{n^2}}$.

Posons $\widehat{M}_n = M_n - 1$. $E(\widehat{M}_n)$ existe et vaut $E(M_n) - 1$ donc a.

$V(\widehat{M}_n)$ existe et vaut $V(M_n)$ donc $\frac{1}{n}$.

$\lim_{n \to +\infty} V(\widehat{M}_n) = 0$

Alors $\underline{\widehat{M}_n \text{ est un estimateur sans biais et convergent de } a \text{ de risque quadratique } \frac{1}{n}}$.

Posons $\widehat{T}_n = T_n - \frac{1}{n}$. $E(\widehat{T}_n)$ existe et vaut $E(T_n) - \frac{1}{n}$ donc a.

$V(\widehat{T}_n)$ existe et vaut $V(T_n)$ donc $\frac{1}{n^2}$.

$\lim_{n \to +\infty} V(\widehat{T}_n) = 0$

Alors $\underline{\widehat{T}_n = T_n - \frac{1}{n} \text{ est un estimateur sans biais et convergent de } a \text{ de risque quadratique } \frac{1}{n^2}}$.

$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ donc $\underline{\widehat{T}_n = T_n - \frac{1}{n} \text{ est un meilleur estimateur de } a \text{ que } \widehat{M}_n = M_n - 1}$.

Question 1 **HEC 2010** $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon i.i.d. de la loi de X.

Q1. Déterminer une densité de $Y_k = -\operatorname{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_k)$, pour tout k dans $[\![1, n-1]\!]$.

Q2. En déduire $P(\{X_n \geqslant X_1\} \cap \cdots \cap (\{X_n \geqslant X_{n-1}\})$.

Q1 Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Y_k prend ses valeurs dans $[-1,0]$. Notons F_{Y_k} la fonction de répartition de Y_k. $\forall x \in]-\infty,-1[$, $F_{Y_k}(x) = 0$ et $\forall x \in [0,+\infty[$, $F_{Y_k}(x) = 1$.

Soit $x \in [-1,0[$. $F_{Y_k}(x) = P(-\max(X_1,\ldots,X_k) \leqslant x) = P(\max(X_1,\ldots,X_k) \geqslant -x)$

$F_{Y_k}(x) = 1 - P(\max(X_1,\ldots,X_k) < -x) = 1 - P(\{X_1 < -x\} \cap \ldots \cap \{X_k < -x\})$.

Or $X_1, X_2, \ldots, X_k$ sont indépendantes donc $F_{Y_k}(x) = 1 - P(X_1 < -x) \cdots P(X_k < -x)$.

Notons que $-x \in]0,1]$ donc $P(X_i < -x) = P(X_i \leqslant -x) = -x$ pour tout $i \in [\![1,k]\!]$.

$F_{Y_k}(x) = 1 - (-x)^k$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Y_k}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,-1[\\ 1-(-x)^k & \text{si } x \in [-1,0[\\ 1 & \text{si } x \in [0,+\infty[\end{cases}$$

Il est aisé de montrer que F_{Y_k} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$. Ainsi Y_k est une variable aléatoire à densité

$\forall x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$, $F'_{Y_k}(x) = 0$ et $\forall x \in]-1,0[$, $F'_{Y_k}(x) = k(-x)^{k-1}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{Y_k}(x) = \begin{cases} k(-x)^{k-1} & \text{si } x \in [-1,0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

f_{Y_k} est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_{Y_k} sur $\mathbb{R} - \{-1,0\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. f_{Y_k} est une densité de Y_k.

Q2 Notons α la probabilité demandée. $\alpha = P(X_n \geqslant \max(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}))$

$\alpha = P(X_n \geqslant -Y_{n-1}) = P(X_n + Y_{n-1} \geqslant 0)$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f est une densité de X_n.

1) X_n et Y_{n-1} sont deux variables aléatoires à densité. f est une densité de X_n et $f_{Y_{n-1}}$ une densité de Y_{n-1}.

2) $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes donc X_n et $Y_{n-1} = -\max(X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$ sont indépendantes

3) f est bornée.

Alors $X_n + Y_{n-1}$ est une variable aléatoire à densité et $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f_{Y_{n-1}}(x-t)\,dt$ en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

$\alpha = P(X_n + Y_{n-1} \geqslant 0) = \int_0^{+\infty} h(t)\,dt$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$h(x) = \int_0^1 1\, f_{Y_{n-1}}(x-t)\,dt \underset{u=x-t}{=} \int_{x-1}^{x} f_{Y_{n-1}}(u)\,du$

Si $x > 1$: $[x-1, x] \subset]0, +\infty[$ donc $h(x) = \int_{x-1}^{x} f_{Y_{n-1}}(u)\,du = \int_{x-1}^{x} 0\,du = 0$.

Si $0 \leq x \leq 1$: $h(x) = \int_{x-1}^{x} f_{Y_{n-1}}(u)\,du \underset{x-1 \in [-1,0]}{=} \int_{x-1}^{0} f_{Y_{n-1}}(u)\,du \underset{x-1 \in [-1,0]}{=} \int_{x-1}^{0} (n-1)(-t)^{n-2}\,dt$.

$$h(x) = (n-1)\left[-\frac{(-t)^{n-1}}{n-1}\right]_{x-1}^{0} = (1-x)^{n-1}.$$

Alors $\alpha = \int_0^{+\infty} h(t)\,dt = \int_0^1 (1-t)^{n-1}\,dt = \left[-\frac{(1-t)^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n}$.

$\underline{\underline{P(\{X_n \geqslant X_1\} \cap \{X_n \geqslant X_2\} \cap \dots \cap \{X_n \geqslant X_{n-1}\}) = \frac{1}{n}}}$; normal non ?

question de cours : Matrice inversible : définition et propriétés.

Question 4 HEC 2010 $\boxed{\text{F 2}}$

Q1. Montrer qu'il existe un réel c pour lequel la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{c}{1+x^2}$ est une densité de probabilité.

Q2. Une variable aléatoire réelle ayant une telle densité possède-t-elle une espérance ?

Q3. Montrer que si X est une variable aléatoire réelle de densité f, X et $\dfrac{1}{X}$ ont même loi.

Q1 * f est continue sur $\mathbb{R}$.

* f est positive sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $c \geqslant 0$.

* $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{A\to+\infty}(\operatorname{Arctan} A) = \frac{\pi}{2}$; $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$ existe et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

Par parité $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{dt}{1+t^2}$ existe et vaut $\dfrac{\pi}{2}$. Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$ existe et vaut π.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut $c\pi$. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1 \iff c = \frac{1}{\pi}$.

Comme $\dfrac{1}{\pi} \geqslant 0$ (!!), <u>f est une densité de probabilité si et seulement si $c = \dfrac{1}{\pi}$.</u>

Q2 $\forall A \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_0^A x f(x)\,dx = \int_0^A \frac{1}{\pi}\,\frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2\pi}\Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^A = \frac{\ln(1+A^2)}{2\pi}$.

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A x f(x)\,dx = +\infty$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x)\,dx$ diverge ; $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ également.

<u>X n'a pas d'espérance.</u>

Q3 Soit $x \in \mathbb{R}$.

<u>1er cas.</u> $x < 0$. $\left\{\frac{1}{X} \leqslant x\right\} = \{X < 0\} \cap \left\{\frac{1}{x} \leqslant X\right\} = \left\{\frac{1}{x} \leqslant X < 0\right\} = X^{-1}\left(\left[\frac{1}{x}, 0\right[\right)$

Alors 1) $\left\{\frac{1}{X} \leqslant x\right\} = X^{-1}\left(\left[\frac{1}{x}, 0\right[\right) \in \mathcal{A}$ car X est une variable aléatoire.

2) $P\left(\frac{1}{X} \leqslant x\right) = P\left(\frac{1}{x} \leqslant X < 0\right) = P(X<0) - P\left(X < \frac{1}{x}\right) = P(X \leqslant 0) - P\left(X \leqslant \frac{1}{x}\right)$.

<u>$P\left(\frac{1}{X} \leqslant x\right) = F_X(0) - F_X\left(\frac{1}{x}\right)$</u> ($F_X$ étant la fonction de répartition de X)

<u>2e cas.</u> $x = 0$ $\left\{\frac{1}{X} \leqslant x\right\} = \left\{\frac{1}{X} \leqslant 0\right\} = \{X \leqslant 0\} = X^{-1}(]-\infty, 0])$

1) $\left\{\frac{1}{X} \leqslant x\right\} = X^{-1}(]-\infty, 0]) \in \mathcal{A}$.

2) <u>$P\left(\frac{1}{X} \leqslant x\right) = P(X \leqslant 0) = F_X(0)$.</u>

3ᵉ cas. $x>0$ $\{\frac{1}{X}\leq x\} = \{X<0\} \cup (\{X>0\} \cap \{\frac{1}{x}\leq X\})$

$\{\frac{1}{X}\leq x\} = \{X<0\} \cup \{X\geq \frac{1}{x}\} = \underbrace{X^{-1}(]-\infty,0[)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{X^{-1}([\frac{1}{x},+\infty[)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$

1) $\{\frac{1}{X}\leq x\} \in \mathcal{A}$

2) $P(\frac{1}{X}\leq x) = P(X<0) + P(X\geq \frac{1}{x}) = P(X\leq 0) + 1 - P(X<\frac{1}{x}) = P(X\leq 0)+1-P(X\leq\frac{1}{x})$

$P(\frac{1}{X}\leq x) = F_X(0) + 1 - F_X(\frac{1}{x})$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{\frac{1}{X}\leq x\} \in \mathcal{A}$ donc $\frac{1}{X}$ est une variable aléatoire.

De plus $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{1/X}(x) = \begin{cases} F_X(0) - F_X(\frac{1}{x}) \text{ si } x\in]-\infty,0[\\ F_X(0) \text{ si } x=0 \\ F_X(0) + 1 - F_X(\frac{1}{x}) \text{ si } x \in]0,+\infty[\end{cases}$

$\forall z \in \mathbb{R}$, $F_X(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1/\pi}{1+t^2}\,dt = \lim_{A\to-\infty} \left[\frac{1}{\pi}\arctan t\right]_A^z = \lim_{A\to-\infty}\left[\frac{1}{\pi}\arctan z - \frac{1}{\pi}\arctan A\right]$.

$\forall z\in\mathbb{R}$, $F_X(z) = \frac{1}{\pi}\arctan z - \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan z + \frac{\pi}{2}\right)$. En particulier $F_X(0) = \frac{1}{2}$.

Rappelons que $\forall z \in \mathbb{R}^*$, $\arctan z + \arctan \frac{1}{z} = \begin{cases} \pi/2 \text{ si } z>0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } z<0 \end{cases}$ (*)

Soit x dans $\mathbb{R}$. Montrons que $F_{1/X}(x) = F_X(x)$.

C'est clair pour $x=0$.

Supposons $x>0$. $F_{1/X}(x) = F_X(0) + 1 - F_X(1/x) = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{x} - \frac{1}{2}$

$F_{1/X}(x) = 1 - \frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan x + \pi - \frac{\pi}{2}\right)$

$F_{1/X}(x) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right) = F_X(x)$.

Supposons $x<0$. $F_{1/X}(x) = F_X(0) - F_X(\frac{1}{x}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{1}{x} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)$

$F_{1/X}(x) = -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right) = F_X(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $F_{1/X}(x) = F_X(x)$. X et $1/X$ ont même loi.

Exercice.. Démontrer (*) (on pourra dériver).

Question 7 HEC 2010 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes et de même loi.

On suppose qu'il existe deux réels strictement positifs α et λ tels que $P(X_1 > x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{x^\lambda}$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Z_n = n^{-\frac{1}{\lambda}} \operatorname{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi

---

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Notons F_n la fonction de répartition de Z_n et F la fonction de répartition de X_1. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$F_n(x) = P(Z_n \leqslant x) = P(\operatorname{Max}(X_1,\dots,X_n) \leqslant n^{\frac{1}{\lambda}}x) = P(\{X_1 \leqslant n^{1/\lambda}x\}\cap\dots\cap\{X_n \leqslant n^{1/\lambda}x\})$

$F_n(x) = P(X_1 \leqslant n^{1/\lambda}x)\dots P(X_n \leqslant n^{1/\lambda}x)$ par indépendance.

$F_n(x) = \left(F(n^{1/\lambda}x)\right)^n = \left(1 - P(X_1 > n^{1/\lambda}x)\right)^n$

<u>1er cas</u>.. $x<0$. $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^{1/\lambda}x) = -\infty$. $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n^{1/\lambda}x) = 0$.

Alors $\exists n_0\in\mathbb{N}^*, \forall n\in[\![n_0,+\infty[\![,\ 0\leqslant F(n^{1/\lambda}x)\leqslant \frac{1}{2}$.

$\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![,\ 0\leqslant (F(n^{1/\lambda}x))^n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Par encadrement il vient : $\lim\limits_{n\to+\infty}(F(n^{1/\lambda}x))^n = 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$.

<u>2ème cas</u>.. $x=0$.

Supposons $F(0)=1$. Alors $\forall x\in[0,+\infty[,\ 1 = F(0)\leqslant F(x)\leqslant 1$.

$\forall x\in[0,+\infty[,\ F(x)=1$.

$\forall x\in[0,+\infty[,\ P(X_1>x) = 1-F(x) = 0$. Ceci contredit $P(X_1>x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{x^\lambda}$

Alors $F(0)\neq 1$. Ainsi $F(0)\in[0,1[$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(F(0))^n = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(0) = 0$.

<u>3ème cas</u>.. $x>0$ $F_n(x) = (1 - P(X_1 > n^{1/\lambda}x))^n$.

$P(X_1 > n^{1/\lambda}x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{(n^{1/\lambda}x)^\lambda} = \dfrac{\alpha}{n x^\lambda}$.

Ainsi En particulier $\lim_{n\mapsto+\infty} P(X_1 > n^{1/\lambda}x) = 0$.

Donc $\lim_{n\mapsto+\infty} (1 - P(X_1 > n^{1/\lambda}x)) = 1$.

Rag $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in [\![n_1, +\infty [\![$, $1 - P(X_1 > n^{1/\lambda}x) > 0$.

$n \ln(1 - P(X_1 > n^{1/\lambda}x)) \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} n \times (-P(X_1 > n^{1/\lambda}x)) \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} n\left(-\frac{\alpha}{nx^\lambda}\right) = -\frac{\alpha}{x^\lambda}$.

$\lim_{n\mapsto+\infty} e^{n\ln(1-P(X_1>n^{1/\lambda}x))} = e^{-\frac{\alpha}{x^\lambda}}$.

$\lim_{n\mapsto+\infty} (1 - P(X_1 > n^{1/\lambda}x))^n = e^{-\frac{\alpha}{x^\lambda}}$. $\lim_{n\mapsto+\infty} F_n(x) = e^{-\frac{\alpha}{x^\lambda}}$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\mapsto+\infty} F_n(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\alpha}{x^\lambda}} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\alpha}{x^\lambda}} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. montrons que G est la

fonction de répartition d'une variable aléatoire ... à densité.

$*$ $\lim_{x\mapsto-\infty} G(x) = 0$ car G est nulle sur $]-\infty, 0]$.

$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\alpha}{x^\lambda} = 0$ car $\lambda > 0$ donc $\lim_{x\mapsto+\infty} G(x) = 1$

$*$ Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Supposons $a < b$

1er cas.. $a < b \leq 0$. Alors $G(a) = 0 \leq 0 = G(b)$.

2e cas.. $a \leq 0 < b$. Alors $G(a) = 0 \leq e^{-\frac{\alpha}{b^\lambda}} = G(b)$

3e cas.. $0 < a < b$. $\frac{1}{b^\lambda} \leq \frac{1}{a^\lambda}$ car $\lambda > 0$. $-\frac{\alpha}{a^\lambda} \leq -\frac{\alpha}{b^\lambda}$ $(\alpha > 0)$.

Donc $G(a) = e^{-\alpha/a^\lambda} \leq e^{-\alpha/b^\lambda} = G(b)$.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b \Rightarrow G(a) \leq G(b)$. G est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. G est nulle sur $]-\infty, 0]$ donc G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$

$x \mapsto -\frac{\alpha}{x^\lambda}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Par composition G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Donc 1) G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (au moins) donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

2) G est continue à gauche en 0.

$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x^\lambda}\right) = +\infty$ donc $\lim_{x \to 0^+} G(x) = 0 = G(0)$. G est continue à droite en 0.

Finalement G est continue en 0.

G est continue sur $\mathbb{R}$. Ceci achève de montrer que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

<u>$(Z_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité de fonction de répartition G.</u>