R.

Question 1 **HEC 2012-1-S7** $\boxed{\text{F 1}}$

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi uniforme sur $]0,1]$.

On pose pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $X_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} U_i^{\frac{1}{n}}$ et $Y_n = (e\,X_n)^{\sqrt{n}}$.

Montrer que la suite de variables aléatoires $\big(\ln Y_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Question de cours. Définition et proppriétés des fonctions indicatrices des parties d'un ensemble.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\ln Y_n = \ln\left((eX_n)^{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n}\left[\ln e + \ln X_n\right] = \sqrt{n}\left[1 + \ln \prod_{i=1}^{n} U_i^{1/n}\right]$

$\ln Y_n = \sqrt{n}\left[1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln U_i\right] = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\sum_{i=1}^{n} \ln U_i + n\right] = \frac{S_n + n}{\sqrt{n}}$ où $S_n = \sum_{i=1}^{n} \ln U_i$.

Posons $T = \ln U_1$. Utilisons le théorème de transfert pour montrer l'existence de $E(T)$ et $V(T)$ et les calculer.

Posons $\forall t \in [0,1]$, $f(t) = 1$ et $\forall t \in \mathbb{R} - [0,1]$, $f(t) = 0$.

- f est une densité de U_1 ;
- U_1 prend ses valeurs dans $]0,1]$;
- $\ln$ est continue sur $]0,1]$;

Alors $E(\ln U_1)$ existe si et seulement si $\int_0^1 \ln t\, f(t)\,dt$ est absolument convergente.

$t \mapsto \ln t\, f(t)$ est continue sur $]0,1]$.

$\forall \varepsilon \in]0,1]$, $\int_\varepsilon^1 \ln t\, f(t)\,dt = \int_\varepsilon^1 \ln t\,dt = \left[t\ln t - t\right]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon$.

$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln t\, f(t)\,dt = -1$. Donc $\int_0^1 \ln t\, f(t)\,dt$ converge et vaut -1

Alors $\int_0^1 -\ln t\, f(t)\,dt$ converge également donc $\int_0^1 |\ln t\, f(t)|\,dt$ converge.

$\int_0^1 \ln t\, f(t)\,dt$ converge absolument donc $E(\ln U_1)$ existe.

$E(T)$ existe et $E(T) = E(\ln U_1) = \int_0^1 \ln t\, f(t)\,dt = -1$.

$T^2 = (\ln U_1)^2 = \ln^2 U_1$.

- f est une densité de U_1
- U_1 prend ses valeurs dans $]0,1]$
- $\ln^2$ est continue sur $]0,1]$.

Alors $E(\ln^2 U_1)$ existe si et seulement si $\int_0^1 \ln^2 t\, f(t)\,dt$ est absolument convergente.

$\forall t \in]0,1]$, $\ln^2 t\, f(t) = \ln^2 t \geq 0$.

Donc $E(\ln^2 U_1)$ existe si et seulement si $\int_0^1 \ln^2 t\, dt$ converge.

Soit $\varepsilon \in]0,1]$. $\int_\varepsilon^1 \ln^2 t\, dt = [t \ln^2 t]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 t \times 2 \times \frac{1}{t} \times \ln t\, dt = -\varepsilon \ln^2 \varepsilon - 2\int_\varepsilon^1 \ln t\, dt.$

$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln^2 t\, dt = 0 - 2\int_0^1 \ln t\, dt = 2$. $\int_0^1 \ln^2 t\, dt$ existe et vaut 2.

Alors $E((\ln U_1)^2)$ existe et $E((\ln U_1)^2) = \int_0^1 \ln^2 t\, f(t)\,dt = \int_0^1 \ln^2 t\,dt = 2$.

$E(T^2)$ existe et vaut 2 donc $V(T)$ existe et vaut $2 - 1^2$ c'est-à-dire 1.

Appliquons alors le théorème de la limite centrée.

1) $(\ln U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes car $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes

2) Toutes les variables aléatoires de la suite $(\ln U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ont même loi.

3) Les variables aléatoires de cette suite ont pour espérance -1 et pour variance 1 $(1 > 0 !)$.

Alors la suite de terme général $\dfrac{\sum_{i=1}^n \ln U_i - E(\sum_{i=1}^n \ln U_i)}{\sqrt{V(\sum_{i=1}^n \ln U_i)}}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\sum_{i=1}^n \ln U_i = S_n$. $E(\sum_{i=1}^n \ln U_i) = \sum_{i=1}^n E(\ln U_i) = \sum_{i=1}^n (-1) = -n$.

$V(\sum_{i=1}^n \ln U_i) = \sum_{i=1}^n V(\ln U_i) = \sum_{i=1}^n 1 = n$.

par indépendance

Alors
$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln U_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} \ln U_i\right)}{\sqrt{V\left(\sum_{i=1}^{n} \ln U_i\right)}} = \frac{S_n - (-n)}{\sqrt{n}} = \frac{S_n + n}{\sqrt{n}} = \ln Y_n .$$

Ainsi la suite $(\ln Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Remarque.. Pour calculer l'espérance et la variance de $\ln U_1$ on aurait pu remarquer que $-\ln U_1$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Ainsi $E(-\ln U_1) = \frac{1}{1}$ et $V(-\ln U_1) = \frac{1}{1^2}$.

Alors $E(\ln U_1) = -1$ et $V(\ln U_1) = 1$.

R.

Question 6 **HEC 2012-6-S23** $\boxed{\text{F 1}}$ **I. KARDASZEWICZ**

a, b sont deux réels strictement positifs. α est réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, vérifiant les conditions suivantes :

- $P(X=0)=0$;
- $P(X>0)=\alpha$;
- $P_{\{X>0\}}(X \leqslant x) = \begin{cases} 1-e^{-ax} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$;
- $P_{\{X<0\}}(-X \leqslant x) = \begin{cases} 1-e^{-bx} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. *Je mettrais plutôt* $P_{\{X<0\}}(-X < x) = \begin{cases} 1-e^{-bx} & si\ x>0 \\ 0 & si\ x \leqslant 0 \end{cases}$.

Q1. Déterminer la fonction de répartition de X.

Q2. La variable aléatoire X est-elle à à densité ?

Q3. Établir l'existence de $E(X)$. Calculer $E(X)$.

Question de cours. *Développement limité d'ordre 1 au point a de $\mathbb{R}^n$ pour une fonction numérique f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.*

Q1 $(\{X>0\}, \{X=0\}, \{X<0\})$ est un système complet d'événements.

Alors $1 = P(X>0) + P(X=0) + P(X<0) = \alpha + 0 + P(X<0)$. $\underline{P(X<0) = 1-\alpha}$.

soit $x \in]-\infty, 0]$

$P(X \leq x) = P(\{X\leq x\} \cap \{X<0\}) + P(\{X \leq x\} \cap \{X=0\}) + P(\{X\leq x\} \cap \{X>0\})$.

$\{X\leq x\} \cap \{X>0\} = \emptyset$ donc $P(\{X\leq x\} \cap \{X>0\}) = 0$ ... car $x \leq 0$

$\{X \leq x\} \cap \{X=0\} \subset \{X=0\}$. Alors $0 \leq P(\{X\leq x\} \cap \{X=0\}) \leq P(X=0) = 0$.

donc $P(\{X\leq x\} \cap \{X=0\}) = 0$.

Alors $P(X\leq x) = P(\{X \leq x\} \cap \{X<0\}) = P(\{-X \geq -x\} \cap \{X<0\})$

$P(X\leq x) = P(X<0)\, P_{\{X<0\}}(-X \geq -x) = (1-\alpha)(1 - P_{\{X<0\}}(-X < -x)) = (1-\alpha)\left[1-(1-e^{-b(-x)})\right]$

$-x \geq 0$ donc d'où si $-x>0$ et encore vrai si $-x=0$!!

$\underline{P(X\leq x) = (1-\alpha)\, e^{bx} \text{ si } x \in]-\infty, 0]}$.

Soit $x \in]0, +\infty[$.

$P(X\leq x) = P(\{X\leq x\} \cap \{X<0\}) + P(\{X\leq x\} \cap \{X=0\}) + P(\{X \leq x\} \cap \{X>0\})$.

$P(\{X\leq x\} \cap \{X<0\}) = P(X<0) = 1-\alpha$ et comme plus haut $P(\{X\leq x\} \cap \{X=0\}) = 0$ car $P(X=0)=0$.

Ainsi $P(X\leq x) = 1-\alpha + P(X>0)\, P_{\{X>0\}}(X\leq x) = 1-\alpha+\alpha(1-e^{-ax}) = 1-\alpha e^{-ax}$.

La fonction de répartition de X est la fonction F_X définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} (1-\alpha)e^{bx} & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 1-\alpha e^{-ax} & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}.$$

(Q2) $(1-\alpha)e^{b\times 0} = 1-\alpha = 1-\alpha e^{-a\times 0}$

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} (1-\alpha)e^{bx} & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 1-\alpha e^{-ax} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$

$x \mapsto (1-\alpha)e^{bx}$ et $x \mapsto 1-\alpha e^{-ax}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc F_X est de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$. Ceci suffit pour dire que :

1° F_X est continue sur $\mathbb{R}$

2° F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{0\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Ainsi X est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F'_X(x) = (1-\alpha)b e^{bx}$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ F'_X(x) = \alpha a e^{-ax}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \begin{cases} \alpha a e^{-ax} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ (1-\alpha)b e^{bx} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\end{cases}.$

f_X est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide sur $\mathbb{R}-\{0\}$, donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points, avec F'_X donc f_X est une densité de X.

(Q3) Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

g est une densité d'une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre λ. Alors $\int_0^{+\infty} x g(x)\,dx$ converge et vaut $E(Y)$.

donc $\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$ converge et vaut $\frac{1}{\lambda}$. ① $-Y$ est aussi une variable aléatoire à densité et $h : x \mapsto \frac{1}{|-1|} g(-x)$ en est une densité.

$E(-Y)$ existe et vaut $-E(Y)$ donc $-\frac{1}{\lambda}$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,h(x)\,dx$ existe et vaut $-\frac{1}{\lambda}$. où $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda x} \text{ si } x \in]-\infty, 0] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Donc $\int_{-\infty}^{0} \lambda x e^{\lambda x}\,dx$ existe et vaut $-\frac{1}{\lambda}$. ②

Notons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x f_X(x) = \begin{cases} \alpha a x e^{-ax} \text{ si } x \in [0, +\infty[\\ (1-\alpha) b x e^{bx} \text{ sinon} \end{cases}$.

Ainsi
- $\int_{0}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$ converge et vaut $\alpha \times \frac{1}{a}$ (d'après ①).
- $\int_{-\infty}^{0} x f_X(x)\,dx$ converge et vaut $(1-\alpha)\left(-\frac{1}{b}\right)$ (d'après ②).

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$ converge et vaut $\frac{\alpha}{a} - \frac{1-\alpha}{b}$.

Donc X possède une espérance et $E(X) = \frac{\alpha}{a} - \frac{1-\alpha}{b}$.

R.

Question 7 **HEC 2012-7-S27** $\boxed{\text{F 1}}$

Soit X une variable à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

Q1. On suppose que la variable aléatoire $X + \dfrac{1}{X}$ admet une espérance. Montrer que X admet une espérance.

Q2. La réciproque est-elle vraie ?

Question de cours. *Ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.*

Q1 X est une variable aléatoire à densité qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc X possède une densité f définie sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $]-\infty, 0]$.

- X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$;
- $t \mapsto t + \frac{1}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$;
- f est une densité de X ;
- $E(X + \frac{1}{X})$ existe.

Alors le théorème de transfert montre que $\int_0^{+\infty} (t + \frac{1}{t}) f(t)\, dt$ est absolument convergente donc convergente.

$\int_{-\infty}^0 t f(t)\, dt$ existe et vaut 0. $\forall t \in]0, +\infty[$, $0 \leqslant t \leqslant t + \frac{1}{t}$ et $f(t) \geqslant 0$.

Donc $\forall t \in]0, +\infty[$, $0 \leqslant t f(t) \leqslant (t + \frac{1}{t}) f(t)$ et $\int_0^{+\infty} (t + \frac{1}{t}) f(t)\, dt$ converge.

Alors $\int_0^{+\infty} t f(t)\, dt$ converge.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt$ converge. Donc <u>X possède une espérance.</u>

Q2 La réciproque est fausse. Supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

- <u>X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$</u> (non !)
- <u>$E(X)$ existe.</u>
- <u>la fonction g définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de X</u>

$t \mapsto t + \frac{1}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc, d'après le théorème de transfert, $X + \frac{1}{X}$ possède une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} (t + \frac{1}{t}) g(t)\, dt$ est absolument convergente.

Or $(t + \frac{1}{t}) g(t) \underset{0}{\sim} \frac{\lambda}{t}$; $\forall t \in]0, +\infty[$, $\frac{\lambda}{t} \geqslant 0$ et $\int_0^1 \frac{\lambda}{t}\, dt$ diverge. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^1 (t + \frac{1}{t}) g(t)$ diverge. Alors $\int_0^{+\infty} (t + \frac{1}{t}) g(t)\, dt$ diverge. <u>$X + \frac{1}{X}$ n'a pas d'espérance.</u>

R.

Question 13 **HEC 2012-13-S40** $\boxed{\text{F 2}}$

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $]0,1[$.

Déterminer toutes les fonctions g continues et strictement monotones de $]0,1[$ sur $g(]0,1[)$ telles que la variable aléatoire $Y = g(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.

Question de cours. *Comparaison des séries à termes positifs.*

- Analyse.. Soit g une application continue et strictement monotone de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$.

1/ $I = g(]0,1[)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2/ g définit une bijection de $]0,1[$ sur I

Supposons encore que $Y = g(X) = g \circ X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Notons F_Y (resp. F_X) la fonction de répartition de Y (resp. X)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} \text{ si } x \in [0, +\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\\ x \text{ si } x \in [0, 1[\\ 1 \text{ si } x \in [1, +\infty[. \end{cases}$

$\forall x \in]0,1[$, $F_Y(g(x)) = P(Y \leq g(x)) = P(g \circ X \leq g(x))$.

1er cas.. g est strictement croissante sur $]0,1[$.

soit $x \in]0,1[$, $F_Y(g(x)) = P(g \circ X \leq g(x)) = P(X \leq x) = F_X(x) \underset{x \in]0,1[}{=} x$

de plus $F_Y(g(x)) = 0$ ou $1 - e^{-g(x)}$. Donc $x = 0$ ou $x = 1 - e^{-g(x)}$.

Or $x \in]0,1[$. Ainsi $x = 1 - e^{-g(x)}$. $e^{-g(x)} = 1 - x$; $-g(x) \underset{x \in]0,1[}{=} \ln(1-x)$; $g(x) = -\ln(1-x)$.

$\forall x \in]0,1[$, $g(x) = -\ln(1-x)$.

2ième cas.. g est strictement décroissante sur $]0,1[$.

soit $x \in]0,1[$, $F_Y(g(x)) = P(g \circ X \leq g(x)) = P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(X \leq x)$

Alors $F_Y(g(x)) = 1 - x$ car $x \in]0,1[$. Or $F_Y(g(x)) = 0$ ou $1 - e^{-g(x)}$.

comme $x \neq 1$: $1 - x = F_Y(g(x)) = 1 - e^{-g(x)}$; $x = e^{-g(x)}$; $\ln x = -g(x)$.

$\forall x \in]0,1[$, $g(x) = -\ln(x)$.

- Synthèse. Posons $\forall x \in]0,1[$, $g_1(x) = -\ln(1-x)$ et $g_2(x) = -\ln x$.

Notons que g_1 et g_2 sont continues et strictement monotones sur $]0,1[$ et que, $g_1 \circ X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et $g_2 \circ X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

Posons $Y_1 = g_1 \circ X$ et $Y_2 = g_2 \circ X$.

$u : x \to 1-x$ est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$, $\forall x \in]0,1[$, $u(x) \in]0,1[$,

$-\ln$ est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$.

Par composition g_1 est continue et strictement croissante sur $]0,1[$.

$\forall x \in]0,1[$, $g_1(x) = -\ln(1-x) \in]0,+\infty[$. Alors $Y_1 = g_1 \circ X$ prend ses valeurs dans $]0,+\infty[$.

Soit F_{Y_1} la fonction de répartition de Y_1. $\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_{Y_1}(x) = 0$. Soit $x \in]0,+\infty[$.

$F_{Y_1}(x) = P(g_1 \circ X \leq x) = P(-\ln(1-X) \leq x) = P(\ln(1-X) \geq -x) = P(1-X \geq e^{-x})$.

$F_{Y_1}(x) = P(X \leq 1-e^{-x}) = 1-e^{-x}$

$\left[\begin{array}{l} 1-e^{-x} \in]0,1[\text{ car } x \in]0,+\infty[\\ X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[). \end{array}\right.$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ou $F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{si } x \in [0,+\infty[. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

donc $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. g_1 est solution.

$\forall x \in]0,1[$, $g_2(x) = -\ln x$. g_2 est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$.

$\forall x \in]0,1[$, $g_2(x) = -\ln x = -\ln(1-(1-x)) = g_1(1-x)$. $Y_2 = g_1(1-X)$.

$X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$. Rappelons alors que $1-X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$. Mais alors, d'après ce qui précède (" $X \leftarrow 1-X$ " !), $g_1(1-X) \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ donc $Y_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. g_2 est solution.

Les fonctions g continues et strictement monotones de $]0,1[$ sur $g(]0,1[)$ telles que la variable aléatoire $Y = g(X)$ suit la loi exponentielle sont les fonctions g_1 et g_2 définies par $\forall x \in]0,1[$, $g_1(x) = -\ln(1-x)$ et $g_2(x) = -\ln x$.

Question 15 **HEC 2012-15** $\boxed{\text{F1}}$ **N. KARPIEL**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes une loi normale centrée réduite.

Soit θ un réel. On pose $Y_0 = X_0$ et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $Y_n = \theta\, Y_{n-1} + X_n$.

Q1. Donner la loi de Y_n.

Q2. Calculer $\operatorname{cov}(Y_n, Y_{n-k})$ pour $n > k > 0$.

Déjà vu en 2007.

Question de cours *Théorème de d'Alembert.*

Q1 $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $Y_k=\theta Y_{k-1}+X_k$. $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{Y_k}{\theta^k}-\dfrac{Y_{k-1}}{\theta^{k-1}}=\dfrac{X_k}{\theta^k}$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{Y_n}{\theta^n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{Y_k}{\theta^k}-\frac{Y_{k-1}}{\theta^{k-1}}\right)+\frac{Y_0}{\theta^0}\underset{\substack{\uparrow\\ Y_0=X_0}}{=}\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{\theta^k}+\frac{X_0}{\theta^0}=\sum_{k=0}^{n}\frac{X_k}{\theta^k}$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $Y_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\theta^{n-k}X_k$. Notons que ceci vaut également pour $n=0$ car $Y_0=X_0$. Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$, $Y_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\theta^{n-k}X_k$.

$\forall k\in\mathbb{N}$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Soit $n\in\mathbb{N}$. $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\theta^{n-k}X_k\hookrightarrow\mathcal{N}(0,(\theta^{n-k})^2)$.

De plus $\theta^nX_0, \theta^{n-1}X_1, \dots, \theta^0X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes car $X_0, X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Le théorème de stabilité des lois normales montre que Y_n suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart type $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(\theta^{n-k})^2\right)^{1/2}$ ou $\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\theta^{2i}\right)^{1/2}$.

Q2 Ici $n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}$ et $0<k<n$. bilinéarité de la covariance,

$\operatorname{cov}(Y_n,Y_{n-k})=\operatorname{cov}\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\theta^{n-i}X_i,\sum_{j=0}^{n-k}\theta^{n-k-j}X_j\right)\underset{\downarrow}{=}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\theta^{n-i}\theta^{n-k-j}\operatorname{cov}(X_i,X_j)$

Or $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \begin{cases} V(X_j) & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. (indépendance)

Alors $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

donc $\mathrm{cov}(Y_n, Y_{n-k}) = \sum_{j=0}^{n-k} \theta^{n-j}\,\theta^{n-k-j} \underset{\ell=n-k-j}{=} \sum_{\ell=0}^{n-k} \theta^{n-(n-k-\ell)}\,\theta^{\ell} = \theta^k \sum_{\ell=0}^{n-k} (\theta^2)^\ell$.

Si $\theta^2 \neq 1$ $\sum_{\ell=0}^{n-k} (\theta^2)^\ell = \dfrac{1-\theta^{2(n-k+1)}}{1-\theta^2}$ et $\mathrm{cov}(Y_n, Y_{n-k}) = \dfrac{\theta^k - \theta^{2n-k+2}}{1-\theta^2}$.

Si $\theta = 1$ $\mathrm{cov}(Y_n, Y_{n-k}) = 1 \times \sum_{\ell=0}^{n-k} 1 = n-k+1$

Si $\theta = -1$ $\mathrm{cov}(Y_n, Y_{n-k}) = (-1)^k \sum_{\ell=0}^{n-k} 1 = (n-k+1)(-1)^k$

donc $\underline{\underline{\mathrm{cov}(Y_n, Y_{n-k})}} = \begin{cases} \dfrac{\theta^k - \theta^{2n-k+2}}{1-\theta^2} & \text{si } \theta \neq 1 \text{ et } \theta \neq -1 \\ n-k+1 & \text{si } \theta = 1 \\ (n-k+1)(-1)^k & \text{si } \theta = -1 \end{cases}$.

<u>Remarque</u>.. ceci vaut encore pour $k=0$ ... et pour $k=n$ ... et pour $(k,n)=(0,0)$.