Question 1 **ESCP 2011**

Q1. Montrer que la fonction $F : x \to \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ vérifie les propriétés d'une fonction de répartition.

Q2. Déterminer la loi de la borne supérieure M_n de n variables aléatoires indépendantes de même loi de fonction de réparttition F.

Q3. Étudier la convergence en loi de la suite $(M_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

(Q1) F est une fonction de répartition si et seulement si
1°) F est croissante sur IR.
2°) $\lim_{x\mapsto+\infty} F(x) = 1$ et $\lim_{x\mapsto-\infty} F(x) = 0$
3°) F est continue à droite en tout point de IR.

Notons que F est de classe C^1 sur IR.

$\forall x\in\mathbb{R},\ F'(x) = -\dfrac{(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0.$

F est croissante sur IR.

$\lim_{x\mapsto+\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim_{x\mapsto+\infty} F(x) = 1$. $\lim_{x\mapsto-\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim_{x\mapsto-\infty} F(x) = 0$.

F étant de classe C^1 sur IR : F est continue à droite en tout point de IR.

Remarques.– 1°.– Il est inutile de vérifier que F prend ses valeurs dans $[0,1]$ car cela résulte des deux premiers points.

2°) F est continue sur IR et de classe C^1 sur IR donc sur IR privé d'un ensemble fini de points ! Alors F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. $F' : x\mapsto \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ en est une densité définie sur IR.

(Q2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ indépendantes et de fonction de répartition F. Posons $M_n = \operatorname{Sup}(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Soit $x\in\mathbb{R}$. $M_n^{-1}(]-\infty,x]) = \{\omega\in\Omega \mid M_n(\omega)\leqslant x\} = \{\omega\in\Omega \mid \forall k\in[\![1,n]\!]\ X_k(\omega)\leqslant x\}$

$M_n^{-1}(]-\infty,x]) = \bigcap_{k=1}^{n} X_k^{-1}(]-\infty,x]) \in \mathcal{A}.$

↑ Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, X_k est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A})$ et $\mathcal{A}$ est stable par intersection.

$\forall x\in\mathbb{R},\ M_n^{-1}(]-\infty,x])\in\mathcal{A}.$

M_n est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\mathcal{A})$ ... et sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

R.

Notons F_n la fonction de répartition de M_n.

$X_1, X_2, \dots, X_k$ mutuellement indépendantes

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = P(M_n^{-1}(]-\infty, x])) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} X_k^{-1}(]-\infty, x])\right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k^{-1}(]-\infty, x])) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq x)$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \prod_{k=1}^{n} F(x) = (F(x))^n = \dfrac{1}{(1+e^{-x})^n}$.

$$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \frac{1}{(1+e^{-x})^n}}}.$$

F_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc <u>M_n est une variable aléatoire à densité et F'_n en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.</u> Notons que $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ F'_n(x) = \dfrac{n e^{-x}}{(1+e^{-x})^{n+1}}}}$.

Q3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $M_n - \ln n$ est une variable aléatoire à densité. Notons G_n sa fonction de répartition. $\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = P(M_n - \ln n \leq x) = P(M_n \leq x + \ln n) = F_n(x + \ln n)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \dfrac{1}{(1+e^{-x-\ln n})^n} = \dfrac{1}{(1+e^{-x}/n)^n} = \dfrac{1}{e^{n \ln(1+e^{-x}/n)}}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-x}}{n} = 0$; $n \ln(1+e^{-x}/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \frac{e^{-x}}{n} = e^{-x}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \left(n \ln\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right)\right) = e^{-x}$.

donc $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \dfrac{1}{e^{e^{-x}}} = e^{-e^{-x}}}}$. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = e^{-e^{-x}}$.

- $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. Alors $x \mapsto -e^{-x}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

  donc $x \mapsto e^{-e^{-x}}$ est croissante sur $\mathbb{R}$. <u>G est croissante sur $\mathbb{R}$.</u>

- $\lim_{x\to+\infty}(-e^{-x}) = 0$ donc $\underline{\lim_{x\to+\infty} G(x) = 1}$. $\lim_{x\to-\infty}(-e^{-x}) = -\infty$ donc $\underline{\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0}$.

- <u>G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$</u> et $\forall x \in \mathbb{R},\ G'(x) = e^{-x} e^{-e^{-x}}$.

Ceci suffit pour dire que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire de densité $x \mapsto e^{-x} e^{-e^{-x}}$.

$$\boxed{\text{Alors } (M_n - \ln n)_{n\geq 1} \text{ converge en loi vers une variable aléatoire à densité de densité } x \mapsto e^{-x} e^{-e^{-x}}.}$$

R-

Question 8 **ESCP 2011** M. DELAFOSSE et D. DEROCHEBOUET

On considère que la durée de vie d'une abeille suit une loi exponentielle de paramètre inconnu.

Au bout de 70 jours l'apiculteur s'aperçoit que la moitié des abeilles de la ruche est mortes.

Quelle est approximativement la durée de vie moyenne d'une abeille ?

Soit X la durée de vie d'une abeille. $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Il résulte des données que $P(X \leq 70) = \frac{1}{2}$ ...

Alors $1 - e^{-\lambda \times 70} = \frac{1}{2}$. $e^{-\lambda 70} = \frac{1}{2}$. $-70\lambda = -\ln 2$. $\lambda = \frac{\ln 2}{70}$.

On peut donc dire que la durée de vie moyenne d'une abeille est

$\frac{70}{\ln 2}$. $\frac{70}{\ln 2} \simeq 100,90$

Approximativement la durée de vie moyenne d'une abeille est de 101 jours.

Question 9 ESCP 2011 C. DAUDET

Q1. Donner les conditions pour que $x \to a\,e^{-|x|}\ln(1+e^{|x|})$ soit une densité de probabilité. On note f_a cette fonction.

Q2 X est une variable aléatoire de densité f_a. X admet-elle une espérance ?

Déjà donnée en 2010.

Q1 Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = a\,e^{-|x|}\ln(1+e^{|x|})$.

* f_a est continue sur $\mathbb{R}$.
* $\forall x \in \mathbb{R},\ 1+e^{|x|} \geqslant 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(1+e^{|x|}) \geqslant 0$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-|x|}\ln(1+e^{|x|}) \geqslant 0$.

f_a est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

* Notons que f_a est paire sur $\mathbb{R}$. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\int_0^A e^{-|t|}\ln(1+e^{|t|})\,dt = \int_0^A e^{-t}\ln(1+e^t)\,dt.$$

$t \mapsto e^t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ ce qui autorise le changement de variable $x=e^t$ dans ce qui suit.

$$\int_0^A e^{-|t|}\ln(1+e^{|t|})\,dt = \int_0^A e^{-t}\ln(1+e^t)\,dt \underset{\uparrow}{=} \int_1^{e^A} \frac{1}{x}\ln(1+x)\frac{1}{x}\,dx$$

$$\begin{cases} x = e^t \\ t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx \end{cases}$$

$$\int_0^A e^{-|t|}\ln(1+e^{|t|})\,dt = \int_1^{e^A} \frac{1}{x^2}\ln(1+x)\,dx$$

En intégrant par parties on obtient :

$$\int_0^A e^{-|t|}\ln(1+e^{|t|})\,dt = \left[-\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]_1^{e^A} - \int_1^{e^A}\left(-\frac{1}{x}\,\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$\int_0^A e^{-|t|}\ln(1+e^{|t|})\,dt = -\frac{\ln(1+e^A)}{e^A} + \ln 2 + \underbrace{\int_1^{e^A}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx}_{\left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_1^{e^A}}$$

$$\int_0^A e^{-|t|}\ln(1+e^{|t|})\,dt = -\frac{\ln(1+e^A)}{e^A} + \ln 2 + \ln\frac{e^A}{e^A+1} - \ln\frac{1}{2}.$$

$$\int_0^A e^{-|t|}\ln(1+e^{|t|})\,dt = 2\ln 2 - \frac{\ln(1+e^A)}{e^A} + \ln\frac{e^A}{e^A+1}.$$

R.

$\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^A)}{e^A} = 0$ par croissance comparée car $\lim\limits_{A\to+\infty} e^A = +\infty$.

$\lim\limits_{A\to+\infty} \ln \dfrac{e^A}{e^A+1} = 0$ car $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{e^A}{e^A+1} = 1$.

donc $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-|t|}\ln(1+e^{|t|})\,dt = 2\ln 2$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} e^{-|t|}\ln(1+e^{|t|})\,dt$ converge et vaut $2\ln 2$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\ln(1+e^{|t|})\,dt$ converge et vaut $4\ln 2$ par parité.

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)\,dt$ converge et vaut $(4\ln 2)a$.

D'après ce qui précède f_a est une densité de probabilité si et seulement si $a \geqslant 0$ et $(4\ln 2)a = 1$; donc si et seulement si $a \geqslant 0$ et $a = \dfrac{1}{4\ln 2}$. Or $\dfrac{1}{4\ln 2} \geqslant 0$

Ainsi <u>f_a est une densité de probabilité si et seulement si $a = \dfrac{1}{4\ln 2}$.</u>

Q2 Notons que $t \mapsto t f_a(t)$ est continue et impaire sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $E(X)$ existe dès que $\int_0^{+\infty} t f_a(t)\,dt$ converge ou plus simplement dès que $\int_0^{+\infty} t\, e^{-t}\ln(1+e^t)\,dt$ converge.

Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = t e^{-t}\ln(1+e^t)$.

$\forall t \in]0,+\infty[,\quad \dfrac{\ln(1+e^t)}{t} = \dfrac{\ln e^t + \ln\left(\frac{1}{e^t}+1\right)}{t} = 1 + \dfrac{1}{t}\ln\left(1+\dfrac{1}{e^t}\right)$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^t)}{t} = 1 + 0\times 0 = 1$; $\ln(1+e^t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t$

Alors 1) $g(t) \underset{+\infty}{\sim} t^2 e^{-t}$

2) $\forall t \in [0,+\infty[,\ t^2 e^{-t} \geqslant 0$

3) $\Gamma(3) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,dt$ converge !

R —

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge. Alors $\int_0^{+\infty} t f_\alpha(t)dt$ converge.

Comme $t \mapsto t f_\alpha(t)$ est impaire sur $\mathbb{R}$: $\int_{-\infty}^{0} t f_\alpha(t)dt$ converge et vaut $-\int_0^{+\infty} t f_\alpha(t)\,dt$ converge.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_\alpha(t)\,dt$ converge et vaut 0.

<u>X possède une espérance qui est nulle.</u>

R

Question 2 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F 1}}$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que $X\,g(X)$ et $g'(X)$ admettent une espérance.

a) Montrer que $E\big(g'(X)\big) = E\big(X\,g(X)\big)$.

b) En déduire les valeurs des moments de X.

---

a) Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$. φ est une densité de X et φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = -t\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} = -t\varphi(t)$.

X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, g' et $t \mapsto t g(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, $E(g'(X))$ et $E(Xg(X))$ existent.

Le théorème de transfert montre alors que : $\int_{-\infty}^{+\infty} g'(t)\varphi(t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t g(t)\varphi(t)\,dt$ sont absolument convergentes, $E(g'(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g'(t)\varphi(t)\,dt$ et $E(Xg(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} t g(t)\varphi(t)\,dt$.

Soit $A \in \mathbb{R}$.

$$\int_0^A g'(t)\varphi(t)\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ et } \varphi \text{ sont de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}}{\overset{\text{IPP}}{=}} \big[g(t)\varphi(t)\big]_0^A - \int_0^A g(t)\varphi'(t)\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi'(t) = -t\varphi(t)}}{=} g(A)\varphi(A) - g(0)\varphi(0) + \int_0^A g(t)\,t\varphi(t)\,dt.$$

$\int_0^A g'(t)\varphi(t)\,dt = g(A)\varphi(A) - g(0)\varphi(0) + \int_0^A t g(t)\varphi(t)\,dt$. (1) On a aussi :

$\int_A^0 g'(t)\varphi(t)\,dt = -g(A)\varphi(A) + g(0)\varphi(0) + \int_A^0 t g(t)\varphi(t)\,dt$ (2),

$g(A)\varphi(A) = \int_0^A g'(t)\varphi(t)\,dt + g(0)\varphi(0) - \int_0^A t g(t)\varphi(t)\,dt$ (3),

$g(A)\varphi(A) = -\int_A^0 g'(t)\varphi(t)\,dt + g(0)\varphi(0) + \int_A^0 t g(t)\varphi(t)\,dt$ (4).

$\int_0^{+\infty} g'(t)\varphi(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} t g(t)\varphi(t)\,dt$ convergent donc $A \mapsto \int_0^A g'(t)\varphi(t)\,dt$ et $A \mapsto \int_0^A t g(t)\varphi(t)\,dt$ ont une limite finie en $+\infty$. Alors (3) montre que $A \mapsto g(A)\varphi(A)$ a une limite finie en $+\infty$. Notons là L.

$\int_{-\infty}^0 g'(t)\varphi(t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^0 t g(t)\varphi(t)\,dt$ convergent donc $A \mapsto \int_A^0 g'(t)\varphi(t)\,dt$ et $A \mapsto \int_A^0 t g(t)\varphi(t)\,dt$ ont une limite finie en $-\infty$. Alors (4) montre que $A \mapsto g(A)\varphi(A)$ a une limite finie en $-\infty$ que nous notons ℓ.

R.

Supposons $L \neq 0$. Alors $g(t)\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} L$. $|g(t)\varphi(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} |L| = |L|\frac{1}{t^0}$.

De plus $\int_0^{+\infty} |L|\frac{1}{t^0}\,dt$ diverge et $t\mapsto |L|\frac{1}{t^0}$ est positive sur $[0,+\infty[$.

Alors $\int_0^{+\infty}|g(t)\varphi(t)|\,dt$ diverge. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)\varphi(t)|$ diverge. Cela contredit

l'absolue convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\varphi(t)\,dt$. Ainsi $L=0$.

Un raisonnement analogue donne $\ell=0$. Alors en faisant tendre A vers $+\infty$

dans (1) et vers $-\infty$ dans (2) il vient :

$\int_0^{+\infty} g'(t)\varphi(t)\,dt = -g(0)\varphi(0)+\int_0^{+\infty} t\,g(t)\varphi(t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^0 g'(t)\varphi(t)\,dt = g(0)\varphi(0)+\int_{-\infty}^0 t\,g(t)\varphi(t)\,dt$

En ajoutant ces deux égalités on obtient $\int_{-\infty}^{+\infty} g'(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t\,g(t)\varphi(t)\,dt$.

Donc $\underline{\underline{E(g'(X)) = E(Xg(X))}}$.

b) Soit $k\in\mathbb{N}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{k+2}\varphi(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{k+2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2^{\frac{k+2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{(x^2/2)^{\frac{k+2}{2}}}{e^{x^2/2}}\right]=0$ par

croissance comparée. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2x^k\varphi(x))=0$. Alors :

1) $x^k\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

2) $\forall x\in[1,+\infty[$, $x^k\varphi(x)\geq 0$ et $\frac{1}{x^2}\geq 0$

3) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives

montrent la convergence de $\int_0^{+\infty} x^k\varphi(x)\,dx$.

φ est paire sur IR et $x\mapsto x^k$ a la parité de k sur IR. Donc $x\mapsto x^k\varphi(x)$ est paire

sur IR si k est pair et impaire sur IR si k est impair.

La convergence de $\int_0^{+\infty} x^k\varphi(x)\,dx$ donne alors la convergence de $\int_{-\infty}^0 x^k\varphi(x)\,dx$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\varphi(x)\,dx$ converge. Cela suffit pour dire que X possède un moment d'ordre k ou que X^k possède une espérance.

R.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, X possède un moment d'ordre k que nous noterons $m_k(X)$.

$\forall k \in \mathbb{N},\ m_k(X) = E(X^k)$.

Si k est impair $m_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x^k \varphi(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} x^k \varphi(x)\,dx = -\int_{0}^{+\infty} x^k \varphi(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} x^k \varphi(x)\,dx = 0$.

si k est impair $m_k(X) = 0$. $\forall r \in \mathbb{N},\ m_{2r+1}(X) = 0$.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = x^{2r-1}$. g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = (2r-1)x^{2r-2}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ x g(x) = x^{2r}$ et $g'(x) = (2r-1)x^{2r-2}$.

Alors $E(Xg(X))$ existe et vaut $m_{2r}(X)$, et $E(g'(X))$ existe et vaut $(2r-1)\, m_{2r-2}(X)$

Alors d'après Q1 $m_{2r}(X) = E(Xg(X)) = E(g'(X)) = (2r-1)\, m_{2r-2}(X)$.

$\forall r \in \mathbb{N}^*,\ m_{2r}(X) = (2r-1)\, m_{2r-2}(X)$. Soit $r \in \mathbb{N}^*$

$\frac{1}{2r-1} m_{2r}(X) = m_{2r-2}(X)$; $\frac{2r}{(2r)(2r-1)} m_{2r}(X) = m_{2r-2}(X)$;

$\frac{2r}{(2r)!} m_{2r}(X) = \frac{1}{(2r-2)!} m_{2r-2}(X)$; $\frac{2^r r!}{(2r)!} m_{2r}(X) = \frac{2^{r-1}(r-1)!}{(2r-2)!} m_{2r-2}(X)$.

Donc la suite $\left(\frac{2^r r!}{(2r)!} m_{2r}(X)\right)_{r \in \mathbb{N}}$ est constante.

Alors $\forall r \in \mathbb{N}$, $\frac{2^r r!}{(2r)!} m_{2r}(X) = \frac{2^0\, 0!}{(2\times 0)!} m_{2\times 0}(X) = m_0(X) = 1$;

$\forall r \in \mathbb{N},\ m_{2r}(X) = \frac{(2r)!}{2^r r!}$. $\forall r \in \mathbb{N},\ m_{2r+1}(X) = 0$.

Notons quand même que $\forall r \in \mathbb{N}^*,\ m_{2r}(X) = (2r-1)(2r-3)\cdots 1 = \prod_{k=1}^{r} (2k-1)$.

R.

Question 11 ESCP 2012 F1 I. KARDASZEWICZ **Déjà vu en 2011**

$(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables alétaoires indépendantes sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ qui suivent la même loi exponentielle de paramètre a.

Soit x un réel strictement positif. Trouver la loi de la variable aléatoire N_x égale à $\mathrm{Min}\{k\in\mathbb{N}^*\mid X_k>x\}$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} P(N_x>E(N_x))$.

Pour être complet nous supposerons que N_x prend la valeur 0 si l'événement $\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}\{X_k\leq x\}$ se réalise. Autrement dit si $\{k\in\mathbb{N}^*\mid X_k>x\}=\emptyset$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}\{X_k\leq x\}\right)\leq P\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k\leq x\}\right)$ par croissance de P...

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}\{X_k\leq x\}\right)\leq \prod_{k=1}^{n}P(X_k\leq x)=(1-e^{-ax})^n$.

↑ Par indépendance

Or $\lim_{n\to+\infty}(1-e^{-ax})^n=0$ car $|1-e^{-ax}|<1$ puisque $0<1-e^{-ax}<1$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $0\leq P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}\{X_k\leq x\}\right)\leq 0$.

Alors $P(N_x=0)=P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}\{X_k\leq x\}\right)=0$. $\underline{P(N_x=0)=0}$.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. $P(N_x=1)=P(X_1>x)=1-P(X_1\leq x)=e^{-ax}$.

Supposons $k\geq 2$. $P(N_x=k)=P(\{X_1\leq x\}\cap\{X_2\leq x\}\cap\dots\cap\{X_{k-1}\leq x\}\cap\{X_k>x\})$.

Par indépendance il vient $P(N_x=k)=P(X_1\leq x)\,P(X_2\leq x)\cdots P(X_{k-1}\leq x)\,P(X_k>x)$.

$P(N_x=k)=(1-e^{-ax})^{k-1}e^{-ax}$. Formule qui vaut pour $k=1$.

Donc $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $P(N_x=k)=(1-e^{-ax})^{k-1}e^{-ax}$. $\underline{N_x \text{ suit la loi géométrique}}$ $\underline{\text{de paramètre } e^{-ax}}$. Notons que $E(N_x)=e^{ax}$

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Posons $r_x=\mathrm{Ent}(e^{ax})+1$.

$$P(N_x>E(N_x))=P(N_x>e^{ax})=P(N_x\geq r_x)=\sum_{k=r_x}^{+\infty}(1-e^{-ax})^{k-1}e^{-ax}.$$

$$P(N_x>E(N_x))=e^{-ax}\sum_{k=0}^{+\infty}(1-e^{-ax})^{k-1+r_x}=e^{-ax}(1-e^{-ax})^{r_x-1}\sum_{k=0}^{+\infty}(1-e^{-ax})^{k}.$$

$$P(N_x>E(N_x))=e^{-ax}(1-e^{-ax})^{r_x-1}\times\frac{1}{1-(1-e^{-ax})}=(1-e^{-ax})^{r_x-1}.$$

$\underline{P(N_x>E(N_x))=(1-e^{-ax})^{r_x-1}}$. $\underline{P(N_x>E(N_x))=(1-e^{-ax})^{\mathrm{Ent}(e^{ax})}}$

$(1-e^{-ax})^{r_x-1} = e^{(r_x-1)\ln(1-e^{-ax})} = e^{\mathrm{Ent}(e^{ax})\ln(1-e^{-ax})}.$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^{ax} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^{-ax} = 0$. Alors $\mathrm{Ent}(e^{ax}) \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} e^{ax}$ et $\ln(1-e^{-ax}) \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} -e^{-ax}$

Alors $\mathrm{Ent}(e^{ax})\ln(1-e^{-ax}) \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} e^{ax}(-e^{-ax}) = -1$.

donc $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \left(\mathrm{Ent}(e^{ax})\ln(1-e^{-ax})\right) = -1$.

Alors par continuité de la fonction exponentielle en -1 on a $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^{\mathrm{Ent}(ax)\ln(1-e^{-ax})} = e^{-1}$.

Ainsi $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} P(N_x > E(N_x)) = e^{-1}$.

R

Question 12 ESCP 2012 $\boxed{\text{F } 1^+}$ J. KY

X est une variable aléatoire à densité de densité $x \to \dfrac{1}{\ln 2}\dfrac{1}{1+x}\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

Montrer que $Y = \dfrac{1}{X} - \text{Ent}\left(\dfrac{1}{X}\right)$ et X ont même loi.

Déjà vu en 2010.
Vu aussi en exercice préparé en 2003 (3.38).

Remarque.. Considérons $f : x \mapsto \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{1+x}\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{1+x} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f est positive sur $\mathbb{R}$ et continue au moins sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$.

$\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt$ et $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ existent et valent 0.

$\int_0^1 f(t)\,dt$ existe car f est continue sur $[0,1]$. $\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{\ln 2}\Big[\ln|1+t|\Big]_0^1 = \frac{\ln 2 - \ln 1}{\ln 2} = 1$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut 1. Ceci achève de montrer que f est une densité de probabilité.

Notons F_X la fonction de répartition de X.

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt = 0$. $\forall x \in [0,1[,\ F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{1+t}\,dt = \left[\frac{\ln|1+t|}{\ln 2}\right]_0^x = \frac{\ln(1+x)}{\ln 2}$

$\forall x \in [1,+\infty[,\ F_X(x) = \int_{-\infty}^0 0\,dt + \int_0^1 \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{1+t}\,dt + \int_1^{+\infty} 0\,dt = \int_0^1 \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{1+t}\,dt = 1$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \frac{\ln(1+x)}{\ln 2} & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}$.

Posons $Z = \frac{1}{X}$. X prend ses valeurs dans $[0,1]$ ... presque sûrement donc Z prend presque sûrement ses valeurs dans $[1,+\infty[$. Notons F_Z sa fonction de répartition.

$\forall x \in]-\infty, 1[,\ F_Z(x) = 0$. Soit $x \in [1,+\infty[$.

$F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = P\left(\frac{1}{X} \leqslant x\right) = P\left(X \geqslant \frac{1}{x}\right) = 1 - P\left(X < \frac{1}{x}\right) = 1 - P\left(X \leqslant \frac{1}{x}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{x}\right)$.

$x > 0$ et X prend presque sûrement ses valeurs dans $]0,1]$

X est une variable aléatoire à densité.

$F_Z(x) = 1 - \frac{\ln(1+1/x)}{\ln 2}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\ln(1+1/x)}{\ln 2} & \text{si } x \in [1,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

R

$Y = Z - \mathrm{Ent}(Z)$ donc Y prend ses valeurs dans $[0,1[$.

Notons F_Y la fonction de répartition de Y. $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_Y(x) = 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $F_Y(x) = 1$.

Posons $T = \mathrm{Ent}(Z)$. Soit $x \in [0,1[$

$(\{T=k\})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet (ou quasi complet) d'événements.

Ainsi $F_Y(x) = P(Y \leq x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{T=k\} \cap \{Y \leq x\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{T=k\} \cap \{Z - T \leq x\})$.

$F_Y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{T=k\} \cap \{Z \leq k+x\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{k \leq Z < k+1\} \cap \{Z \leq k+x\})$.

$F_Y(x) \underset{x<1}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} P(k \leq Z \leq k+x)$. Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\ln(1+1/x)}{\ln 2} & \text{si } x \in [1, +\infty[\\ 0 & \end{cases}$

Notons que l'on a aussi $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1] \\ 1 - \dfrac{\ln(1+1/x)}{\ln 2} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$

$x \mapsto 0$ est de classe C^1 sur $]-\infty, 1]$ et $x \mapsto 1 - \dfrac{\ln(1+1/x)}{\ln 2}$ est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$.

Alors F_Z est de classe C^1 sur $]-\infty, 1]$ et sur $[1, +\infty[$.

donc F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{1\}$. Ainsi Z est une variable aléatoire à densité.

Donc $F_Y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(k \leq Z \leq k+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(k < Z \leq k+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(F_Z(k+x) - F_Z(k)\right)$.

$F_Y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[1 - \dfrac{\ln(1+\frac{1}{k+x})}{\ln 2} - 1 + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{k})}{\ln 2}\right] = \dfrac{1}{\ln 2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) - \ln\left(\dfrac{x+k+1}{k+x}\right)\right]$.

$F_Y(x) = \dfrac{1}{\ln 2} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[(\ln(k+1) - \ln k) - (\ln(x+k+1) - \ln(x+k))\right]$.

$F_Y(x) = \dfrac{1}{\ln 2} \lim_{n\to+\infty} \left(\ln(n+1) - \ln 1 - \ln(x+n+1) + \ln(x+1)\right) = \dfrac{1}{\ln 2} \lim_{n\to+\infty} \left[\ln(1+x) + \ln \dfrac{x+n+1}{n+1}\right]$

Alors $F_Y(x) = \dfrac{1}{\ln 2} \left[\ln(1+x) + \ln 1\right] = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln 2}$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{\ln(1+x)}{\ln 2} & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$. Alors $F_Y = F_X$.

donc $Y = \dfrac{1}{X} - \mathrm{Ent}\left(\dfrac{1}{X}\right)$ a même loi que X.

Exercice.. Notons que $Z = \dfrac{1}{X}$ et $Y = \dfrac{1}{X} - \mathrm{Ent}\left(\dfrac{1}{X}\right)$ sont des variables aléatoires.

R

Question 13 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F } 1^-}$ **E. MESKHI**

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f nulle sur $]-\infty, 0[$ et continue sur $[0, +\infty[$. On suppose que X possède une espérance.

Montre que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(x \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \right) = 0$ et que $\displaystyle E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > t)\,\mathrm{d}t$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall A \in [x,+\infty[$, $\forall t \in [x,A]$, $x f(t) \leq t f(t)$ (car $f(t) \geq 0$).

$\forall A \in [x,+\infty[$, $x\int_x^A f(t)\,dt = \int_x^A x f(t)\,dt \leq \int_x^A t f(t)\,dt$. (*)

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ convergent donc $\int_x^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_x^{+\infty} t f(t)\,dt$ convergent également.

[$E(X)$ existe...

Donc en faisant tendre A vers $+\infty$ dans (*) il vient : $x\int_x^{+\infty} f(t)\,dt \leq \int_x^{+\infty} t f(t)\,dt$.

Mieux $\underline{0 \leq x\int_x^{+\infty} f(t)\,dt \leq \int_x^{+\infty} t f(t)\,dt}$

$\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge donc $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} t f(t)\,dt = 0$ (reste d'une intégrale convergente).

Alors par encadrement on obtient $\underline{\lim_{x\to+\infty}\left(x\int_x^{+\infty} f(t)\,dt\right) = 0}$.

Soit G la restriction de la fonction de répartition F de X à $[0,+\infty[$.

Comme f est continue sur $[0,+\infty[$, G est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et $\forall t \in [0,+\infty[$, $G'(t) = f(t)$.

Soit $x \in [0,+\infty[$.

intégration par parties avec $t \mapsto t$ et $t \mapsto 1-G(t)$ C^1 sur $[0,+\infty[$.

$\int_0^x P(X>t)\,dt = \int_0^x (1-F(t))\,dt = \int_0^x (1-G(t))\,dt = [t(1-G(t))]_0^x - \int_0^x t(0-f(t))\,dt$

$\int_0^x P(X>t)\,dt = x(1-G(x)) + \int_0^x t f(t)\,dt = x(1-F(x)) + \int_0^x t f(t)\,dt = x\int_x^{+\infty} f(t)\,dt + \int_0^x t f(t)\,dt$

$\int_0^x P(X>t)\,dt = x\int_x^{+\infty} f(t)\,dt + \int_0^x t f(t)\,dt$. Or $\lim_{x\to+\infty} \left(x\int_0^x f(t)\,dt\right) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x t f(t)\,dt = E(X)$.

Donc $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x P(X>t)\,dt = E(X)$

Alors $\underline{\int_0^{+\infty} P(X>t)\,dt \text{ converge et vaut } E(X).}$

R

Question 27 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F}}$ Obtenue par un élève.

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. X suit la loi exponentielle de paramètre λ et Y suit la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. $Z = XY$.

Z est-elle une variable aléatoire discrète ? à densité ?

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $A_x = \{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) \leq x\}$. Soit $\omega \in \Omega$.

$$\omega \in A_x \Leftrightarrow X(\omega)Y(\omega) \leq x \Leftrightarrow \begin{cases} Y(\omega) = -1 \text{ et } -X(\omega) \leq x \\ \text{ou} \\ Y(\omega) = 0 \text{ et } 0 \leq x \\ \text{ou} \\ Y(\omega) = 1 \text{ et } X(\omega) \leq x \end{cases}.$$

1er cas.. $x < 0$

$$\omega \in A_x \Leftrightarrow \begin{cases} Y(\omega) = -1 \text{ et } X(\omega) \geq -x \\ \text{ou} \\ Y(\omega) = 1 \text{ et } X(\omega) \leq x \end{cases}$$

Alors $A_x = \left(Y^{-1}(\{-1\}) \cap X^{-1}([-x, +\infty[)\right) \cup \left(Y^{-1}(\{1\}) \cap X^{-1}(]-\infty, x])\right)$.

$Y^{-1}(\{-1\})$, $X^{-1}([-x,+\infty[)$, $Y^{-1}(\{1\})$, $X^{-1}(]-\infty, x])$ sont des éléments de $\mathcal{A}$ car X et Y sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Comme $\mathcal{A}$ est stable par intersection et réunion, $A_x \in \mathcal{A}$.

Par incompatibilité on a $P(A_x) = P(Y^{-1}(\{-1\}) \cap X^{-1}([-x,+\infty[)) + P(Y^{-1}(\{1\}) \cap X^{-1}(]-\infty, x]))$.

Par indépendance il vient $P(A_x) = P(Y^{-1}(\{-1\}))P(X^{-1}([-x,+\infty[)) + P(Y^{-1}(\{1\}))P(X^{-1}(]-\infty, x]))$

$P(A_x) = P(Y=-1)P(X \geq -x) + P(Y=1)P(X \leq x) = P(Y=-1)(1 - P(X < -x)) + P(Y=1)P(X \leq x)$.

$P(A_x) \underset{\uparrow}{=} P(Y=-1)(1 - P(X \leq -x)) + P(Y=1)P(X \leq x) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{3}(1 - (1 - e^{\lambda x})) + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{1}{3} e^{\lambda x}$.

X est une variable à densité

$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ | Y est uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$

2ème cas.. $x \geq 0$.

$$\text{si } \omega \in \Omega : \omega \in A_x \Leftrightarrow \begin{cases} Y(\omega) = -1 \text{ et } X(\omega) \geq -x \\ \text{ou} \\ Y(\omega) = 0 \\ \text{ou} \\ Y(\omega) = 1 \text{ et } X(\omega) \leq x \end{cases}.$$

$A_x = \left(Y^{-1}(\{-1\}) \cap X^{-1}([-x,+\infty[)\right) \cup Y^{-1}(\{0\}) \cup \left(Y^{-1}(\{1\}) \cap X^{-1}(]-\infty, x])\right)$.

X et Y sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ donc $Y^{-1}(\{-1\})$, $X^{-1}([-x,+\infty[)$, $Y^{-1}(\{0\})$, $Y^{-1}(\{1\})$, $X^{-1}(]-\infty, x])$ sont des éléments de $\mathcal{A}$ qui est stable par intersection et réunion.

Alors $A_x \in \mathcal{A}$.

R

Par incompatibilité il vient :

$P(A_x) = P(Y^{-1}(\{-1\}) \cap X^{-1}([x,+\infty[)) + P(Y^{-1}(\{0\})) + P(Y^{-1}(\{1\}) \cap X^{-1}(]-\infty,x]))$.

Par indépendance on obtient :

$P(A_x) = P(Y^{-1}(\{-1\})) P(X^{-1}([x,+\infty[)) + P(Y^{-1}(\{0\})) + P(Y^{-1}(\{1\})) P(X^{-1}(]-\infty,x]))$.

$P(A_x) = P(Y=-1) P(X \geq -x) + P(Y=0) + P(Y=1) P(X \leq x)$.

Notons que $P(Y=-1) = P(Y=0) = P(Y=1) = \frac{1}{3}$, $P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$ et

$P(X \geq -x) = 1 - P(X < -x) = 1 - P(X \leq -x) = 1$.

Alors $P(A_x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(1 - e^{-\lambda x}) = 1 - \frac{1}{3} e^{-\lambda x}$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $Z^{-1}(]-\infty,x]) = A_x \in \mathcal{B}$ donc <u>Z est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$</u>. Notons F_Z sa fonction de répartition.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{-\lambda x} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - \frac{1}{3} e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[. \end{cases}$

$x \mapsto \frac{1}{3} e^{-\lambda x}$ et $x \mapsto 1 - \frac{1}{3} e^{-\lambda x}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc F_Z est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$.

Alors <u>F_Z est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$</u>. $\lim_{x \to 0^-} F_Z(x) = \frac{1}{3} \neq \frac{2}{3} = F_Z(0)$

donc <u>F_Z n'est pas continue en 0</u>.

Ainsi <u>Z n'est pas une variable aléatoire à densité</u>.

F_Z a un point de discontinuité et un seul et Z n'est pas presque sûrement constante donc <u>Z n'est pas une variable aléatoire discrète</u>.