Le tout contient :

- Un petit résumé des notions essentielles du programme.
- Quelques pistes de “savoir faire”.
- Quelques question de cours que l’on pourrait poser à l’oral et qu’il faut savoir traiter.

ENSEMBLES et APPLICATIONS

LES NOTIONS ESSENTIELLES

- Appartenance. Inclusion.
- Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E ; union, intersection, complémentaire.
- Produit cartésien de deux ensembles.
- Indicatrice d’une partie d’un ensemble. Opérations sur les parties d’un ensemble et sur leurs fonctions indicatrices.
- Composée de deux applications.
- Restriction et prolongement d’une application.
- Application injective, surjective, bijective.

SAVOIR FAIRE

- Travailler et calculer sur les parties d’un ensemble.
- Utiliser les indicatrices pour travailler et calculer sur les parties d’un ensemble.
- Montrer qu’une application est injective, surjective et bijective.
- Trouver l’application réciproque d’une application bijective.

NOMBRES RÉELS

LES NOTIONS ESSENTIELLES

- Valeur absolue.
- Partie entière.
- Borne supérieure et inférieure.

SAVOIR FAIRE

- Majorer ou minorer la valeur absolue d’une somme ou d’une différence de réels.
- Calculer sur les parties entières.
- Majorer ou minorer une partie de $\mathbb{R}$.
- Justifier l’existence et déterminer la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément ou le plus petit élément d’une partie de $\mathbb{R}$.

NOMBRES COMPLEXES

LES NOTIONS ESSENTIELLES

- Formules trigonométriques.
- Propriétés fondamentales de $\mathbb{C}$. Notation exponentielle.
- Formule d’Euler et de Moivre.

• Racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité.

SAVOIR FAIRE

• Utiliser les complexes pour retrouver des formules trigonométriques.
• Linéariser $\cos^n\theta$, $\sin^n\theta$ et $\sin^p\theta\,\cos^q\theta$.
• Exprimer $\cos(n\,\theta)$ et $\sin(n\,\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
• Utiliser les complexes pour calculer des sommes du type $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\,\theta+\beta)$ ou des produits du type $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\,\pi}{n-1}\right)$.
• Résoudre une équation du second degré à coefficients complexes.
• Trouver les racines $n^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe.

ESPACES VECTORIELS

LES NOTIONS ESSENTIELLES

• Espaces vectoriels (définition, exemples, propriétés immédiates).
• Sous-espaces vectoriels (définitions, caractérisations, exemples, propriétés).
• Sous-espace vectoriel engendré ; familles génératrices. Familles libres, familles liées (définition, caractérisation, propriétés).
• Bases.
• Dimension d'un espace vectoriel, espace vectoriel de dimension finie.
• Théorème de la base incomplète.
• Dimension d'un sous-espace vectoriel. Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels.
• Caractérisations des bases en dimension finie.
• Droites, plans et hyperplans vectoriels.
• Somme directe de sous-espaces (définition et caractérisations).
• Sous-espaces supplémentaires (définition, caractérisations, pratique).
• Rang d'une famille finie de vecteurs.

SAVOIR FAIRE

• Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel.
• Montrer qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.
• Montrer qu'une famille d'éléments d'un espace vectoriel est libre (resp. liée ; resp. génératrice).
• Simplifier le sous-espace vectoriel engendré par une famille. En trouver une base.
• Montrer qu'une famille d'éléments d'un espace vectoriel est une base de cet espace.
• Trouver les coordonnées d'un vecteur dans une base.
• Trouver une base d'un espace vectoriel ou d'un sous-espace vectoriel.
• Trouver la dimension d'un espace vectoriel ou d'un sous-espace vectoriel.
• Utiliser la caractérisation des bases en dimension finie.
• Utiliser le théorème de la base incomplète.
• Extraire une base d'une famille génératrice.
• Montrer que deux ou p sous-espaces vectoriels sont en somme directe.
• Montrer que deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie sont supplémentaires.
• Montrer que deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension quelconque sont supplémentaires. Pratique de l'analyse synthèse.

APPLICATIONS LINÉAIRES

LES NOTIONS ESSENTIELLES

- Application linéaire (définition, vocabulaire, exemples, propriétés immédiates).
- Opérations sur les applications linéaires. Les espaces vectoriels $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$.
- Noyau et image d'une application linéaire.
- Application linéaire bijective ou isomorphisme d'espaces vectoriels (définition, propriétés, caractérisations et caractérisation en dimension finie, espaces vectoriels isomorphes). Ensemble $GL(E)$ des automorphismes de E.
- Théorème du rang.
- Projections et projecteurs, symétrie (définition, propriétés, caractérisation).
- Formes linéaires et hyperplans.
- Détermination d'une application linéaire.

SAVOIR FAIRE

- Montrer qu'une application est linéaire.
- Montrer qu'une application est un endomorphisme.
- Utiliser les propriétés des opérations sur les applications linéaires.
- Trouver l'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.
- Définir analytiquement une application linéaire.
- Trouver le noyau et l'image d'une application linéaire.
- Trouver le rang d'une application linéaire.
- Montrer qu'une application linéaire est injective, surjective, bijective.
- Déterminer la réciproque d'une application linéaire bijective.
- Montrer que deux espaces vectoriels sont isomorphes.
- Construire un isomorphisme pour trouver la dimension d'un espace vectoriel.
- Montrer qu'une application linéaire est une projection (resp. symétrie) et trouver ses éléments.
- Définir analytiquement une projection ou une symétrie.

MATRICES

LES NOTIONS ESSENTIELLES

- Définitions et notations usuelles.
- Matrice d'une famille finie de vecteurs.
- Matrice d'une application linéaire. Isomorphisme avec $\mathcal{L}(E, F)$.
- Matrice ligne et forme linéaire.
- L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Produit matriciel (définition, propriétés, formule du binôme). Lien avec la composition des applications linéaires.
- Définition analytique d'une application linéaire.
- Rang.
- Matrices inversibles (définition, caractérisations, le cas des matrices triangulaires, aspect pratique, lien avec les isomorphismes, l'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$).
- Inversibilité et inversion des matrices $(2, 2)$
- Changement de base, matrice de passage. Matrices semblables.
- Transposée. Transposée d'une somme ou d'un produit. Transposition et inversion. Matrice symétrique.

- Ecriture matricielle d'un système linéaire, structure de l'ensemble des solutions. Système de Cramer.
- Résolution d'un système linéaire par la méthode du Pivot de Gauss.

SAVOIR FAIRE

- Trouver la matrice d'une application linéaire.
- Associer une application linéaire à une matrice.
- Définir analytiquement une application linéaire.
- Utiliser toutes les opérations (et leurs propriétés) sur les matrices.
- Calculer la puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice.
- Trouver le rang d'une matrice.
- Montrer qu'une matrice est inversible. Trouver l'inverse d'une matrice inversible.
- Pratique de l'inversibilité et de l'inversion pour les matrices d'ordre 2.
- Trouver la matrice de passage entre deux bases.
- Utiliser les formules de changement de base.
- Montrer que deux matrices sont semblables.
- Résoudre un système linaire.

RÉDUCTION.

LES NOTIONS ESSENTIELLES

- Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe.
- Endomorphisme diagonalisable.
- Le cas des matrices.

SAVOIR FAIRE

- Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres d'un endomorphisme et d'une matrice.
- Construire une base de vecteurs propres.
- Diagonaliser un endomorphisme ou une matrice.
- Calculer la puissance $p^{\text{ème}}$ d'une matrice.
- Trouver les racines $p^{\text{ème}}$ d'une matrice.

ALGÈBRE BILINÉAIRE.

LES NOTIONS ESSENTIELLES

- Produit scalaire (définition, caractérisations, exemples, propriétés usuelles).
- Norme euclidienne.
- Les produits scalaires canoniques.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.
- Identités remarquables.
- Identités de polarisation (expression du produit scalaire en fonction de la norme).
- Orthogonalité.
- Théorème de Pyhtagore.
- Bases orthogonales et bases orthonormale ou orthonormée.
- Changement de base orthonormée. Matrice orthogonale.

• Procédé d'orthonormalisation de Schmidt (théorie et pratique).
• Orthogonale d'un sous-espace vectoriel.
• Projection orthogonale (théorie et pratique).
• Théorème de meilleure approximation.
• Méthode des moindres carrés.
• Endomorphismes et matrices symétriques.
• Réduction d'un endomorphisme ou d'une matrice symétrique (théorie et pratique).

SAVOIR FAIRE

• Montrer qu'une application est un produit scalaire.
• Développer des produits scalaires.
• Utiliser les identités remarquables.
• Exprimer le produit scalaire en fonction de la norme.
• Construire une base orthogonale (resp. orthonormée) à partir d'une base en utilisant la méthode de Schmidt.
• Calculer des produits scalaires et des normes lorsque l'on travaille dans une base orthonormée.
• Passer d'une base orthonormée à une autre base orthonormée.
• Utiliser Pythagore.
• Trouver l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel ; en particulier d'une droite et d'un hyperplan.
• Définir analytiquement une projection orthogonale.
• Calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel.
• Utiliser une projection orthogonale pour traiter un problème d'optimisation.
• Diagonaliser un endomorphisme (resp. une matrice) symétrique. C'est à dire trouver une base orthonormée de vecteurs propres...
• Gérer les produits scalaires les plus usuels.
• Montrer qu'une matrice symétrique est positive (resp. définie positive) c'est à dire que ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).
• Utiliser la méthode des moindres carrés.

POLYNÔMES.

LES NOTIONS ESSENTIELLES

• Opérations sur les polynômes.
• Division euclidienne.
• Racines, ordre de multiplicité d'une racine.
• Théorème de d'Alembert-Gauss.

SAVOIR FAIRE

• Trouver le produit de deux polynômes.
• Trouver le degré d'un polynôme. Calculer le terme de plus haut degré d'un polynôme.
• Trouver l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.
• Se servir de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.
• Effectuer la division euclidienne d'un polynôme par un autre.
• Se servir de l'unicité proposée par le théorème de la division euclidienne.
• Factoriser un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ ou de $\mathbb{R}[X]$.
• Etudier une suite de polynômes définie par récurrence.

SUITES RÉELLES.

LES NOTIONS ESSENTIELLES

- Le vocabulaire des suites. Propriétés usuelles.
- Suites convergentes et définition de $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. Unicité de la limite.
- Opérations algébriques sur les suites ayant une limite.
- Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre. Existence d'une limite par encadrement.
- Suites adjacentes.
- Théorème de la limite monotone.
- Tout réel est limite d'une suite de rationnels ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).
- Limite de suites et limite de fonctions.
- Suites négligeables. Suites équivalentes.
- Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.
- Suites vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2.
- Suites définies par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

SAVOIR FAIRE

- Montrer en utilisant la définition et les indications du texte que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Utiliser la définition des limites pour obtenir des majorations, des minorations et des encadrements.
- Utiliser correctement le théorème d'encadrement.
- Exploiter toutes les propriétés d'un couple de suites adjacentes.
- Construire une suite en utilisant la dichotomie.
- Trouver une suite simple équivalente à une suite donnée.
- Trouver une suite simple négligeable devant une suite donnée ou l'inverse.
- Travailler avec aisance sur les suites équivalentes (ou négligeables).
- Montrer qu'une fonction n'a pas de limite en utilisant des suites.
- Calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Étudier une suite arithmético-géométrique.
- Étudier une suite définie par une relation linéaire de récurrence d'ordre 2.
- Étudier une suite définie par une relation d'équivalence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Calculer u_n à partir de $u_{k+1} - u_k$.
- Utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

SÉRIES.

LES NOTIONS ESSENTIELLES

- Définitions usuelles.
- Convergence. Somme et reste d'une série convergente.
- Comparaison des séries à termes positifs. La CNS de convergence d'une série à termes positifs et les trois critères de comparaison.
- Convergence absolue.
- Séries de Riemann. Séries géométriques. Série exponentielle.

SAVOIR FAIRE

- Calculer des sommes de séries simples.
- Utiliser la C.N.S. de convergence d'une série à termes positifs.
- Utiliser les critères de comparaison des séries à termes positifs.
- Utiliser le fait que la suite de terme général u_n est de même nature que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$
- Trouver la nature et éventuellement la somme d'une combinaison linéaire de séries.
- Faire du "pilotage riemannien".
- Faire du "pilotage géométrique".
- Utiliser des intégrales pour encadrer (ou trouver un équivalent) des sommes partielles d'une série.
- Utiliser des intégrales pour encadrer (ou trouver un équivalent) le reste d'une série convergente.
- Etudier une fonction définie par une série.
- Permuter une somme infinie et une intégrale.
- Traiter des séries alternées.
- Traiter du produit de Cauchy.

LIMITE ET CONTINUITÉ D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE.

NOTIONS ET RÉSULTATS ESSENTIELS

- Vocabulaire et propriétés usuelles sur les fonctions numériques d'une variable réelle.
- Définition de la continuité. Notion de limite. Unicité de la limite.
- Limite à droite et à gauche.
- Caractérisation séquentielle de la limite.
- Opérations algébriques sur les limites et sur les fonctions continues. Limite d'une fonction composée.
- Compatibilité avec la relation d'ordre. Existence d'une limite par encadrement.
- Fonction négligeable devant une autre au voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$.
- Fonctions équivalentes au voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$.
- Comparaison des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes au voisinage de l'infini.
- Comparaison des fonctions puissances et logarithmes en 0.
- Théorème de la limite monotone.
- Théorème des valeurs intermédiaires.
- Image d'un segment par une fonction continue.
- Théorème de la bijection.

SAVOIR FAIRE

- Montrer qu'une fonction a ou n'a pas de limite en un point.
- Utiliser la définition de la notion de limite (ou de continuité) pour obtenir des majorations, des minorations ou des encadrements de fonctions.
- La distinction entre le théorème d'encadrement et le théorème de passage à la limite.
- Utiliser les théorèmes de la limite monotone, des valeurs intermédiaires, de la bijection...
- Trouver un équivalent simple d'une fonction au voisinage d'un point.
- Utiliser la négligeabilité pour trouver une limite ou un équivalent.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

NOTIONS ET RÉSULTATS ESSENTIELS

- Dérivée en un point, développement limité à l'ordre 1 et approximation affine au voisinage d'un point.

- Dérivée à droite et à gauche.
- Opérations algébriques sur les fonctions dérivables. Composition.
- Dérivation des fonctions réciproques.
- Définition et dérivation de la fonction arctan.
- Théorème de Rolle. Égalité et inégalité des accroissements finis.
- Caractérisation des fonctions constantes, des fonctions monotones dérivables.
- Dérivées successives. Opérations algébriques, formule de leïbniz.
- Fonctions convexes (resp. concaves) : définition et caractérisations.

SAVOIR FAIRE

- Montrer en utilisant la définition qu'une fonction est dérivable en un point.
- Calculer la dérivée d'une composée.
- Etudier la dérivabilité et calculer la dérivée de la réciproque d'une fonction.
- Utiliser Rolle pour donner des zéros aux dérivée successives d'une fonction.
- Utiliser le théorème ou l'inégalité des accroissements finis pour obtenir des inégalités.
- Utiliser la formule de leïbniz.
- Calculer les dérivée successives d'un quotient.
- Utiliser la convexité et la concavité pour obtenir des inégalités.
- Utiliser le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$.
- Utiliser les dérivées successives pour trouver l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme

---

CALCUL INTÉGRAL.

NOTIONS ET RÉSULTATS ESSENTIELS

- Intégrale des fonctions en escalier positives. Intégrale des fonctions continues positives. Intégrale des fonctions continues.
- Propriétés usuelles de l'intégrale (linéarité, Chasles, positivité et croissance).
- Sommes de Riemann.
- Intégrale des fonctions continues par morceaux.
- Primitive d'une fonction sur un intervalle.
- L'équation différentielle $f'(x) = a(x)\, f(x)$ ou $y' = a\, y$.
- Prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$.
- Intégration par parties. Changement de variable.
- Formule de Taylor avec reste intégral. Formule de Taylor-Lagrange. Inégalité de Taylor-Lagrange. Formule de Taylor-Young.

SAVOIR FAIRE

- Calculer des intégrales simples.
- Majorer, minorer, encadrer une intégrale.
- Utiliser les variations d'une fonction pour encadrer son intégrale.
- Faire une intégration par parties.
- Faire un changement de variable.
- Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée de $x \to \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Montrer et utiliser Cauchy-Schwarz. Étudier le cas d'égalité pour des fonctions continues.
- Utiliser des sommes de Riemann.
- Utiliser les différentes formules de Taylor.

• Utiliser le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$.
• Majorer l'erreur dans une méthode de calcul approché d'une intégrale.
• Étudier une fonction définie par une intégrale.
• Dériver sous le signe somme.
• Permuter une somme infinie et une intégrale.
• Montrer et utiliser que, lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\alpha t)\,\mathrm{d}t=0$.
• Montrer et utiliser que, lorsque f est continue (ou bornée) sur $[0,1]$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t)\,t^n\,\mathrm{d}t=0$.
• Montrer qu'une fonction est continue par morceaux et calculer son intégrale sur un segment.
• Étudier un endomorphisme défini à l'aide d'une intégrale.
• Encadrer une somme (finie ou infinie) en utilisant des intégrales.
• Maitriser la technique de linéarisation pour calculer des intégrales faisant intervenir des fonctions circulaires.

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS.

NOTIONS ET RÉSULTATS ESSENTIELS

• Définition.
• Somme, produit et composition de développements limités.
• Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.
• Les cinq développements limités du programme.

SAVOIR FAIRE

• Faire une somme, un produit, une composée de développements limités.
• Utiliser la formule de Taylor-Young pour trouver des développements limités.
• Utiliser des développements limités pour trouver un équivalent d'une suite ou d'une fonction au voisinage d'un point.
• Utiliser des développements limités pour trouver la limite d'une suite ou d'une fonction en un point.
• Utiliser des développements limités pour étudier le comportement asymptotique d'une fonction.
• Utiliser l'unicité d'un développement limité.
• Limiter l'utilisation des développements limités !

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES.

NOTIONS ET RÉSULTATS ESSENTIELS

• Définitions et premiers éléments.
• Propriétés usuelles : Chasles, linéarité, croissance, reste,...
• Les références. Intégrale de Riemann.
• Intégration par parties. Changement de variable.
• Le cas des fonctions positives. La condition nécessaire et suffisante de convergence, les critères de comparaison, l'absolue convergence.
• La fonction Gamma.
• Séries et intégrales sur un intervalle quelconque.

SAVOIR FAIRE

• Montrer la convergence d'une intégrale généralisée.

• Calculer des intégrales généralisées simples.
• Majorer, minorer, encadrer une intégrale généralisée.
• Utiliser l'intégration par parties pour obtenir la nature ou la valeur d'une intégrale généralisée.
• Utiliser un changement de variable pour obtenir la nature ou la valeur d'une intégrale généralisée.
• Utiliser les intégrales du programme pour obtenir la nature ou la valeur d'une intégrale généralisée.
• Etudier une fonction définie par une intégrale généralisée.
• Dériver sous le signe somme.
• Permuter une somme infinie et une intégrale généralisée.
• Faire du pilotage riemannien.
• Utiliser des intégrales généralisées pour encadrer (ou trouver un équivalent) des sommes partielles d'une série.
• Utiliser des intégrales généralisées pour encadrer (ou trouver un équivalent) du reste d'une série.
• Pour a non nul et $\alpha > 0$ savoir établir la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(at+b)}{t}\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(at+b)}{t}\,\mathrm{d}t$.
• Utiliser des densités de probabilités connues pour calculer des intégrales (exemple : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\,t^2+b\,t+c}\,\mathrm{d}t$ avec $a > 0$).

FONCTIONS NUMÉRIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES.

NOTIONS ET RÉSULTATS ESSENTIELS

• Norme euclidienne. Distance euclidienne.
• Boules, ouverts, fermés.
• Quelques propiétés des ouverts et des fermés.
• Droites affines, sous-espaces affines, hyperplans affines.
• Segments. Partie convexe.
• Partie bornée.
• Graphe d'une fonction numérique définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$.
• Adhérence d'une partie
• Limite, continuité, prolongement par continuité.
• Opérations de base sur les fonctions continues. Fonctions continues usuelles.
• Les théorèmes d'encadrement.
• Compositions et fonctions continues.
• Image réciproque d'un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}$ par une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
• Fonction continue sur un fermé borné.
• Applications partielles. Dérivées partielles premières.

• Fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Gradient.
• Les opérations de base et la première composition.
• Notion d'extremum. La condition nécessaire d'extremum local.
• Développement limité d'ordre 1. Approximation locale par une fonction affine.
• La seconde composition ; dérivée d'une fonction de la forme $t \to f\big(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t))\big)$. Cas particulier de $t \to f(A + t\,U)$. Dérivées directionnelles premières.
• Le théorème des accroissements finis.
• Dérivées partielles d'ordre 2. Fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Opérations.
• Théorème de Schwarz.
• Dérivée directionnelle seconde.
• Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1.
• Développement limité d'ordre 2. Le cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

• La condition suffisante d'extremum local.
• Détermination d'extremums sous contraintes d'égalités linéaires (le problème, la condition nécessaire, ...).

SAVOIR FAIRE

• Savoir montrer qu'une partie de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert (resp. fermé) ;
• Savoir montrer qu'une partie de $\mathbb{R}^n$ est convexe ;
• Montrer qu'une partie de $\mathbb{R}^n$ est fermée et bornée.
• Montrer la continuité d'une fonction "assez simple" de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
• Montrer qu'une fonction a ou n'a pas de limite en un point.
• Montrer l'existence de dérivées partielles premières (resp. seconde) d'une fonction "assez simple" de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
• Calculer des dérivées partielles premières et secondes.
• Calculer des dérivées directionnelles.
• Ecrire le gradient en un point d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
• Ecrire la hesienne en un point d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.
• Ecrire un dl1 en un point d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
• Ecrire un dl2 en un point d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.
• Calculer la dérivée ou les dérivées partielles d'une "fonction composée".
- $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. n dérivées partielles de $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \varphi\Big(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big)$.
- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dérivée de $t \to f(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t))$.
• Etudier les extremums d'une fonction assez simple.
• Etudier la position du graphe d'une fonction par rapport à un hyperplan tangent.
• Etudier des extremums sous contrainte d'égalités linéaires.

ALGORITHMIQUE.

NOTIONS ESSENTIELLES

• Variables et types (integer, real, boolean, array).
• Opérations élémentaires (:=, =, >, <, >=, <=, <>, +, −, ∗, /, and, or, not).
• Fonctions usuelles (div, mod, ln, exp, trunc, abs, sqrt, sin, cos).
• Structures de bases (if...then, for...to...do, for...to...downto, while...do, repeat...until).
• Procédures et fonctions. Passage des paramètres par valeur ou par variable.
• Récursivité.

SAVOIR FAIRE (ici c'est exactement le programme à l'orthographe près)

• Calculs de sommes et de produits.
• Calcul de termes d'une suite récurrente.
• Calculs de valeurs approchées de la somme d'une série.
• Calcul approché de la racine d'une équation du type $f(x) = 0$.
• Mise en œuvre de l'algorithme de dichotomie.
• Écriture et utilisation de fonctions servant pour des dénombrements classiques : n^p, $n!$, $\binom{n}{p}$.
• Calcul de la valeur d'un polynôme de haut degré. Principe et mise en œuvre de l'algorithme d'Hörner. Comparaison de l'efficacité de cet algorithme à ceux utilisant les puissances.
• Utilisation du générateur aléatoire random, random (n) et de l'instruction randomize pour simuler des phénomènes aléatoires.
• Écriture de fonctions PASCAL simulant des variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[\![n_1, n_2]\!]$, une loi de Bernoulli de paramètre p et une loi binomiale de paramètres n et p.

• Calcul approché de la valeur d'une intégrale.

• Calcul des termes d'une suite du "type $u_{n+1} = f(u_n)$".

• Recherche de la valeur et du rang des extremums d'une liste.

• Recherche dichotomique d'un élément d'une liste ordonnée.

DÉNOMBREMENT.

NOTIONS ET RÉSULTATS ESSENTIELS

• Ensembles équipotents.
• Ensemble fini et cardinal d'un ensemble fini.
• Ensemble dénombrable.
• Parties d'un ensemble fini. Parties à p éléments d'un ensemble fini. Formule du binôme de Newton.
• Union, intersection, produit d'ensembles finis.
• p-listes, p-listes d'éléments distincts.
• Applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini, injections, bijections et permutations.
• Formules classiques sur les coefficients binomiaux.
• Formule du crible, de Vandermonde, ...).

SAVOIR FAIRE

• Utiliser la formule du binôme.
• Utiliser les propriétés des $\binom{n}{p}$.
• Reconnaître les sommes classiques.
• Calculer des sommes classiques.
• Trouver le cardinal d'un ensemble en le mettant en bijection avec un ensemble de cardinal connu.
• Construire une partition d'un ensemble en sous-ensembles simples afin de le dénombrer.
• Etablir (ou démontrer) des formules de récurrence sur les cardinaux.
• Reconnaître des thèmes classiques sous des habillages moins classiques...

PROBABILITÉS.

NOTIONS ET RÉSULTATS ESSENTIELS

• Expérience alétoire. Généralités sur les événements.
• Algèbre d'événements. Algèbre engendrée par une famille d'événements.
• Tribu ou σ-algèbre d'événements et espace probabilisable.
• Tribu engendrée par une famille d'événements
• Probabilité et espace probabilisé.
• Système complet (resp. quasi-complet) d'événements.
• Propriétés d'une probabilité. Probabilité d'une réunion, formule de Pointcaré ou du crible. Limite monotone.
• Probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable. Cas de l'équiprobabilité.
• Ensemble négligeable. Propriété vraie presque sûrement.
• Probabilités conditionnelles : définition, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.
• Indépendance de deux événements.
• Tribus indépendantes.

• Indépendance (mutuelle) de n événements ou d'une suite infinie d'événements

SAVOIR FAIRE

• Montrer qu'un ensemble de parties est une algèbre ou une tribu.
• Montrer qu'une application est une probabilité.
• Utiliser la σ-additivité.
• Utiliser la formule du crible.
• Utiliser la limite monotone.
• Définir et exploiter un système complet d'événements.
• Utiliser les formules classiques des probabilités conditionnelles.
• Utiliser l'indépendance d'événements ou de tribus.
• Montrer l'indépendance d'événements ou de tribus.
• Montrer qu'un ensemble est négligeable ou qu'une propriété est vraie presque sûrement.

VARIABLES ALÉATOIRES.

NOTIONS ET RÉSULTATS ESSENTIELS

• Notion de variable aléatoire réelle discrète.
• Variable aléatoire réelle discrète finie ou infinie.
• Système complet et σ-algèbre associés à une variable aléatoire réelle discrète.
• Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle discrète.
• Fonction de répartition (définition et propriétés).
• Opérations sur les variables aléatoires réelles discrètes.
• Variable alétoire $Y = g \circ X$.
• Espérance d'une variable aléatoire discrète. Théorème de transfert.
• Espérance conditionnelle (définition, propriétés, les théorème fondamentaux).
• Moments et moments centrés d'ordre r.
• Variance et écart-type.
• Variable centrée et variable centrée réduite.
• Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
• Les exemples classiques de variables aléatoires réelles discrètes : loi de Bernoulli, loi binomiale, loi hypergéométrique, loi uniforme, loi géométrique, loi de Poisson.

SAVOIR FAIRE

• Montrer qu'une application est une variable aléatoire.
• Montrer qu'une application est une loi de probabilité.
• Trouver la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète.
• Trouver la loi d'une variable aléatoire réelle discrète.
• Etudier une variable aléatoire du type $Y = g \circ X$.
• Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle discrète finie.
• Justifier l'existence et calculer l'espérance (resp. la variance) d'une variable aléatoire réelle discrète infinie.
• Utiliser le théorème de transfert pour justifier l'existence et calculer une espérance.
• Ecrire une variable aléatoire comme combinaison linéaire de variables de Bernoulli pour calculer son espérance.
• Utiliser la fonction génératrice d'une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ pour calculer son espérance.
• Justifier, au sens des épreuves de concours qu'une application X est bien (!) une variable aléatoire reélle.
• Modifier une variable aléatoire réelle pour se ramener à une variable aléatoire réelle qui suit une loi classique.
• Démontrer Bienaymé-Tchebychev.

• Utiliser Bienaymé-Tchebychev.

VECTEURS ALÉATOIRES.

NOTIONS ET RÉSULTATS ESSENTIELS

• Variable aléatoire et vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (définition et caractérisations).

• Tribu des événements liés à une variable aléatoire ou un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

• Fonction de répartition d'une variable aléatoire ou d'un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

• Variable aléatoire discrète et vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (définition et caractérisations).

• Système complet et tribu associés à un vecteur aléatoire discret.
• Loi conjointe, lois marginales et lois conditionnelles associées à un vecteur aléatoire discret.
• Variable aléatoires indépendantes (définition et caractérisations).
• Caractérisation de l'indépendance de variables aléatoires discrètes.
• Espérance conditionnelle. Espérance conditionnelle et système complet.
• Loi de $Z = g(X, Y)$. Loi d'une somme et d'un produit.
• Somme de deux variables alétoires indépendantes qui suivent les lois binômiales de paramètres n et p, et m et p.
• Somme de deux variables alétoires indépendantes qui suivent des lois de Poisson.
• Espérance de $Z = g(X, Y)$.
• Espérance d'une somme de variables aléatoires discrètes. Linéarité et croissance de l'espérance.
• Espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes. Espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes indépendantes.
• Covariance de deux variables aléatoires discrètes (définition et propriétés).
• Variance de la somme de deux variables aléatoires discrètes finies. Cas de l'indépendance.
• Variance de la somme de n variables aléatoires discrètes finies indépendantes.
• Matrice de covariance.
• Coefficient de corrélation.

SAVOIR FAIRE

• Déterminer les lois marginales à partir de la loi conjointe.
• Déterminer les lois conditionnelles à partir de la loi conjointe.
• Déterminer la loi conjointe à partir d'une loi et et des lois conditionnelles de l'autre loi.
• Utiliser l'indépendance de variables aléatoires.
• Montrer l'indépendance de variables aléatoires.
• Trouver la loi d'une somme et son espérance.
• Trouver la loi d'un produit et son espérance.
• Trouver la loi de $Z = g(X, Y)$ et son espérance.
• Calculer une covariance.
• Calculer la variance d'une somme.
• Écrire une variable aléatoire comme somme ou combinaison linéaire de variables de Bernoulli pour en calculer l'espérance (resp. la variance).
• Utiliser les propriétés de la covariance.

• Trouver la matrice de covariance d'un n-uplet de variables aléatoires.

• Utiliser les espérances conditionnelles pour trouver une espérance.

VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ.

NOTIONS ET RÉSULTATS ESSENTIELS

• Variable aléatoire à densité. Densités d'une variable aléatoire à densité.

• Propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

• Caractérisation de la fonction de répartition d'une variables aléatoires à densité.

• Caractérisation d'une variables aléatoires à densité.

• Notion de densité de probabilité. Caractérisation d'une densité d'une variables aléatoires à densité.

• Etude de $\varphi \circ X$.

• Moment d'une variable aléatoire à densité. Espérance et variance d'une variable aléatoire à densité.

• Théorème de transfert.

• Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

• Somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes.

• Lois classiques (uniforme, exponentielle, gamma, normale).

• Somme de deux variables alétoires indépendantes qui suivent les lois gamma de paramètres b et ν_1, et b et ν_2. Généralisation à n variables.

• Somme de deux variables alétoires indépendantes qui suivent des lois normales. Généralisation à une combinaison linéaire de n variables.

SAVOIR FAIRE

• Savoir montrer qu'une application est une densité de probabilité.

• Savoir, si X est une variable aléatoire à densité, passer d'une densité de X à sa fonction de répartition et réciproquement.

• Savoir montrer qu'une variable aléatoire est une variable aléatoire à densité et en trouver une densité.

• Savoir montrer qu'une variable aléatoire à densité possède une espérance (resp. une variance) et savoir la calculer.

• Si X est une variable aléatoire à densité et φ est une fonction numérique d'une variable réelle, savoir montrer que $\varphi \circ X$ est une variable aléatoire à densité et savoir en trouver une densité.

• Si X est une variable aléatoire à densité et φ est une fonction numérique d'une variable réelle, savoir montrer que $\varphi \circ X$ possède une espérance et savoir la calculer.

• Savoir trouver une densité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes à densité.

• Savoir trouver une densité du produit ou du quotient de deux variables aléatoires indépendantes à densité.

• Savoir reconnaître une densité ou la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité usuelle.

• Savoir utiliser la parité d'une densité d'une variable aléatoire pour en calculer les moments.

• Savoir utiliser les moments des variables aléatoires du programme pour calculer des intégrales.

• Savoir utiliser les densités des lois normales pour calculer des intégrales du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2+bt+c)}\,dt$ $(a > 0)$.

• Savoir étudier $Y = [X]$ (partie entière) et $Z = X - [X]$ où X est une variable aléatoire à densité.

• Savoir démontrer et utiliser les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

CONVERGENCE ET APPROXIMATION.

NOTIONS ET RÉSULTATS ESSENTIELS

• Convergence en probabilité.

• Une condition suffisante de convergence en probabilité.

• Loi faible des grands nombres.
• La convergence en loi.
• La convergence en probabilité donne la convergence en loi. La réciproque est fausse.
• La convergence en loi pour les variables aléatoires discrètes.
• Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binômiale.
• Approximation d'une loi binômiale par une loi de Poisson. Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires suivant la loi binomiale de paramètres n et $\frac{n}{\lambda}$ vers une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ.
• Théorème de la limite centrée.
• Approximation d'une loi binômiale par une loi de normale.
• Approximation d'une loi de Poisson par une loi de normale.

SAVOIR FAIRE

• Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour montrer une convergence en probabilité (cas où $E(X-X_n)=0$ et $\lim_{n\to+\infty} V(X-X_n)=0$).
• Utiliser l'inégalité de Markov pour montrer une convergence en probabilité (cas où $\lim_{n\to+\infty} E(X-X_n)=0$ et $\lim_{n\to+\infty} V(X-X_n)=0$).
• Trouver la fonction d'une variable aléatoire pour obtenir de la convergence en loi.
• Utiliser les lois de probailités pour obtenir de la convergence en loi.
• Traiter les situations usuelles au niveau de la convergence en loi (discret vers du discret "connu", discret vers du discret "inconnu", discret vers du continu "connu", discret vers du continu "inconnu", continu vers du continu "connu", continu vers du continu "inconnu")
• Montrer qu'une application est la fonction de répartition d'une variable aléatoire ou d'une variable aléatoire à densité.
• Montrer qu'une application est une loi de probabilité discrète.
• Utiliser le théorème de la limite centrée.
• Utiliser les approximations du programme pour donner des valeurs approchées de probabilité ou pour traiter des problèmes "concrets".

STATISTIQUE DESCRIPTIVE SIMPLE.

NOTIONS ET RÉSULTATS ESSENTIELS

• Notion de population et d'individus, d'échantillon observé.
• Caractère ou variable statistique. Caractère qualitatif, quantitatif.
• Série statistique discrète ou continue associée à un échantillon.
• Description d'une série statistique : effectifs, fréquences, fréquences cumulées.
• Représentations graphiques : diagramme en batôns, histogramme.
• Caractéristiques de position (moyenne, médiane, mode(s))
• Caractéristiques de dispersion (variance, écart-type, quartiles, déciles).

SAVOIR FAIRE

• Regrouper une série statistique en classe.
• Dessiner un diagramme en bâtons ou un histogramme.
• Calculer une moyenne, une médiane, des mode(s), une variance, un ćart-type, des quartiles, des déciles.

STATISTIQUE DESCRIPTIVE BIVARIÉE.

NOTIONS ET RÉSULTATS ESSENTIELS

- Observation conjointe de deux caractères sur un échantillon de taille n de la population.
- Nuage de points associé. Point moyen du nuage.
- Fréquences marginales. Fréquences conditionnelles.
- Caractéristiques d'une série statistique double : covariance, coefficient de corrélation.
- Ajustement linéaire. Droite de régression.

SAVOIR FAIRE

- Calculer des fréquences marginales, des fréquences conditionnelles.
- Représenter le nuage de points associé à une série statistique double.
- Calculer la covariance et le coefficient de corrélation d'une série statistique double.
- Faire des ajustements linéaires, puissances ou exponentiels.

ESTIMATION.

NOTIONS ET RÉSULTATS ESSENTIELS

- Echantillon i.i.d. de taille n d'une loi.
- Estimateur (resp. estimation).
- Biais d'un estimateur. Estimateur sans biais. Estimateur asymptotiquement sans biais.
- Risque quadratique d'un estimateur.
- Estimateur convergent.
- Notion d'intervalle de confiance.
- Estimation par intervalle de confiance du paramètre d'une variable de Bernoulli.
- Estimation par intervalle de confiance de l'espérance d'une loi normale d'écart-type donné.

SAVOIR FAIRE

- Calculer le biais et le risque quadratique d'un estimateur.
- Montrer qu'un estimateur est sans biais ou asymptotiquement sans biais.
- Montrer qu'un estimateur est convergent.
- Construire un intervalle de confiance du paramètre d'une variable de Bernoulli.
- Construire un intervalle de confiance de l'espérance d'une loi normale d'écart-type donné.

ANALYSE

Q.1 Valeur absolue d'un réel.

Q.2 Partie entière d'un réel.

Q.3 Suite convergente.

Q.4 Suites adjacentes.

Q.5 Construction de suites adjacentes par dichotomie.

Q.6 Borne supérieure et inférieure pour une partie non vide de $\mathbb{R}$ (resp. pour une fonction numérique.)

Q.8 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Q.9 Notion de limite (deux services au moins : suites et fonctions).

Q.10 Existence de limite par encadrement (deux services au moins)

Q.11 Suite vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2.

Q.12 Suite négligeable devant une autre suite.

Q.13 Suites équivalentes.

Q.14 Négligeablilités usuelles (deux services).

Q.15 Équivalents usuels (deux services).

Q.16 Limite de fonctions et limite de suites.

Q.17 Suites $u_{n+1} = f(u_n)$.

Q.18 CNS de convergence pour une série à termes positifs.

Q.19 Comparaison des séries à termes positifs.

Q.20 L'absolue convergence (en deux services : séries, intégrales)

Q.21 Les séries du programme.

Q.22 La notion de limite pour une fonction numérique d'une ou plusieurs variables.

Q.23 La notion de continuité pour une fonction numérique d'une ou plusieurs variables.

Q.24 Limite à droite, à gauche.

Q.25 La limite monotone (en trois services)

Q.27 Caractérisation séquentielle de la notion de limite.

Q.28 Composition des fonctions continues pour les fonctions d'une ou plusieurs variables.

Q.29 Limite d'une composée pour les fonctions d'une ou plusieurs variables.

Q.30 Fonction négligeable devant une autre au voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$.

Q.31 Fonctions équivalentes au voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$.

Q.32 Théorème des valeurs intermédiaires.

Q.33 Image d'un segment par une fonction continue.

Q.34 Théorème de la bijection.

Q.35 Dérivée en un point, développement limité à l'ordre 1 et approximation affine au voisinage d'un point.

Q.37 Composition des fonctions dérivables, D^p, $\mathcal{C}^p$ et $\mathcal{C}^\infty$.

Q.38 Dérivation et réciproque. ★

Q.39 Formule de Leïbniz.

Q.40 Théorème de Rolle.

Q.41 Égalité et inégalité des accroissements finis.

Q.42 Définition et dérivation de la fonction arctan.

Q.43 Prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (resp. $\mathcal{C}^p$)

Q.44 Théorème de la limite de la dérivée.

Q.45 Fonctions convexes (resp. concaves) : définitions et caractérisations.

Q.46 Formule$\boxed{\text{s}}$ de Taylor. Inégalité de Taylor-Lagrange.

Q.47 Intégrale d'une fonction en escalier positive. Intégrale d'une fonction continue positive. Intégrale d'une fonction continue.

Q.48 Propriétés de l'intégrale.

Q.49 Notion de primitive.

Q.50 Sommes de Riemann.

Q.51 Fonction continue par morceaux ; intégrale d'une fonction continue par morceaux. ★

Q.52 L'équation différentielle $y' + a\,y = 0$.

Q.53 Développements limités : définition, somme, produit et composition.

Q.54 Les 5 développements limités du programme.

Q.55 Formule de Taylor-Young.

Q.56 Intégrale sur un intervalle quelconque.

Q.57 Notion de reste (deux services).

Q.58 CNS de convergence pour l'intégrale d'une fonction positive.

Q.59 Critères de comparaison pour les intégrales généralisées de fonctions positives.

Q.60 Le théorème de changement de variable. ★

Q.61 Théorème intégrale-série.

Q.62 La fonction gamma.

Q.63 Droites, segments, convexes, parties bornées de $\mathbb{R}^n$.

Q.64 Boules, ouverts, fermés de $\mathbb{R}^n$.

Q.65 Graphe d'une fonction de plusieurs variables.

Q.66 Ensembles de niveau d'une fonction de plusieurs variables.

Q.67 Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé de $\mathbb{R}^n$ par une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Q.68 Fonction continue sur un fermé borné.

Q.69 Dérivées partielles premières secondes. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (resp. $\mathcal{C}^2$).

Q.70 Dérivées directionnelles premières et secondes. .

Q.71 Théorèmes de composition au niveau de la dérivation.

Q.72 Développement limité d'ordre 1 (resp. 2) ; formule de Taylor-Young à l'ordre 1 (resp. 2).

Q.73 Fonction affine tangente ; hyperplan affine tangent.

Q.74 Notion de gradient et de Hessienne.

Q.75 Théorème des accroissements finis.

Q.76 Théorème de Schwarz.

Q.77 Égalité de Taylor à l'ordre 1.

Q.78 Notion d'extremums.

Q.79 Extremums : condition nécessaire pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert.

Q.80 Extremums : condition suffisante pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert. ★

Q.81 Position du graphe d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à son hyperplan tangent.

Q.82 Extremums sous contrainte d'égalités linéaires : condition nécessaire pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert.

ALGÈBRE

Q.83 Application injective, surjective et bijective.

Q.84 Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble : définition et utilité

Q.85 Formule$\boxed{\text{s}}$ du binôme.

Q.86 Formules d'Euler et de Moivre.

Q.87 Formules trigonométriques.

Q.88 Racines $n^{\text{ème}}$ d'un complexe.

Q.89 Produit de deux polynômes.

Q.90 Ordre de multiplicité d'une racine.

Q.91 Division euclidienne.

Q.92 Théorème de d'Alembert.

Q.93 Algorithme d'Horner.

Q.94 Notion de sous-espace vectoriel.

Q.95 Famille libre, liée, génératrice.

Q.96 Bases. Dimension.

Q.97 Caractérisation des bases en dimension finie.

Q.98 Théorème de la base incomplète.

Q.99 Somme directe de p sous-espaces.

Q.100 **Sous-espaces supplémentaires.**

Q.101 **Sous-espaces stable par un endomorphisme ; cas où l'espace est somme directe de sous-espaces stables ; carcatérisation matricielle.**

Q.102 **Théorème (ou formule) du rang.**

Q.103 **Projection, projecteur.**

Q.104 **Symétrie.**

Q.105 **Isomorphisme. Caractérisation des isomorphismes.**

Q.106 **Notion de rang.**

Q.107 **Forme linéaire et hyperplan.**

Q.108 **GL(E) et $\mathbf{GL}_n(\mathbf{K})$.**

Q.109 **Notion de matrice.**

Q.110 **Le produit matriciel.**

Q.111 **Matrice inversible.**

Q.112 **Changement de base, matrice de passage. Changement de base orthonormée.**

Q.113 **Matrices semblables.**

Q.114 **Polynômes d'endomorphismes ou de matrices. Polynômes annulateurs ; existence d'un polynôme annulateur non nul.**

Q.115 **Eléments propres.**

Q.116 **Définition d'un endomorphisme (resp d'une matrice) diagonalisable. Caractérisation.**

Q.117 **Interprétation matricielle d'un système linéaire.**

Q.118 **Méthode du pivot de Gauss.**

Q.119 **Produit scalaire : définition, exemples, norme associée.**

Q.120 **Bases othonormées : définition, existence ; coordonnées et norme d'un vecteur dans une base orthonormée.**

Q.121 **Expression matricielle du produit scalaire et de la norme euclidienne en base orthonormée.**

Q.122 **Identitées remarquables dans un espace prélhibertien.**

Q.123 **Sous-espaces orthogonaux ; orthogonal d'un sous-espace.**

Q.124 **Théorème de Pythagore.**

Q.125 **Inégalité de Cauchy-Schwarz. Cas d'égalité.**

Q.126 **Orthonormalisation de Schmidt.**

Q.127 **Projection orthogonale. Meilleure approximation.**

Q.128 **Méthode des moindres carrés.**

Q.129 **Matrice orthogonale.**

Q.130 **Endomorphisme symétrique : définition, propriétés, caractérisation. Matrice symétrique.**

Q.131 **Réduction d'un endomorphisme symétrique (resp. d'une matrice symétrique).**

Q.132 **Expression d'une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à partir d'une base orthonormée de vecteurs propres.**

Q.133 **Forme quadratique de $\mathbb{R}^n$ associée à un endomorphisme symétrique ou à une matrice symétrique.**

DÉNOMBREMENT, PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Q.134 **Parties d'un ensemble à n éléments.**

Q.135 **Parties à p éléments d'un ensemble à n éléments. Formule du binôme. Triangle de Pascal.**

Q.136 **p-liste d'un ensemble à n éléments. Occurrences d'un élément dans une p-liste.**

Q.137 **p-liste sans répétition d'un ensemble à n éléments. Permutation.**

Q.138 **Algèbre d'événements. Algèbre engendrée par une famille d'événements.**

Q.139 **Espace probabilisable, espace probabilisé.**

Q.140 **Tribu ou σ-algèbre engendrée par une famille d'événements.**

Q.141 **Système complet d'événements. Tribu ou σ-algèbre engendrée par un système complet d'événements.**

Q.142 **Formule du crible ou de Poincaré.**

Q.143 **Limite monotone.**

Q.144 **Ensemble négligeable, propriété vraie presque sûrement.**

Q.145 **Probabilités conditionnelles : définition et formules usuelles.**

Q.146 **σ-algèbres indépendantes.**

Q.147 **Indépendance mutuelle de n événement ou d'une suite d'événements.** ★

Q.148 **Tribu des boréliens. Générateur de la tribu des boréliens.**

Q.149 **Variable aléatoire : définition, caractérisations, propriétés.**

Q.150 **Variable aléatoire discrète : définition, caractérisation, propriétés.**

Q.151 **Fonction indicatrice d'une partie, d'un événement. Opérations.**

Q.152 **Opérations usuelles sur les variables aléatoires.**

Q.153 **σ-algèbre associée à une variable aléatoire.**

Q.154 **Système complet et σ-algèbre associés à une variable aléatoire discrète.**

Q.155 **Fonction de répartition d'une variable aléatoire : définition, propriétés, caractérisation.**

Q.156 **Loi de probabilité.**

Q.157 **Espérance, variance, moment d'ordre r moment centré d'ordre r d'une variable aléatoire discrète.**

Q.158 **Loi de $\mathbf{Z} = \mathrm{g}(\mathbf{X})$. Théorème$\boxed{\text{s}}$ de transfert.** ★

Q.159 **Espérances conditionnelles : définition et théorèmes fondamentaux.** ★

Q.160 **Les lois discrètes usuelles.**

Q.161 **Vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbb{R}^n$; définition, loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles.**

Q.162 **Système complet et σ-algèbre associés à une vecteur aléatoire discret.**

Q.163 **Loi de $\mathbf{Z} = \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$; cas de la somme et du produit.**

Q.164 **Espérance de $\mathbf{Z} = \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ et théorème de transfert. Cas de la somme et du produit** ★

Q.165 **Linéarité et croissance de l'espérance.**

Q.166 **Covariance : définition et propriétés.**

Q.167 **Variance d'une somme.**

Q.168 **Matrice de covariance.**

Q.169 **Coefficient de corrélation. Cas où il vaut 1 ou -1.**

Q.170 **Indépendance mutuelle de n variables aléatoires ou d'une suite de variables aléatoires. Le cas discret.** ★

Q.171 **Stabilité des ensembles des lois binômiales et de Poisson.**

Q.172 **Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev (cas discret et continu).**

Q.173 **Matrice de covariance.**

Q.174 **Coefficient de corrélation.**

Q.175 **Variables aléatoires à densité : Définition, propriétés, caratérisation.**

Q.176 **Caratérisation de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.**

Q.177 **Densité de probabilité.**

Q.178 **Densité$\boxed{\text{s}}$ d'une variable aléatoire à densité.**

Q.179 **Espérance, variance, moment d'ordre r moment centré d'ordre r d'une variable aléatoire à densité.**

Q.180 **Loi de $\varphi(X)$ et théorème de transfert.** ★

Q.181 **Densité de la somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes.** ★

Q.182 **Lois uniformes sur un intervalle .**

Q.183 **Lois gamma. Stabilité pour la somme**

Q.184 **Lois normales. Transformées affines des lois normales. Stabilité pour la somme.**

Q.185 **Caractérisation d'une loi exponentielle par l'absence de mémoire.**

Q.186 **Définition des deux convergences.**

Q.187 **Loi faible des grands nombres.**

Q.188 **Théorème de la limite centrée.**

Q.189 **Convergence en loi pour une var discrète.**

Q.190 **Convergence d'une suite de variable aléatoire suivant la loi binômiale de paramètres n et $\frac{\lambda}{\mathbf{n}}$.**

Q.191 **Approximations usuelles (les quatre du programme).**

Q.192 Notion d'estimateur.

Q.193 Biais d'un estimateur. Estimateur sans biais. Estimateur asymptotiquement sans biais. Risque quadratique d'un estimateur

Q.194 Moyenne empirique.

Q.195 Estimateur convergent.

Q.196 Intervalle de confiance.

Q.197 Estimation par intervalle de confiance du paramètre d'une variable de Bernoulli.

Q.198 Estimation par intervalle de confiance de l'espérance d'une loi normale d'écart-type donné.

Q.199 Notions de population, d'individus, d'échantillon de caractère.

Q.200 Série statistique. Description d'une série statistique (effectifs, fréquences, fréquences cumulées). Représentation d'une série statistique (diagramme en bâtons, histogramme).

Q.201 Caractéristiques de position d'une série statistique : moyenne, médiane, mode(s).

Caractéristiques de dispersion : variance, écart-type, quartiles, déciles.

Q.202 Série statistique double. Nuage de points associé ; point moyen du nuage.

Q.203 Groupement de termes et description d'une série statistique double. Tableau des effectifs ou des fréquences. Fréquences marginales et fréquences conditonnelles.

Q.204 Caractéristiques d'une série statistique double : covariance et coefficient de corrélation.

Q.205 Droites de régression.

ALGORITHMIQUE

Q.206 Variables et types (integer, real, boolean, array).

Q.207 Opérations élémentaires (: =, =, >, <, >=, <=, <>, +, −, ∗, /, and, or, not).

Q.208 Fonctions usuelles (div, mod, ln, exp, trunc, abs, sqrt, sin, cos).

Q.209 Structures de bases (if...then, for...to...do, for...to...downto, while...do, repeat...until).

Q.210 Procédures et fonctions.

Q.211 Passage des paramètres en valeur et en variable. Notion de variables locales et globales.

Q.212 Fonctions et procédures récursives.

Q.213 Calculs de sommes et de produits. Calcul de termes d'une suite récurrente. Calculs de valeurs approchées de la somme d'une série. Calcul approché de la racine d'une équation du type $\mathbf{f(x) = 0}$. Mise en œuvre de l'algorithme de dichotomie. Comparaison de cet algorithme à ceux utilisant la puissance.

Q.214 Écriture et utilisation de fonctions servant pour des dénombrements classiques : n^p, $n!$, $\binom{n}{p}$.

Q.215 Calcul de la valeur d'un polynôme de haut degré. Principe et mise en œuvre de l'algorithme d'Hörner.

Q.216 Utilisation du générateur aléatoire random, random (n) et de l'instruction randomize pour simuler des phénomènes aléatoires. Écriture de fonctions PASCAL simulant des variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[\![n_1, n_2]\!]$, une loi de Bernoulli de paramètre p et une loi binomiale de paramètres n et p, une loi uniforme sur $[a, b]$.

Q.217 Recherche de la valeur et du rang des extremums d'une liste. Recherche dichotomique d'un élément dans une liste ordonnée.

À compléter...