Question 5 ESCP 2003 Soit X une variable aléatoire de densité f paire et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que X^2 suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer f.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\right) & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et

$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \end{cases}$

g et h sont deux densités ; elles coïncident sur $\mathbb{R} \setminus D$ où D est fini.

$\forall x \in]0,+\infty[- D,\ \lambda e^{-\lambda x} = h(x) = g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\right) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ est paire}}}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x})$.

$\forall x \in]0,+\infty[- D,\ f(\sqrt{x}) = \lambda\sqrt{x}\, e^{-\lambda x}$

Or $x \mapsto \lambda\sqrt{x}\, e^{-\lambda x}$ et $x \mapsto f(\sqrt{x})$ sont continues sur $]0,+\infty[$.

Donc $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(\sqrt{x}) = \lambda\sqrt{x}\, e^{-\lambda x}$

Ainsi $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = \lambda x\, e^{-\lambda x^2}$

f est continue en 0 donc à droite en 0. Par passage à la limite à droite en 0 il vient $f(0) = 0$.

Alors $\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) = \lambda x e^{-\lambda x^2}$

Soit $x \in]-\infty, 0[$. $f(x) = f(-x) \underset{\substack{\uparrow \\ -x \in]0,+\infty[}}{=} \lambda(-x) e^{-\lambda(-x)^2} = \lambda |x| e^{-\lambda x^2}$

Finalement $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda |x| e^{-\lambda x^2}.}}$

Question 11 **ESCP 2006** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}^+$ et une espérance m_1 non nulle. On note F la fonction de répartition de X et on définit la fonction g par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-F(x)}{m_1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que g est une densité de probabilité.

- g est positive sur $\mathbb{R}$.
- g est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- $\int_{-\infty}^{0} g(x)\,dx$ converge et vaut 0.

$$\int_0^A g(t)\,dt = \frac{1}{m_1}\int_0^A (1-F(t))\,dt \overset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{m_1}\left(\left[t(1-F(t)) \right]_0^A - \int_0^A t\,(-f(t))\,dt \right)$$

$$\int_0^A g(t)\,dt = \frac{1}{m_1} A(1-F(A)) + \frac{1}{m_1}\int_0^A t f(t)\,dt.$$

Or $0 \leq A(1-F(A)) = A\int_A^{+\infty} f(t)\,dt \leq \int_A^{+\infty} t f(t)\,dt$ et

$\lim\limits_{A\to+\infty} \int_A^{+\infty} t f(t)\,dt = 0$ donc $\lim\limits_{A\to+\infty} (A(1-F(A))) = 0$.

Alors $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A g(t)\,dt = 0 + \frac{1}{m_1}\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt = 1$.

$\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ converge et vaut 0. $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ converge et vaut 1.

g est une densité de probabilité.

__Exercice..__ Montrer que l'on a bien $m_1 \neq 0$!

R

Question 13 **ESCP 2006** Soit X une variable aléatoire réelle de densité f continue sur $\mathbb{R}$ et admettant une espérance. On suppose qu'il existe b tel que pour tout x réel $f(b-x)=f(x)$. Quelle est l'espérance de X ?

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(b-t)\,dt=\int_{+\infty}^{-\infty}(b-u)\,f(u)(-du)=\int_{-\infty}^{+\infty}(b-u)\,f(u)\,du$$

$u=b-t$

$E(X)=b-E(X)$

$E(X)=\frac{b}{2}$.

R

R.

Question 14 **ESCP 2006** $\boxed{\text{F 1}}$

Soit X une variable à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et F sa fonction de répartition. On suppose que :

- F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- X admet une espérance $E(X)$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,(1 - F(x) - F(-x)) = 0$.

Montrer que $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} [1 - F(t) - F(-t)]\,\mathrm{d}t$.

F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Posons $F' = f$. f est une densité de X.

Posons $\forall t \in [0, +\infty[$, $u(t) = t$ et $v(t) = 1 - F(t) - F(-t)$.

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. De plus $\forall t \in [0, +\infty[$, $u'(t) = 1$ et $v'(t) = -F'(t) + F'(-t) = -f(t) + f(-t)$

ceci justifie l'intégration par parties suivante. Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$\int_0^A (1 - F(t) - F(-t))\,dt = \big[t(1 - F(t) - F(-t))\big]_0^A - \int_0^A t\,(-f(t) + f(-t))\,dt.$$

$$\int_0^A (1 - F(t) - F(-t))\,dt = A(1 - F(A) - F(-A)) + \int_0^A t f(t)\,dt - \int_0^A t f(-t)\,dt.$$

$t \mapsto -t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ceci justifie le changement de variable $u = -t$ dans ce qui suit.

$$\int_0^A t f(-t)\,dt \underset{u=-t}{=} \int_0^{-A} (-u) f(u)(-du) = -\int_{-A}^0 u f(u)\,du = -\int_{-A}^0 t f(t)\,dt.$$

Alors $\displaystyle\int_0^A (1 - F(t) - F(-t))\,dt = A(1 - F(A) - F(-A)) + \int_0^A t f(t)\,dt + \int_{-A}^0 t f(t)\,dt.$

$E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ existe donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 t f(t)\,dt$ convergent.

De plus $\lim\limits_{A \to +\infty} \big(A(1 - F(A) - F(-A))\big) = 0$. Alors $\lim\limits_{A \to +\infty} \displaystyle\int_0^A (1 - F(t) - F(-t))\,dt = \int_0^{+\infty} t f(t)\,dt + \int_{-\infty}^0 t f(t)\,dt.$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F(t) - F(-t))\,dt$ converge et vaut $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F(t) - F(-t))\,dt$ converge et $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} [1 - F(t) - F(-t)]\,dt$.

Question 18 ESCP 2006 $\boxed{\text{F 1}}$ (*élève*)

X est une variable aléatoire à densité possèdant un moment d'ordre 2.

Comparer $V(|X|)$ et $V(X)$.

X possède un moment d'ordre 2. $E(X^2)$ et $E(|X|^2)$ existent.

$V(X)$ et $V(|X|)$ existent.

$X \leqslant |X|$ et $-X \leqslant |X|$ donc $E(X) \leqslant E(|X|)$ et $-E(X) \leqslant E(|X|)$.

Alors $0 \leqslant |E(X)| \leqslant E(|X|)$; $(E(X))^2 \leqslant (E(|X|))^2$.

Alors $V(|X|) = E(|X|^2) - (E(|X|))^2 \leqslant E(|X|^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = V(X)$.

$V(|X|) \leqslant V(X)$.

Question 7 ESCP 2007

Soit X une variable aléatoire strictement positive de densité f. On suppose que X et $1/X$ admettent une espérance.

Comparer $E\left(\dfrac{1}{X}\right)$ et $\dfrac{1}{E(X)}$.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Il n'est pas restrictif de supposer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]-\infty, 0]$.

D'après le théorème de transfert $E\left(\frac{1}{X}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f(t)\,dt$.

$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\sqrt{f(t)}\right)\left(\sqrt{t}\sqrt{f(t)}\right) dt$, $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f(t)\,dt$ convergent.

Dans ces conditions "le prolongement de Cauchy-Schwarz" donne :

$$\left(\int_0^{+\infty} f(t)\,dt\right)^2 \leqslant \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\sqrt{f(t)}\right)^2 dt \int_0^{+\infty} \left(\sqrt{t}\sqrt{f(t)}\right)^2 dt.$$

Alors $1 = 1^2 \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f(t)\,dt \int_0^{+\infty} t f(t)\,dt = E\left(\frac{1}{X}\right) E(X)$.

donc $E\left(\frac{1}{X}\right) \geqslant E(X)$.

Exercice.. Reprendre le problème pour une variable aléatoire discrète X prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $E(X)$ et $E\left(\frac{1}{X}\right)$ existent.

R

Question 10 ESCP 2007

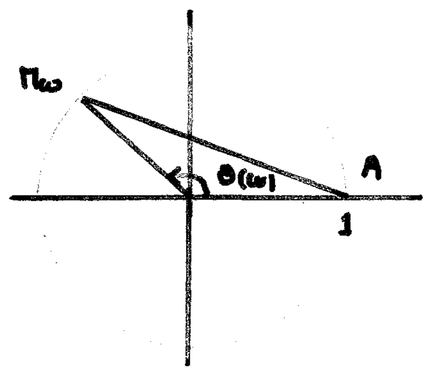
Soit A le point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(1,0)$. Soit θ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-\pi,\pi]$.

À tout $\omega \in \Omega$, on associe le point M_ω du cercle unité d'affixe $e^{i\theta(\omega)}$

Donner l'espérance de la variable aléatoire représentant la distance de A à M_ω.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Notons X la variable aléatoire qui à tout ω dans Ω associe la distance de A à M_ω.



Soit $\omega \in \Omega$. Les coordonnées de M_ω sont $\cos\theta(\omega)$ et $\sin\theta(\omega)$.

$X(\omega) = \sqrt{(\cos(\theta(\omega))-1)^2 + (\sin(\theta(\omega)))^2}$

$X(\omega) = \sqrt{\cos^2\theta(\omega) + \sin^2\theta(\omega) + 1 - 2\cos\theta(\omega)}$

$X(\omega) = \sqrt{2(1-\cos\theta(\omega))} = \sqrt{4\sin^2(\theta(\omega)/2)} = 2\left|\sin\dfrac{\theta(\omega)}{2}\right|.$

$X = 2\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$. θ prend ses valeurs dans $[-\pi,\pi]$ et admet pour densité la fonction f définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & \text{si } t \in [-\pi,\pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$g : t \mapsto 2\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|$ est continue sur $[-\pi,\pi]$.

Alors X possède une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)f(t)\,dt$ est absolument convergente. En cas d'existence $E(X) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)f(t)\,dt$.

$\forall t \in [-\pi,\pi]$, $g(t)f(t) = \dfrac{1}{\pi}\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|$. Donc $t \mapsto g(t)f(t)$ est continue et positive sur $[-\pi,\pi]$. Alors $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)f(t)\,dt$ est absolument convergente. $E(X)$ existe.

$E(X) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|dt \overset{\text{parité}}{=} \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t/2 = \dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{-\cos t/2}{1/2}\right]_0^{\pi} = \dfrac{4}{\pi}.$

$\underline{\underline{E(X) = \dfrac{4}{\pi}.}}$

Question 13 ESCP 2007 C. BRONES

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suites de variable aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la loi exponentielle de paramètre 1. N est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi géométrique de paramètre p. On suppose que les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n\geqslant n}$ et N sont mutuellement indépendantes.

Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ définie par : $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \underset{1\leqslant k\leqslant N(\omega)}{\mathrm{Min}} X_k(\omega)$.

Soit F_Y la fonction de répartition de Y. Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ donc $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_Y(x) = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $(\{N=n\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. Ainsi :

$F_Y(x) = P(Y \leq x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\{Y\leq x\} \cap \{N=n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\{\min_{1\leq k\leq n} X_k \leq x\} \cap \{N=n\})$

$F_Y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\min_{1\leq k\leq n} X_k \leq x)\, P(N=n)$ par indépendance. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$P(\min_{1\leq k\leq n} X_k \leq x) = 1 - P(\min_{1\leq k\leq n} X_k > x) = 1 - P(\{X_1 > x\} \cap \dots \cap \{X_n > x\})$

$P(\min_{1\leq k\leq n} X_k \leq x) \underset{\text{indépendance}}{=} 1 - P(X_1>x)\cdots P(X_n>x) = 1-(1-P(X_1\leq x))\cdots(1-P(X_n\leq x)) \underset{X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1)}{=} 1 - (1-(1-e^{-x}))^n$

$P(\min_{1\leq k\leq n} X_k \leq x) = 1 - e^{-nx}$.

$F_Y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-e^{-nx})\, P(N=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[P(N=n) - e^{-x}\, p(qe^{-x})^{n-1}\right]$ où $q = 1-p$.

$F_Y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n) - pe^{-x} \sum_{n=1}^{+\infty} (qe^{-x})^{n-1}$ car ces deux séries convergent.

$F_Y(x) = 1 - pe^{-x}\dfrac{1}{1-qe^{-x}} = \dfrac{1-qe^{-x}-pe^{-x}}{1-qe^{-x}} = \dfrac{1-e^{-x}}{1-qe^{-x}}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-x}}{1-qe^{-x}} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

<u>Exercice.</u> Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en trouver une densité. Montrer que Y possède une espérance et la calculer.

R

Question 16 **ESCP 2007** G. GOBINET

X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $[-2, 2]$. Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p. X et Y sont indépendantes. t est un réel.

Trouver la probabilité pour que $\begin{pmatrix} X & 1 \\ t & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable. dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit $(x, y) \in [-2,2]^2$ et $t \in \mathbb{R}$. Posons $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ t & y \end{pmatrix}$.

Si A admet deux valeurs propres distinctes, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Si A n'a pas de valeur propre dans $\mathbb{R}$, A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$!

Supposons que A admet une valeur propre dans $\mathbb{R}$ et une seule λ.

Alors A diagonalisable $\Leftrightarrow \dim SEP(A, \lambda) = 2 \Leftrightarrow 2 - rg(A - \lambda I_2) = 2 \Leftrightarrow rg(A - \lambda I_2) = 0$

A diagonalisable $\Leftrightarrow A = \lambda I_2$. Or $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ t & y \end{pmatrix}$.

Donc A ne peut pas être diagonalisable.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-\lambda & 1 \\ t & y-\lambda \end{pmatrix}$ non inversible $\Leftrightarrow \lambda^2 - (x+y)\lambda + xy - t = 0$. (1)

(1) admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$ ssi $(x+y)^2 - 4(xy - t) > 0$.

A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (x-y)^2 + 4t > 0$

1er cas... $t > 0$. A est diagonalisable.

2e cas... $t = 0$ A est diagonalisable ssi $x \neq y$

3e cas $t < 0$ A est diagonalisable ssi $x - y \notin [-2\sqrt{|t|}, 2\sqrt{|t|}]$.

Notons S l'événement la matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ t & Y \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

- Si $t > 0$: $\underline{P(S) = 1}$
- Supposons $t = 0$. $P(S) = P(X - Y \neq 0) = 1 - P(X - Y = 0) = 1 - P(X = Y)$.

$P(X=Y) = P(\{Y=0\} \cap \{X=0\}) + P(\{Y=1\} \cap \{X=1\})$. Par indépendance

$P(X=Y) = P(Y=0)\underbrace{P(X=0)}_{0} + P(Y=1)\underbrace{P(X=1)}_{0} = 0$.

$\underline{P(S) = 1}$

R

• **Rappelons $t<0$.** $P(S) = P(X-Y > 2\sqrt{|t|}) + P(X-Y < -2\sqrt{|t|})$

$P(S) = P(\{Y=0\}\cap\{X > 2\sqrt{|t|}\}) + P(\{Y=1\}\cap\{X > 2\sqrt{|t|}+1\}) + P(\{Y=0\}\cap X < -2\sqrt{|t|}) +$

$P(\{Y=1\}\cap\{X < 1-2\sqrt{|t|}\}) \underset{\text{Noter indépendante}}{\overset{q=1-p}{=}} q\,P(X>2\sqrt{|t|}) + p\,P(X>2\sqrt{|t|}+1) + q\,P(X<-2\sqrt{|t|}) + p\,P(X<1-2\sqrt{|t|})$

Notons F la fonction de répartition de X.

$P(S) = q(1-F(2\sqrt{|t|})) + p(1-F(2\sqrt{|t|}+1)) + q\,F(-2\sqrt{|t|}) + p\,F(1-2\sqrt{|t|})$.

Rappelons que $\forall z \in \mathbb{R}$, $F(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in]-\infty,-2[\\ \frac{z+2}{4} & \text{si } z \in [-2,2] \\ 1 & \text{si } z \in]2,+\infty[. \end{cases}$

a) $\sqrt{|t|} < \frac{1}{2}$. $P(S) = q\left(1-\frac{2\sqrt{|t|}+2}{4}\right) + p\left(1-\frac{2\sqrt{|t|}+1+2}{4}\right) + q\,\frac{-2\sqrt{|t|}+2}{4} + p\,\frac{1-2\sqrt{|t|}+2}{4}$.

$P(S) = 1-\sqrt{|t|}$

b) $\sqrt{|t|} \in [\frac{1}{2},1[$. $P(S) = q\left(1-\frac{2\sqrt{|t|}+2}{4}\right) + p(1-1) + q\,\frac{-2\sqrt{|t|}+2}{4} + p\,\frac{1-2\sqrt{|t|}+2}{4}$.

$P(S) = (1-\sqrt{|t|})q + p\,\frac{3-2\sqrt{|t|}}{4}$

c) $\sqrt{|t|} \in [1,\frac{3}{2}[$. $P(S) = q(1-1) + p(1-1) + q\times 0 + p\,\frac{1-2\sqrt{|t|}+2}{4}$.

$P(S) = \frac{3-2\sqrt{|t|}}{4}\,p$.

d) $\sqrt{|t|} \in [\frac{3}{2},+\infty[$ $\quad P(S)=0$.

Remarque.. $t<0$ donc $\sqrt{|t|}<\frac{1}{2} \iff t > -\frac{1}{4}$; $\sqrt{|t|} \in [\frac{1}{2},1[\iff -\frac{1}{4} \geq t > -1$;

$\sqrt{|t|} \in [1,\frac{3}{2}[\iff -1 \geq t > -\frac{9}{4}$; $\sqrt{|t|} \in [\frac{3}{2},+\infty[\iff t \leq -\frac{9}{4}$.

$P(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty,-\frac{9}{4}] \\ \frac{3-2\sqrt{|t|}}{4} & \text{si } t \in]-\frac{9}{4},-1] \\ (1-\sqrt{|t|})q + p\,\frac{3-2\sqrt{|t|}}{4} & \text{si } t \in]-1,-\frac{1}{4}] \end{cases}$ $\qquad P(S) = \begin{cases} 1-\sqrt{|t|} & \text{si } t \in]-\frac{1}{4},0[\\ 1 & \text{si } t \in [0,+\infty[\end{cases}$

R

Question 1 **ESCP 2008** $\boxed{\text{F1}}$

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$. On note f une densité de X. Justifier l'existence et calculer, pour tout z de $\mathbb{R}$:

$$G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leqslant zx) f(x)\, dx.$$

Vérifier que G possède les propriétés caractéristiques d'une fonction de répartition.

Ceci n'est pas une correction.

Sans perte de généralité nous supposons que f est définie par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Soit $z \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $P(X \leq zx) f(x) = 0$.

$\forall x \in [0, +\infty[$, $P(X \leq zx) f(x) = \alpha e^{-\alpha x} P(X \leq zx) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha z x}) & \text{si } z \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Si $z \in]-\infty, 0[$ $x \mapsto P(X \leq zx) f(x)$ est nulle sur $\mathbb{R}$.

Donc si $z \in]-\infty, 0[$, $G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq zx) f(x)\, dx$ converge et vaut 0.

Supposons $z \in [0, +\infty[$. $\int_{-\infty}^{0} P(X \leq zx) f(x)\, dx$ converge et vaut 0.

$\forall x \in [0, +\infty[$, $P(X \leq zx) f(x) = (1 - e^{-\alpha z x}) f(x) = f(x) - \alpha e^{-\alpha z x} e^{-\alpha x} = f(x) - \alpha e^{-\alpha(z+1)x}$

$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge et vaut 1. $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-\alpha(z+1)x}\, dx = \lim\limits_{A \to +\infty} \left[\frac{e^{-\alpha(z+1)x}}{-\alpha(z+1)} \right]_0^A = \frac{1}{\alpha(z+1)}$.

Alors $\int_0^{+\infty} P(X \leq zx) f(x)\, dx$ converge et vaut $1 - \alpha \times \frac{1}{\alpha(z+1)}$ ou $\frac{z}{z+1}$.

Donc $G(z)$ converge et vaut $\frac{z}{z+1}$.

Finalement G est définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \frac{z}{z+1} & \text{si } z \in [0, +\infty[. \end{cases}$

Il est alors aisé de montrer que G est continue sur $\mathbb{R}$, croissante sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}^*$ et que $\lim\limits_{z \to +\infty} G(z) = 1$ et $\lim\limits_{z \to -\infty} G(z) = 0$.

Alors G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

R

R

Question 14 ESCP 2009 $\boxed{\text{F 1}}$ SALS

Soient X_1, ..., X_n, n variables aléatoires réelles indépendantes, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suivent la loi exponentielle de paramètre λ.

Q1. Déterminer la loi de $Y_n = \mathrm{Max}(X_1, ..., X_n)$.

Q2. Déterminer un équivalent de $P(Y_n \geqslant a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Q1 Notons F_n la fonction de répartition de Y_n. Rappelons que la fonction de répartition des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ est la fonction F définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P(\mathrm{Max}(X_1, \dots, X_n) \leqslant x) = P(\{X_1 \leqslant x\} \cap \{X_2 \leqslant x\} \cap \dots \cap \{X_n \leqslant x\})$.

Par indépendance on obtient :

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = P(X_1 \leqslant x) P(X_2 \leqslant x) \dots P(X_n \leqslant x) = (F(x))^n$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} (1 - e^{-\lambda x})^n & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Remarquons que $\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} (1 - e^{-\lambda x})^n & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \end{cases}$

$x \mapsto 0$ et $x \mapsto (1 - e^{-\lambda x})^n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Alors F_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$.

Cela suffit pour dire que F_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et qu'ainsi Y_n est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_n'(x) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ F_n'(x) = n \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1}$

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} n \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

f_n est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F_n' sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points ; f_n est une densité de Y_n

Q2 $P(Y_n \geq a) = 1 - P(Y_n < a) = 1 - P(Y_n \leq a) = 1 - (1 - e^{-\lambda a})^n$.

$(1+x)^n - 1 \underset{x \to 0}{\sim} nx$; $1 - (1+x)^n \underset{x \to 0}{\sim} -nx$; $1 - (1-x)^n \underset{x \to 0}{\sim} nx$

$\lim\limits_{a \to +\infty} e^{-\lambda a} = 0$ car $\lambda > 0$ donc $\underline{\underline{P(Y_n \geq a) \underset{a \to +\infty}{\sim} n e^{-\lambda a}}}$.

Question 8 ESCP 2010 $\boxed{\text{F1}}$

On casse un bâton de longueur 1. Le point de rupture suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Calculer la probabilité que le grand morceau soit au moins 3 fois plus grand que le petit morceau.

Notons X la variable aléatoire égale au point de rupture. $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

On cherche la probabilité de l'événement $A = \{\max(X, 1-X) \geqslant 3\min(X, 1-X)\}$

$P(A) = P(A \cap \{X \leqslant \frac{1}{2}\}) + P(A \cap \{X > \frac{1}{2}\})$

$P(A) = P(\{1-X \geqslant 3X\} \cap \{X \leqslant \frac{1}{2}\}) + P(\{X \geqslant 3(1-X)\} \cap \{X > \frac{1}{2}\})$.

$P(A) = P(\{X \leqslant \frac{1}{4}\} \cap \{X \leqslant \frac{1}{2}\}) + P(\{X \geqslant \frac{3}{4}\} \cap \{X > \frac{1}{2}\})$.

$P(A) = P(X \leqslant \frac{1}{4}) + P(X \geqslant \frac{3}{4}) = P(X \leqslant \frac{1}{4}) + 1 - P(X < \frac{3}{4})$.

$P(A) = (1/4) + 1 - (3/4) = 1/2$.

<u>La probabilité cherchée est $1/2$.</u>

Question 14 **ESCP 2010** X. MARTUCCI $\boxed{\text{F1}}$

X est une variable aléatoire de densité f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln 2}\,\dfrac{1}{x+1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On pose $Y = \dfrac{1}{X} - \mathrm{Ent}\left(\dfrac{1}{X}\right)$ Montrer que Y suit la même loi que X.

Posons $Z = \frac{1}{X}$. Notons F_Z sa fonction de répartition.

Z prend ses valeurs dans $[1,+\infty[$. $\forall x \in]-\infty,1[$, $F_Z(x) = 0$.

Soit $x \in [1,+\infty[$. $F_Z(x) = P\left(\frac{1}{X} \leq x\right) = P\left(\frac{1}{x} \leq X\right) = 1 - P\left(X < \frac{1}{x}\right) = 1 - \int_0^{1/x} \frac{dt}{(\ln 2)(t+1)}$.

$\begin{cases} X \text{ prend des valeurs positives...} \\ x > 0 \end{cases}$ $\frac{1}{x} \in [0,1]$

$F_Z(x) = 1 - \frac{1}{\ln 2}\Big[\ln|t+1|\Big]_0^{1/x} = 1 - \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{1}{x}+1\right) = 1 - \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\ln 2}\ln\frac{x+1}{x} & \text{si } x \in [1,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

__Exercice...__ Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et en trouver une densité.

Posons $T = \mathrm{Ent}(Z)$. $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$. $(\{T=k\})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements...

$Y = \frac{1}{X} - \mathrm{Ent}\left(\frac{1}{X}\right) = Z - \mathrm{Ent}(Z) = Z - T$ prend ses valeurs dans $[0,1[$.

Notons F_Y la fonction de répartition de Y. $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_Y(x) = 0$ et $\forall x \in [1,+\infty[$, $F_Y(x) = 1$. Soit $x \in [0,1[$.

$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(Z - T \leq x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{T=k\} \cap \{Z - T \leq x\})$

$F_Y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{\mathrm{Ent}(Z) = k\} \cap \{Z \leq x+k\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{k \leq Z < k+1\} \cap \{Z \leq x+k\})$.

Or $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $x + k < k+1$ car $x \in [0,1[$

Alors $F_Y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(k \leq Z \leq x+k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \big(F_Z(x+k) - F_Z(k)\big)$

Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{l=1}^{r} (F_2(x+l) - F_2(l)) = \sum_{l=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{x+l+1}{x+l}\right) - 1 + \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{l+1}{l}\right)\right)$$

$$\sum_{l=1}^{r}(F_2(x+l) - F_2(l)) = \left[\sum_{l=1}^{r} (\ln(x+l) - \ln(x+l+1)) + \sum_{l=1}^{r}(\ln(l+1) - \ln l)\right] \times \frac{1}{\ln 2}$$

$$\sum_{l=1}^{r}(F_2(x+l) - F_2(l)) = \left[\ln(x+1) - \ln(x+r+1) + \ln(r+1) - \ln 1\right] \times \frac{1}{\ln 2}.$$

$$\sum_{l=1}^{r}(F_2(x+l) - F_2(l)) = \frac{1}{\ln 2} \ln(x+1) - \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{x+r+1}{r+1}\right)$$

Or $\lim\limits_{r \to +\infty} \left(\ln\left(\frac{x+r+1}{r+1}\right)\right) = \ln 1 = 0$.

Alors $F_Y(x) = \sum\limits_{l=1}^{+\infty}(F_2(x+l) - F_2(l)) = \frac{1}{\ln 2} \ln(x+1)$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \frac{1}{\ln 2} \ln(x+1) & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

Notons F_X la fonction de répartition de X.

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0 = F_Y(x)$

$\forall x \in [0, 1[,\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{1+t}\,dt = \frac{1}{\ln 2}\left[\ln|1+t|\right]_0^x = \frac{1}{\ln 2} \ln(x+1) = F_Y(x)$.

$\forall x \in [1, +\infty[\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = F_X(1) + \int_1^x f(t)\,dt = 1 + 0 = 1 = F_Y(x)$.

Donc $F_Y = F_X$. <u>Y suit la même loi que X.</u>