R.

Question 2 HEC 2011 S 1152

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ i.i.d..

On suppose que, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, la variable alétoire X_k suit une loi uniforme sur le segment $[0,1]$.

On pose $Y_n = \text{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Étudier la convergence de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Cours *Théorème de d'Alembert-Gauss*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n.

Y_n prend ses valeurs dans $[0,1]$. Ainsi $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_{Y_n}(x) = 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $F_{Y_n}(x) = 1$.

Soit $x \in [0,1[$, $F_{Y_n}(x) = P(Y_n \leqslant x) = P(\text{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leqslant x)$.

$F_{Y_n}(x) = P(\{X_1 \leqslant x\} \cap \{X_2 \leqslant x\} \cap \ldots \cap \{X_n \leqslant x\}) = P(X_1 \leqslant x)\, P(X_2 \leqslant x) \ldots P(X_n \leqslant x)$.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes

Or $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(X_k \leqslant x) = x$ car $x \in [0,1[$ et X_k suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Donc $F_{Y_n}(x) = x^n$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ x^n & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$ et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors $$\forall x \in \mathbb{R},\quad \lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

Donc $$\forall x \in \mathbb{R},\quad \lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}.$$

Soit Y la variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ constante égale à 1. Soit F_Y sa fonction répartition. $$\forall x \in \mathbb{R},\quad F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}.$$

Si $x \in \mathbb{R}$, F_Y est continue en x si et seulement si $x \neq 1$.

De plus $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = F_Y(x)$.

Alors <u>$(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers Y c'est à dire vers la variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ constante et égale à 1.</u>

Question 6 HEC 2011 S 1175

On considère une suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes une loi uniforme sur le segment $[0, \theta]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = \text{Max}(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

Q1. Prouver que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers θ.

Q2. Étudier la convergence en loi de $Y_n = n\,(\theta - X_n)$.

Question de cours : Caractériser les isomorphismes d'espaces vectoriels de dimensions finies.

Q1 Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$P(|X_n-\theta|\geqslant \varepsilon) = P(X_n-\theta \geqslant \varepsilon) + P(X_n-\theta \leqslant -\varepsilon) = P(X_n \geqslant \theta+\varepsilon) + P(X_n \leqslant \theta-\varepsilon)$

X_n prend ses valeurs dans $[0,\theta]$ donc $P(X_n \geqslant \theta+\varepsilon)=0$.

$P(X_n \leqslant \theta-\varepsilon) = P(\text{Max}(U_1,U_2,\ldots,U_n) \leqslant \theta-\varepsilon) = P(\{U_1\leqslant \theta-\varepsilon\}\cap\{U_2\leqslant\theta-\varepsilon\}\cap\ldots\cap\{U_n\leqslant\theta-\varepsilon\})$

Par indépendance on obtient : $P(X_n\leqslant\theta-\varepsilon) = P(U_1\leqslant\theta-\varepsilon)\,P(U_2\leqslant\theta-\varepsilon)\ldots P(U_n\leqslant\theta-\varepsilon)$.

$U_1, U_2, \ldots, U_n$ ayant même loi il vient : $P(X_n\leqslant\theta-\varepsilon) = \left(P(U_1\leqslant\theta-\varepsilon)\right)^n$.

$P(|X_n-\theta|\geqslant\varepsilon) = \left(P(U_1\leqslant\theta-\varepsilon)\right)^n$.

1er cas.. $\theta-\varepsilon<0$. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P(|X_n-\theta|\geqslant\varepsilon) = 0^n = 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n-\theta|\geqslant\varepsilon)=0$!

2ème cas.. $\theta-\varepsilon\geqslant 0$. Alors $\theta-\varepsilon\in[0,\theta]$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P(|X_n-\theta|\geqslant\varepsilon) = \left(P(U_1\leqslant\theta-\varepsilon)\right)^n = \left(\dfrac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n = \left(1-\dfrac{\varepsilon}{\theta}\right)^n$

Or $1-\dfrac{\varepsilon}{\theta}\in[0,1[$ (car $0<\dfrac{\varepsilon}{\theta}\leqslant 1$) donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{\varepsilon}{\theta}\right)^n=0$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n-\theta|\geqslant\varepsilon)=0$

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n-\theta|\geqslant\varepsilon)=0$. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à θ.

Q2 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Notons F_n la fonction de répartition de Y_n.

Y_n prend ses valeurs dans $[0, n\theta]$. Alors $\forall x\in]-\infty,0[,\ F_n(x)=0$ et $\forall x\in[n\theta,+\infty[,\ F_n(x)=1$.

R

Soit $x \in [0, n\theta[$. $F_n(x) = P(Y_n \leq x) = P(n(\theta - X_n) \leq x) = P(\theta - X_n \leq \frac{x}{n}) = P(\theta - \frac{x}{n} \leq X_n)$.

$F_n(x) = 1 - P(X_n < \theta - \frac{x}{n}) = 1 - P(\{U_1 < \theta - \frac{x}{n}\} \cap \{U_2 < \theta - \frac{x}{n}\} \cap \dots \cap \{U_n < \theta - \frac{x}{n}\})$.

Par indépendance de $U_1, U_2, \dots, U_n$ il vient : $F_n(x) = 1 - P(U_1 < \theta - \frac{x}{n}) P(U_2 < \theta - \frac{x}{n}) \dots P(U_n < \theta - \frac{x}{n})$.

Or $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $U_k \hookrightarrow \mathcal{U}([0,\theta])$ donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(U_k < \theta - \frac{x}{n}) = P(U_k \leq \theta - \frac{x}{n}) = \dfrac{\theta - \frac{x}{n} - 0}{\theta - 0} = 1 - \frac{x}{n\theta}$

Alors $F_n(x) = 1 - (1 - \frac{x}{n\theta})^n$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - (1 - \frac{x}{n\theta})^n & \text{si } x \in [0, n\theta[\\ 1 & \text{si } x \in [n\theta, +\infty[. \end{cases}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(0) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(0) = 0$.

Soit $x \in]0, +\infty[$. Posons $n_0 = \text{Ent}(\frac{x}{\theta}) + 1$. $n_0 > \frac{x}{\theta}$; $x < n_0\theta$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $n \geq n_0$! $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $n\theta \geq n_0\theta > x$.

Alors $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $F_n(x) = 1 - (1 - \frac{x}{n\theta})^n = 1 - e^{n \ln(1 - \frac{x}{n\theta})}$.
$\uparrow$ $1 - \frac{x}{n\theta} > 0$

$n \ln(1 - \frac{x}{n\theta}) \underset{n \to +\infty}{\sim} n(-\frac{x}{n\theta}) = -\frac{x}{\theta}$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (n \ln(1 - \frac{x}{n\theta})) = -\frac{x}{\theta}$. Par continuité de la fonction exponentielle en $-\frac{x}{\theta}$ il vient $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{n \ln(1 - \frac{x}{n\theta})} = e^{-\frac{x}{\theta}}$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\\ 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 - e^{-x/\theta} \end{cases}$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - e^{-x/\theta} \text{ si } x \in \underline{\underline{[}}0, +\infty[\end{cases}$

Ainsi $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$.

R.

Question 11 **S 113** On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant chacune la loi exponentielle de paramètre 1.

Q1 Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

a) Quelle est la loi de S_n ?

b) Quelle est la limite, quand n tend vers l'infini, de la probabilité $P(S_n \geqslant n + \sqrt{n})$?

Q2. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire N_n sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante des X_k et dont la loi est donnée par :

$N_n(\Omega) = \{n, n+1\}$ et $P(N_n = n) = P(N_n = n+1) = \dfrac{1}{2}$.

a) $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver l'espérance et la variance de la variable aléatoire T_n définie par : $\forall \omega \in \Omega,\ T_n(\omega) = S_{N_n(\omega)}$.

b) Quelle est la limite, quand n tend vers l'infini, de la probabilité $P(T_n \geqslant n + \sqrt{n})$?

Cours *Rappeler la définition du rang d'une matrice. Une matrice carrée et sa transposée ont-elles nécessairement le même rang ?*

Q1 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ ou $X_k \hookrightarrow \Gamma(1,1)$ ou $X_k \hookrightarrow \gamma(1)$.

Le cours montre alors que : $X_1 + X_2 + \dots + X_n \hookrightarrow \Gamma(1,n)$ ou $X_1 + X_2 + \dots + X_n \hookrightarrow \gamma(n)$.

Donc S_n suit la loi gamma de paramètres 1 et n ou la loi gamma de paramètre n.

b) $(X_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, ayant même loi, d'espérance 1 et de variance 1.

Le théorème de la limite centrée montre alors que $\left(\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Soit ϕ la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \leq x\right) = \phi(x)$. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \underset{\substack{\uparrow \\ S_n \hookrightarrow \Gamma(1,n)}}{=} \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 1\right) = \phi(1)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n \leq n + \sqrt{n}) = \phi(1)$.

$$\lim_{n\to+\infty} P(S_n \geq n+\sqrt{n}) = \lim_{n\to+\infty} P(S_n > n+\sqrt{n}) = \lim_{n\to+\infty} (1 - P(S_n \leq n+\sqrt{n})) = 1-\phi(1)$$

S_n est à densité.

$$\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} P(S_n \geq n+\sqrt{n}) = 1-\phi(1) = \phi(-1) \simeq 0{,}1507}}$$

(Q2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F_{T_n} la fonction de répartition de T_n. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$(\{N_n = n\}, \{N_n = n+1\})$ est un système complet d'événements

Alors $P(T_n \leq x) = P(\{T_n \leq x\} \cap \{N_n = n\}) + P(\{T_n \leq x\} \cap \{N_n = n+1\})$

$P(T_n \leq x) = P(\{S_n \leq x\} \cap \{N_n = n\}) + P(\{S_{n+1} \leq x\} \cap \{N_n = n+1\})$.

$X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$ et N_n sont indépendantes donc S_n et N_n (resp. S_{n+1} et N_n) sont indépendantes.

Alors $F_{T_n}(x) = P(T_n \leq x) = P(S_n \leq x)\, P(N_n = n) + P(S_{n+1} \leq x)\, P(N_n = n+1)$.

$$F_{T_n}(x) = \frac{1}{2}\left[P(S_n \leq x) + P(S_{n+1} \leq x)\right].$$

Notons F_n et F_{n+1} les fonctions de répartitions de S_n et S_{n+1}.

$$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{T_n}(x) = \frac{1}{2}\left[F_{S_n}(x) + F_{S_{n+1}}(x)\right].}}$$

F_{S_n} et $F_{S_{n+1}}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc $\underline{\underline{F_{T_n} \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}}$

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{S_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x} x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{S_{n+1}}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x} x^{n}}{n!} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

f_{S_n} (resp. $f_{S_{n+1}}$) est une densité continue sur $\mathbb{R}^*$ de S_n (resp. S_{n+1}). Alors F_{S_n} (resp. $F_{S_{n+1}}$) est au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

De plus $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F'_{S_n}(x) = f_{S_n}(x)$ et $F'_{S_{n+1}}(x) = f_{S_{n+1}}(x)$.

$F_{T_n} = \frac{1}{2}\left[F_{S_n} + F_{S_{n+1}} \right]$.

Alors F_{T_n} est au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

ceci achève de montrer que T_n est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F'_{T_n}(x) = \frac{1}{2}\left(F'_{S_n}(x) + F'_{S_{n+1}}(x) \right) = \frac{1}{2}\left(f_{S_n}(x) + f_{S_{n+1}}(x) \right)$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_{T_n}(x) = \frac{1}{2}\left(f_{S_n}(x) + f_{S_{n+1}}(x) \right)$.

g_{T_n} est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_{T_n} sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Alors g_{T_n} est une densité de T_n.

$E(S_n)$ (resp. $E(S_{n+1})$) existe et vaut n (resp. $n+1$).

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{S_n}(t)\,dt$ (resp. $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{S_{n+1}}(t)\,dt$) converge et vaut n (resp. $n+1$).

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t\left(\frac{1}{2}\left(f_{S_n}(t) + f_{S_{n+1}}(t) \right) \right) dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}(n+(n+1))$.

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t\, g_{T_n}(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{2n+1}{2}$.

$E(T_n)$ existe et vaut $\frac{2n+1}{2}$.

S_n et S_{n+1} possèdent un moment d'ordre 2 donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{S_n}(t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{S_{n+1}}(t)\,dt$ convergent.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\left(\frac{1}{2}\left(f_{S_n}(t) + f_{S_{n+1}}(t) \right) \right) dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{S_n}(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{S_{n+1}}(t)\,dt$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g_{T_n}(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}\left(E(S_n^2) + E(S_{n+1}^2) \right)$.

R.

Alors T_n possède un moment d'ordre 2 qui vaut $\frac{1}{2}\left[E(S_n^2)+E(S_{n+1}^2)\right]$

Ainsi T_n possède une variance.

$$V(T_n)=E(T_n^2)-(E(T_n))^2=\frac{1}{2}\left[E(S_n^2)+E(S_{n+1}^2)\right]-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$$

$$V(T_n)=\frac{1}{2}\left[V(S_n)+(E(S_n))^2+V(S_{n+1})+(E(S_{n+1}))^2\right]-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2.$$

$$V(T_n)=\frac{1}{2}\left[n+n^2+(n+1)+(n+1)^2\right]-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$$

$$V(T_n)=\frac{1}{2}(n+1)(n+1+(n+1))-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2=(n+1)^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2=\left(n+1+n+\frac{1}{2}\right)\left(n+1-n-\frac{1}{2}\right).$$

$$V(T_n)=(2n+3/2)(1/2)=n+\frac{3}{4}.$$

$$V(T_n)=n+\frac{3}{4}.$$

T_n est une variable aléatoire à densité.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $P(T_n\geq n+\sqrt{n})=1-P(T_n<n+\sqrt{n})=1-P(T_n\leq n+\sqrt{n})$

$$P(T_n\geq n+\sqrt{n})=1-F_{T_n}(n+\sqrt{n})=1-\frac{1}{2}\left[F_{S_n}(n+\sqrt{n})+F_{S_{n+1}}(n+\sqrt{n})\right]$$

$$P(T_n\geq n+\sqrt{n})=1-\frac{1}{2}P(S_n\leq n+\sqrt{n})-\frac{1}{2}P(S_{n+1}\leq n+\sqrt{n}).$$

$$P(T_n\geq n+\sqrt{n})=1-\frac{1}{2}P(S_n^*\leq 1)-\frac{1}{2}P\left(S_{n+1}^*\leq\frac{n+\sqrt{n}-(n+1)}{\sqrt{n+1}}\right)=1-\frac{1}{2}P(S_n^*\leq 1)-\frac{1}{2}P\left(S_{n+1}^*\leq\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$\begin{cases} S_n^*=\dfrac{S_n-n}{\sqrt{n}}\\ S_{n+1}^*=\dfrac{S_{n+1}-(n+1)}{\sqrt{n+1}}\end{cases}$$

Rappelons que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}P(S_n^*\leq x)=\lim\limits_{n\to+\infty}P(S_{n+1}^*\leq x)=\Phi(x)$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}P(S_n^*\leq 1)=\Phi(1)$. Ne reste plus qu'à trouver $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left(S_{n+1}^*\leq\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

Notons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}=1$ car $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=1$ ... et que $\lim\limits_{n\to+\infty}P(S_{n+1}^*\leq 1)=\Phi(1)$

Montrons alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(S^*_{n+1} \le \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right) = \phi(1)$ en utilisant la définition.

<u>Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$.</u> Montrons qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $n\geqslant n_0 \Rightarrow \left|P\left(S^*_{n+1}\le \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right)-\phi(1)\right|<\varepsilon$.

ϕ est continue en 1 donc $\exists \eta\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $|x-1|<\eta \Rightarrow |\phi(x)-\phi(1)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $\alpha=\frac{\eta}{2}$. $1-\alpha\in\mathbb{R}$ et $|(1-\alpha)-1| = |\alpha| \underset{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}{=} \alpha<\eta$. Alors $|\phi(1-\alpha)-\phi(1)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Donc $-\frac{\varepsilon}{2}<\phi(1-\alpha)-\phi(1)<\frac{\varepsilon}{2}$. Nous retiendrons que $\underline{-\frac{\varepsilon}{2}+\phi(1) \overset{\boxed{(1)}}{<} \phi(1-\alpha)}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Notons que $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\leqslant 1$ $\left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\le\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\le 1\right)$.

Alors $\left\{S^*_{n+1}\le\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right\}\subset\{S^*_{n+1}\leqslant 1\}$ donc $P\left(S^*_{n+1}\le\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right)\le P(S^*_{n+1}\leqslant 1)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right)=1$ donc $\exists n_1\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $n\geqslant n_1\Rightarrow \left|\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}-1\right|<\alpha$ car $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$.

Alors $\forall n\in[\![n_1,+\infty[\![$, $1-\alpha<\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}<1+\alpha$.

Donc $\forall n\in[\![n_1,+\infty[\![$, $\{S^*_{n+1}\leqslant 1-\alpha\}\subset\left\{S^*_{n+1}\le\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right\}$ et $P(S^*_{n+1}\leqslant 1-\alpha)\le P\left(S^*_{n+1}\le\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

<u>Ainsi $\forall n\in[\![n_1,+\infty[\![$, $P(S^*_{n+1}\leqslant 1-\alpha)\leqslant P\left(S^*_{n+1}\le\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right)\leqslant P(S^*_{n+1}\leqslant 1)$.</u> $\boxed{(2)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(S^*_{n+1}\leqslant 1-\alpha)=\phi(1-\alpha)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S^*_{n+1}\leqslant 1)=\phi(1)$.

Alors $\exists n_2\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $n\geqslant n_2 \Rightarrow |P(S^*_{n+1}\leqslant 1-\alpha)-\phi(1-\alpha)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

$\exists n_3\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $n\geqslant n_3 \Rightarrow |P(S^*_{n+1}\leqslant 1)-\phi(1)|<\varepsilon$.

Alors :

<u>$\forall n\in[\![n_2,+\infty[\![$, $\phi(1-\alpha)-\frac{\varepsilon}{2}\overset{\boxed{(3)}}{<}P(S^*_{n+1}\leqslant 1-\alpha)$</u> et <u>$\forall n\in[\![n_3,+\infty[\![$, $P(S^*_{n+1}\leqslant 1)\overset{\boxed{(4)}}{<}\phi(1)+\varepsilon$</u>

Posons $n_0=\max(n_1,n_2,n_3)$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n\geqslant n_0$.

$$\phi(1)-\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2}+\phi(1)-\frac{\varepsilon}{2} \underset{(1)}{<} \phi(1-\alpha)-\frac{\varepsilon}{2} \underset{(3)}{<} P(S^*_{n+1}\leqslant 1-\alpha) \underset{(2)}{\leqslant} P\left(S^*_{n+1}\le\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right) \underset{(2)}{\leqslant} P(S^*_{n+1}\leqslant 1) \underset{(4)}{<} \phi(1)+\varepsilon$$

Donc $\phi(1)-\varepsilon < P\left(S^*_{n+1}\le\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right)<\phi(1)+\varepsilon$ ou $\left|P\left(S^*_{n+1}\le\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right)-\phi(1)\right|<\varepsilon$.

R.

Nous avons donc prouvé que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant n_0 \Rightarrow \left|P\left(S_{n+1}^* \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right) - \phi(1)\right| < \varepsilon$.

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(S_{n+1}^* \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right) = \phi(1)$ ▲

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n \geqslant n+\sqrt{n}) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}P(S_n^* \leqslant 1) - \frac{1}{2}P\left(S_{n+1}^* \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right)\right) = 1-\frac{1}{2}\phi(1)-\frac{1}{2}\phi(1)$.

$$\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} P(T_n \geqslant n+\sqrt{n}) = 1-\phi(1) = \phi(-1).}}$$

▲ On retrouve ce type de preuve dans HEC^{V} 2001 III Q 6 ou dans HEC $^{\text{n}II}$ 2011 Q13

R

Serie 2

Question 2 **HEC 2011** Obtenu par M. CARRIERE

X est une variable aléatoire dont la fonction de répartition est définie par :

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x-a)} & \text{si } x \in]a, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

$(X_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes ayant même loi que X.

Donner la loi de $n\left(\underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\text{Min}} X_k - a\right)$.

Cours *Inégalité de Taylor-Lagrange.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F_n la fonction de répartition de $n(\underset{1\leq k\leq n}{\text{Min}} X_k - a)$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$F_n(x) = P(\underset{1\leq k\leq n}{\text{Min}} X_k \leq \frac{x}{n} + a) = 1 - P(\underset{1\leq k\leq n}{\text{Min}} X_k > \frac{x}{n} + a)$.

$F_n(x) = 1 - P(\{X_1 > \frac{x}{n} + a\} \cap \dots \cap \{X_n > \frac{x}{n} + a\})$. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et ont même loi que X donc $F_n(x) = 1 - \prod_{k=1}^{n} P(X_k > \frac{x}{n} + a) = 1 - (P(X > \frac{x}{n} + a))^n$.

$F_n(x) = 1 - (1 - F_X(\frac{x}{n} + a))^n$.

<u>1er cas..</u> $x \in]-\infty, 0]$. Alors $\frac{x}{n} + a \in]-\infty, a]$. $F_X(\frac{x}{n} + a) = 0$.

donc $F_n(x) = 1 - 1^n = 0$.

<u>2ème cas..</u> $x \in]0, +\infty[$. Alors $\frac{x}{n} + a \in]a, +\infty[$. $F_X(\frac{x}{n} + a) = 1 - e^{-(\frac{x}{n} + a - a)} = 1 - e^{-\frac{x}{n}}$

$F_n(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n = 1 - (1 - (1 - e^{-\frac{x}{n}}))^n = 1 - (e^{-\frac{x}{n}})^n = 1 - e^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

Alors $n(\underset{1\leq k\leq n}{\text{Min}} X_k - a)$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.

R

Série 2

Question 5 **HEC 2011** G. FOUBART $\boxed{\text{F}}$

Q1. X suit la loi normale centrée réduite. Montrer que $Z = e^X$ est une variable aléatoire à densité et en donner une denité f_Z.

Q2. a est un élément de $[-1,1]$. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = \begin{cases} (1 + a\sin(2\pi \ln x))\, f_Z(x) & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que f_a est une densité de probabilité.

Plus une question non lue.

Je propose : T est une variable aléatoire à densité de densité f_a. Existence et valeur éventuelle de $E(T)$.

Question de cours : Comparaison des séries à termes positifs.

Q1 X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrons que Z est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- Z est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

1er cas.. $x \in]-\infty, 0]$. $Z^{-1}(]-\infty,x]) = \{\omega\in\Omega \mid e^{X(\omega)} \leq x\} = \emptyset \in \mathcal{A}$

2ème cas.. $x \in]0,+\infty[$. $Z^{-1}(]-\infty,x]) = \{\omega\in\Omega \mid e^{X(\omega)} \leq x\} = \{\omega\in\Omega \mid X(\omega) \leq \ln x\}$

$Z^{-1}(]-\infty,x]) = X^{-1}(]-\infty, \ln x]) \in \mathcal{A}$

↑ X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

donc $\forall x\in\mathbb{R},\ Z^{-1}(]-\infty,x]) \in \mathcal{A}$.

Ceci achève de montrer que <u>Z est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.</u>

Notons F_Z la fonction de répartition de Z et Φ celle de X.

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_Z(x) = P(Z^{-1}(]-\infty,x])) = P(\emptyset) = 0$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $F_Z(x) = P(Z^{-1}(]-\infty,x])) = P(X^{-1}(]-\infty, \ln x])) = \Phi(\ln x)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \begin{cases} \Phi(\ln x) & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{si } x \in [0,+\infty[\end{cases}$

Rappelons que Φ est de classe C^1 et que $\forall x\in\mathbb{R},\ \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Nous posons $\varphi = \Phi'$.

$x \mapsto \ln x$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. Alors par composition $x \mapsto \Phi(\ln x)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. Ainsi F_Z est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

Comme F_Z est nulle sur $]-\infty,0]$, F_Z est de classe C^1 sur $]-\infty,0]$.

R

Dans ces conditions 1) F_2 est de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}-\{0\}$

2) F_2 est continue à gauche en 0.

Notons que F_2 est continue à droite en 0.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to -\infty} \phi(t) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \phi(\ln x) = 0$.

Alors $\lim\limits_{x\to 0^+} F_2(x) = 0 = F_2(0)$; F_2 est continue à droite en 0.

F_2 est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.

Alors <u>Z est une variable aléatoire à densité</u>.

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_2'(x) = 0$ et $\forall x \in]0,+\infty[,\ F_2'(x) = \frac{1}{x}\phi'(\ln x) = \frac{1}{x}\varphi(\ln x)$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\varphi(\ln x) & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f_2 est positive sur son domaine

de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec F_2' sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble

fini de points. <u>f_2 est une densité de Z.</u>

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x)^2/2} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(Q2) • $x \mapsto 2\pi \ln x$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $\sin$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par composition

$x \mapsto \sin(2\pi \ln x)$ est continue sur $]0,+\infty[$. $x \mapsto 1+\sin(2\pi \ln x)$ également.

f_2 coïncide avec F_2' sur $]0,+\infty[$ et F_2 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$

Alors f_2 est continue sur $]0,+\infty[$.

Par produit f_a est continue sur $]0,+\infty[$.

f_a est nulle sur $]-\infty,0]$ donc f_a est continue sur $]-\infty,0]$.

Alors f_a est au moins continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de

points.

R

- $\bullet$ - $\forall x \in]-\infty, 0]$, $f_a(x) = 0$ donc $f_a(x) \geq 0$
  - Soit $x \in]0, +\infty[$. $|a \sin(2\pi \ln x)| = |a| |\sin(2\pi \ln x)| \leq |a| \leq 1$.

    Alors $-1 \leq a \sin(2\pi \ln x) \leq 1$; $1 + a \sin(2\pi \ln x) \geq 0$. Comme $f_2(x) \geq 0$:

    $f_a(x) = (1 + a \sin(2\pi \ln x)) f_2(x) \geq 0$.

Finalement $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) \geq 0}}$.

- $\bullet$ → f_a est nulle sur $]-\infty, 0]$ donc $\int_{-\infty}^{0} f_a(x)dx$ existe et vaut 0.
  - → $\forall x \in]0, +\infty[$, $0 \leq f_a(x) = \underbrace{(1 + a \sin(2\pi \ln x))}_{0 \leq 1 + a\sin(2\pi\ln x) \leq 1 + |a||\sin(2\pi \ln x)| \leq 1 + |a| \leq 2} f_2(x) \leq 2 f_2(x)$

    De plus $\int_0^{+\infty} 2 f_2(x) dx$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\int_0^{+\infty} f_a(x) dx$ converge.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. $x \mapsto \ln x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$; ceci justifie le changement de variable $u = \ln x$ dans ce qui suit.

$$\int_\varepsilon^A f_a(x)dx = \int_\varepsilon^A (1 + a \sin(2\pi \ln x)) \frac{1}{x} \varphi(\ln x) dx \underset{\substack{u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x}}}{=} \int_{\ln \varepsilon}^{\ln A} (1 + a \sin(2\pi u)) \varphi(u) du.$$

$$\int_\varepsilon^A f_a(x) dx = \int_{\ln \varepsilon}^{\ln A} \varphi(u) du + a \int_{\ln \varepsilon}^{\ln A} \sin(2\pi u) \varphi(u) du.$$

1) $\int_0^{+\infty} f_a(x) dx$ converge.

2) $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln \varepsilon = -\infty$ et $\lim_{A \to +\infty} \ln A = +\infty$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) du$ converge et vaut 1.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi u) \varphi(u) du$ converge et $\int_0^{+\infty} f_a(x) dx = 1 + a \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi u) \varphi(u) du$.

En toute rigueur il faudrait supposer $a \neq 0$, mais si $a = 0$ ...

R

$u \mapsto \sin(2\pi u)$ est impaire sur $\mathbb{R}$ et φ est paire sur $\mathbb{R}$. Donc $u \mapsto \sin(2\pi u)\varphi(u)$ est impaire sur $\mathbb{R}$. L'intégrale convergente $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi u)\varphi(u)\,du$ vaut alors 0.

Donc $\int_0^{+\infty} f_a(x)\,dx = 1$. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)\,dx = 1$.

Ceci achève de montrer que <u>f_a est une densité de probabilité.</u>

Soit T une variable aléatoire à densité de densité f_a. Montrons que $E(T)$ existe.

- $\int_{-\infty}^{0} x f_a(x)\,dx$ existe et vaut 0.
- Montrons que $\int_0^1 x f_a(x)\,dx$ et $\int_1^{+\infty} x f_a(x)\,dx$ converge.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\int_1^A x f_a(x)\,dx = \int_1^A x\,(1 + a\sin(2\pi \ln x))\,\varphi(\ln x)\,\frac{1}{x}\,dx \underset{u=\ln x}{=} \int_0^{\ln A} e^u (1 + a\sin(2\pi u))\,\varphi(u)\,du$$

$$\int_1^A x f_a(x)\,dx = \int_0^{\ln A} (1 + a\sin(2\pi u))\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{u^2}{2}+u}\,du$$

$$\int_1^A x f_a(x)\,dx = \int_0^{\ln A} (1 + a\sin(2\pi u))\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(u-1)^2}{2}}\,e^{1/2}\,du$$

$$\int_1^A x f_a(x)\,dx \underset{v=u-1}{=} \int_{-1}^{\ln A - 1} (1 + a\underbrace{\sin(2\pi(v+1))}_{\sin(2\pi v)})\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{v^2}{2}}\,e^{1/2}\,dv$$

$$\int_1^A x f_a(x)\,dx = e^{1/2}\int_{-1}^{\ln A - 1} (1 + a\sin(2\pi v))\,\varphi(v)\,dv$$

$$\int_1^A x f_a(x)\,dx \overset{①}{=} e^{1/2}\int_{-1}^{\ln A - 1} \varphi(v)\,dv + e^{1/2} a\int_{-1}^{\ln A - 1} \sin(2\pi v)\,\varphi(v)\,dv \quad \boxed{\text{ET}}$$

$$\int_A^1 x f_a(x)\,dx \overset{②}{=} e^{1/2}\int_{\ln A - 1}^{-1} \varphi(v)\,dv + a e^{1/2}\int_{\ln A - 1}^{-1} \sin(2\pi v)\,\varphi(v)\,dv$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v)\,dv$ converge et vaut 1.

$\forall v \in \mathbb{R}$, $0 \leq |\sin(2\pi v)\,\varphi(v)| = |\sin(2\pi v)|\,|\varphi(v)| \leq |\varphi(v)| = \varphi(v)$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent (en deux temps ...) la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} |\sin(2\pi v)\,\varphi(v)|\,dv$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi v)\,\varphi(v)\,dv$ est absolument convergente donc convergente.

De plus $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi v)\,\varphi(v)\,dv = 0$ car $v \mapsto \sin(2\pi v)\,\varphi(v)$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

$\lim_{A \to +\infty} (\ln A - 1) = +\infty$ et $\lim_{A \to 0^+} (\ln A - 1) = -\infty$.

① donne alors $\lim_{A \to +\infty} \int_1^A x f_a(x)\,dx = e^{1/2} \int_{-1}^{+\infty} \varphi(v)\,dv + a e^{1/2} \int_{-1}^{+\infty} \sin(2\pi v)\,\varphi(v)\,dv$.

Donc $\int_1^{+\infty} x f_a(x)\,dx$ existe et vaut $e^{1/2} \int_{-1}^{+\infty} \varphi(v)\,dv + a e^{1/2} \int_{-1}^{+\infty} \sin(2\pi v)\,\varphi(v)\,dv$

② donne alors $\lim_{A \to 0^+} \int_A^1 x f_a(x)\,dx = e^{1/2} \int_{-\infty}^{-1} \varphi(v)\,dv + a e^{1/2} \int_{-\infty}^{-1} \sin(2\pi v)\,\varphi(v)\,dv$.

Donc $\int_0^1 x f_a(x)\,dx$ existe et vaut $e^{1/2} \int_{-\infty}^{-1} \varphi(v)\,dv + a e^{1/2} \int_{-\infty}^{-1} \sin(2\pi v)\,\varphi(v)\,dv$.

Alors $\int_0^{+\infty} x f_a(x)\,dx$ converge et vaut $e^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v)\,dv + a e^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi v)\,\varphi(v)\,dv$

Donc $\int_0^{+\infty} x f_a(x)\,dx$ converge et vaut $e^{1/2} \times 1 + a e^{1/2} \times 0$ donc $e^{1/2}$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_a(x)\,dx$ converge et vaut $e^{1/2}$.

<u>T possède une espérance qui vaut $e^{1/2}$.</u>

R.

Question 6 **HEC 2011** C. DAUDET

Soit n un entier naturel non nul.

Q1. Trouver un réel C_n pour que la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) = \begin{cases} C_n\, e^{-4nt}\, t^{n-1} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ soit une densité de probabilité.

Q2. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 4.

Trouver, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la loi de $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité.

Question de cours : Définition d'une forme linéaire. Noyau et image d'une forme linéaire.

Q1 Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $g_n(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{t}{1/4n}}\, t^{n-1}}{(1/4n)^n\, \Gamma(n)} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

g_n est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi gamma de paramètres $\frac{1}{4n}$ et n.

Notons que $f_n = \dfrac{C_n\,\Gamma(n)}{(4n)^n}\, g_n$. Or $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,dt$ existe et vaut 1.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt$ existe et vaut $\dfrac{C_n\,\Gamma(n)}{(4n)^n}$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt = 1 \iff C_n = \dfrac{(4n)^n}{\Gamma(n)}$.

* Donc si f_n est une densité de probabilité : $C_n = \dfrac{(4n)^n}{\Gamma(n)}$.

* Réciproquement supposons que $C_n = \dfrac{(4n)^n}{\Gamma(n)}$.

1°) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt$ existe et vaut 1.

2°) $C_n > 0$. Ainsi $\forall t \in]-\infty, 0[$, $f_n(t) = 0 \geqslant 0$ et

$\forall t \in [0, +\infty[$, $f_n(t) = C_n\, e^{-4nt}\, t^{n-1} \geqslant 0$.

Donc f_n est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

3°) $\forall t \in]-\infty, 0[$, $f_n(t) = 0$ donc f_n est continue sur $]-\infty, 0[$

$\forall t \in [0, +\infty[$, $f_n(t) = C_n\, e^{-4nt}\, t^{n-1}$ donc f_n est continue sur $[0, +\infty[$.

Alors f_n est au moins continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

ceci achève de montrer que f_n est une densité de probabilité.

<u>f_n est une densité de probabilité si et seulement si</u> $\underline{\underline{C_n = \frac{(4n)^n}{\Gamma(n)} = \frac{(4n)^n}{(n-1)!}}}$.

(Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent la loi exponentielle de paramètre 4 donc la loi gamma de paramètres $\frac{1}{4}$ et 1.

Le cours indique que $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi gamma de paramètres $\frac{1}{4}$ et n.

<u>Toujours d'après le cours $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit la loi gamma de paramètres $\frac{1}{4n}$ et n.</u>

<u>Remarque</u>.. Si $C_n = \frac{(4n)^n}{\Gamma(n)}$, $f_n = g_n$ donc f_n est une densité de Z_n.

1) $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

2) les variables aléatoires de cette suite ont même espérance $\frac{1}{4}$ et même variance $1/16$.

La loi faible des grands nombres montre alors que la suite $\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $\frac{1}{4}$.

<u>$(Z_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $\frac{1}{4}$.</u>