HEC 2005 PARTIES I ET II

Dans tout le texte, Γ est la fonction : $x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Partie I. Une expression de $\mathbf{\Gamma(x)}$

Q1 Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

a) Pour tout réel u tel que $0 \leqslant u < 1$, montrer que $\ln(1-u) \leqslant -u$. *(< 1 ok ?)*

En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0, n]$, l'inégalité : $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$.

b) Étudier les variations de la fonction φ définie sur $[0, \sqrt{n}[$ qui, à tout réel t de $[0, \sqrt{n}[$ associe :

$$\varphi(t) = \ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) - t - n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right).$$

Établir, pour tout réel t de $[0, \sqrt{n}]$, l'inégalité :

$$\left(1-\frac{t^2}{n}\right) e^{-t} \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n.$$

Montrer, en deux lignes, que ceci vaut encore pour t dans $[0, n]$.

c) Justifier, pour tout réel t de $[0, n]$, les inégalités :

$$e^{-t} - \frac{t^2}{n}\, e^{-t} \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}.$$

En déduire *proprement et simplement* que, pour tout réel x strictement positif :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Q2 *Au choix a) ou a')(je conseille a') pour gagner du temps).*

a) Pour tout réel x strictement positif et pour tout entier naturel n non nul, montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 y^{x-1}\,\mathrm{d}y$ et $\displaystyle\int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n\,\mathrm{d}y$ sont convergentes.

On pose alors $B_0(x) = \displaystyle\int_0^1 y^{x-1}\,\mathrm{d}y$ et pour tout n supérieur ou égal à 1, $B_n(x) = \displaystyle\int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n\,\mathrm{d}y$.

a') Pour tout réel x strictement positif et pour tout entier naturel n, montrer que l' intégrale $B_n(x) = \displaystyle\int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n\,\mathrm{d}y$ converge.

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer, *pour tout réel x strictement positif et* pour tout n de $\mathbb{N}^*$ (*ou de* $\mathbb{N}$), l'égalité :

$$B_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}\cdot$$

En déduire, *pour tout réel x strictement positif et* pour tout n de $\mathbb{N}$, la formule :

$$B_n(x) = \frac{\Gamma(x)\times\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)}\cdot$$

c) Montrer que, pour tout réel x strictement positif :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x+n) \sim n^x (n-1)!$, lorsque n tend vers $+\infty$.

d) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $\lambda_n = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$.

Montrer que $\lambda_n \sim \sqrt{\dfrac{2}{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$

e) Écrire en Turbo-Pascal une fonction qui calcule pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}^{+*}$, $\dfrac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

Partie II. Dérivabilité de la fonction Γ et conséquences

Q1 a) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, et pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} (\ln t)^k \, e^{-t} \, \mathrm{d}t$ est absolument convergente. On note $g_k(x)$ la valeur de cette intégrale.

Ici l'énoncé n'est pas très sérieux. On passe b) et c) et on fait b') et c')

b) Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}^{+*}$. Soient x_0 et x deux éléments distincts de $]a, b[$. Établir l'inégalité :

$$\Big|\Gamma(x) - \Gamma(x_0) - (x - x_0)\, g_1(x_0)\Big| \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{2} \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 \big(\sup_{\alpha \in [a,b]} t^{\alpha-1}\big)\, e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

c) Montrer l'inégalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 \big(\sup_{\alpha \in [a,b]} t^{\alpha-1}\big)\, e^{-t} \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (\ln t)^2 t^{a-1} \, e^{-t} \, \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} (\ln t)^2 t^{b-1} \, e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

En déduire que la fonction Γ est dérivable en x_0 et que $\Gamma'(x_0) = g_1(x_0)$.

b') Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}^{+*}$. Soient x_0 et x deux éléments distincts de $]a, b[$.

Soit t un élément de $]0, +\infty[$. Justifier l'existence et donner la valeur de $\sup_{\alpha \in [a,b]} t^{\alpha-1} = \max_{\alpha \in [a,b]} t^{\alpha-1}$ (faire deux cas).

En déduire que $\displaystyle\int_0^1 (\ln t)^2 \big(\sup_{\alpha \in [a,b]} t^{\alpha-1}\big)\, e^{-t} \, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\ln t)^2 \big(\sup_{\alpha \in [a,b]} t^{\alpha-1}\big)\, e^{-t} \, \mathrm{d}t$ convergent .

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 \big(\sup_{\alpha \in [a,b]} t^{\alpha-1}\big)\, e^{-t} \, \mathrm{d}t$ converge.

Soit t un élément de $]0, +\infty[$. Montrer que :

$$|t^{x-1} - t^{x_0-1} - (x - x_0)\,(\ln t)\, t^{x_0-1}| \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{2} (\ln t)^2 \big(\sup_{\alpha \in [a,b]} t^{\alpha-1}\big).$$

Établir l'inégalité :

$$\Big|\Gamma(x) - \Gamma(x_0) - (x - x_0)\, g_1(x_0)\Big| \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{2} \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 \big(\sup_{\alpha \in [a,b]} t^{\alpha-1}\big)\, e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

c') En déduire que la fonction Γ est dérivable en x_0 et que $\Gamma'(x_0) = g_1(x_0)$.

d) Établir que la fonction Γ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $\Gamma' = g_1$.

On montrerait de même que la fonction Γ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et que $\Gamma'' = g_2$. Ce résultat est admis dans toute la suite du problème.

f) Que pensez-vous de "l'inégalité" proposée par la CONcepteur en c) ?

Q2 Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $\gamma_n = -\ln n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\cdot$

a) Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité suivante :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \ln n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a $0 < \gamma_n \leqslant 1$.

b) Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente. On note γ sa limite.

Q3 a) Pour tout réel x strictement positif, et pour tout entier n strictement positif, montrer l'égalité :

$$\prod_{k=1}^{n} \left[\left(1+\frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right] = e^{-x\gamma_n} \times \frac{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{n^x\, n!}$$

b) On pose $v_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1+\frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right]$. Montrer que la suite $\big((v_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note $\ell(x)$ sa limite. Montrer la relation :

$$\ell(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x\,\Gamma(x)}$$

les deux en un, ok ? ?

Q4 a) Soit x un réel strictement positif fixé.

Montrer que la série de terme général $\frac{x}{n} - \ln\big(1+\frac{x}{n}\big)$, $n \geqslant 1$, est convergente.

b) Justifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité :

$$\ln\big(\ell(x)\big) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right].$$

En déduire, pour tout réel x strictement positif, la relation :

$$\ln\big(\Gamma(x)\big) = -\gamma x - \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right].$$

Q5 Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\psi(x) = \frac{\partial}{\partial x}\big[\ln\big(\Gamma(x)\big)\big]$ (*c'est la dérivée de* $\ln\circ\Gamma$).

Établir, pour tout réel x strictement positif l'égalité : $\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}\cdot$

Déterminer un équivalent simple de $\psi(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

Justifier, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la formule :

$$\psi(n) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\cdot$$

Q6 Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on considère la fonction U_n définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$U_n(x) = \ln\big(1+\frac{x}{n}\big) - \frac{x}{n}\cdot$$

On désigne par $A(x)$ la somme de la série de terme général $U_n(x)$.

a) Montrer que A est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. En particulier, exprimer, pour tout réel x strictement positif, $A'(x)$ et $A''(x)$ en fonction de $\Gamma(x)$, $\Gamma'(x)$ et $\Gamma''(x)$.

b) Soit x un réel strictement positif fixé. Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 1, la série de terme général $U_n^{(k)}(x)$ est absolument convergente.

Dans toute la suite du problème, **on admet** les deux résultats suivants : pour tout réel x strictement positif on a

$$A'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n'(x) \text{ et } A''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n''(x).$$

Q7 Calculer $\psi(1)$ en fonction de γ. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(\ln n - \psi(n)\big)$.

Q8 On veut établir dans cette question que pour tout réel y strictement positif, on a $\psi'(y) > \dfrac{1}{y}\cdot$

Soit x un réel strictement positif fixé. On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui, à tout réel t strictement positif, associe $G(t) = \dfrac{1}{(t+x)^2}\cdot$

a) Montrer que sur $\mathbb{R}^{+*}$, G est positive, strictement décroissante, et que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} G(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

b) En déduire la double inégalité : $0 < \displaystyle\int_1^{+\infty} G(t)\,\mathrm{d}t < \sum_{k=1}^{\infty} G(k)$.

c) Établir l'inégalité : $\psi'(x) > \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x^2}\cdot$ Conclure.