Le tout contient :

- Un petit résumé des notions essentielles du programme.
- Quelques pistes de "savoir faire".
- Quelques question de cours que l'on pourrait poser à l'oral et qu'il faut savoir traiter.

ENSEMBLES et APPLICATIONS

LES NOTIONS ESSENTIELLES

- Appartenance. Inclusion.
- Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E ; union, intersection, complémentaire.
- Produit cartésien de deux ensembles.
- Indicatrice d'une partie d'un ensemble. Opérations sur les parties d'un ensemble et sur leurs fonctions indicatrices.
- Composée de deux applications.
- Restriction et prolongement d'une application.
- Application injective, surjective, bijective.

SAVOIR FAIRE

- Travailler et calculer sur les parties d'un ensemble.
- Utiliser les indicatrices pour travailler et calculer sur les parties d'un ensemble.
- Montrer qu'une application est injective, surjective et bijective.
- Trouver l'application réciproque d'une application bijective.

NOMBRES RÉELS

LES NOTIONS ESSENTIELLES

- Valeur absolue.
- Partie entière.
- Borne supérieure et inférieure.

SAVOIR FAIRE

- Majorer ou minorer la valeur absolue d'une somme ou d'une différence de réels.
- Calculer sur les parties entières.
- Majorer ou minorer une partie de $\mathbb{R}$.
- Justifier l'existence et déterminer la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément ou le plus petit élément d'une partie de $\mathbb{R}$.

NOMBRES COMPLEXES

LES NOTIONS ESSENTIELLES

- Formules trigonométriques.
- Propriétés fondamentales de $\mathbb{C}$. Notation exponentielle.
- Formule d'Euler et de Moivre.
- Racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité.

SAVOIR FAIRE

• Utiliser les complexes pour retrouver des formules trigonométriques.
• Linéariser $\cos^n \theta$, $\sin^n \theta$ et $\sin^p \theta \cos^q \theta$.
• Exprimer $\cos(n\,\theta)$ et $\sin(n\,\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
• Utiliser les complexes pour calculer des sommes du type $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\,\theta+\beta)$ ou des produits du type $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\,\pi}{n-1}\right)$.
• Résoudre une équation du second degré à coefficients complexes.
• Trouver les racines $n^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe.

ESPACES VECTORIELS

LES NOTIONS ESSENTIELLES

• Espaces vectoriels (définition, exemples, propriétés immédiates).
• Sous-espaces vectoriels (définitions, caractérisations, exemples, propriétés).
• Sous-espace vectoriel engendré ; familles génératrices. Familles libres, familles liées (définition, caractérisation, propriétés).
• Bases.
• Dimension d'un espace vectoriel, espace vectoriel de dimension finie.
• Théorème de la base incomplète.
• Dimension d'un sous-espace vectoriel. Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels.
• Caractérisations des bases en dimension finie.
• Droites, plans et hyperplans vectoriels.
• Somme directe de sous-espaces (définition et caractérisations).
• Sous-espaces supplémentaires (définition, caractérisations, pratique).
• Rang d'une famille finie de vecteurs.

SAVOIR FAIRE

• Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel.
• Montrer qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.
• Montrer qu'une famille d'éléments d'un espace vectoriel est libre (resp. liée ; resp. génératrice).
• Simplifier le sous-espace vectoriel engendré par une famille. En trouver une base.
• Montrer qu'une famille d'éléments d'un espace vectoriel est une base de cet espace.
• Trouver les coordonnées d'un vecteur dans une base.
• Trouver une base d'un espace vectoriel ou d'un sous-espace vectoriel.
• Trouver la dimension d'un espace vectoriel ou d'un sous-espace vectoriel.
• Utiliser la caractérisation des bases en dimension finie.
• Utiliser le théorème de la base incomplète.
• Extraire une base d'une famille génératrice.
• Montrer que deux ou p sous-espaces vectoriels sont en somme directe.
• Montrer que deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie sont supplémentaires.
• Montrer que deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension quelconque sont supplémentaires. Pratique de l'analyse synthèse.

APPLICATIONS LINÉAIRES

LES NOTIONS ESSENTIELLES

• Application linéaire (définition, vocabulaire, exemples, propriétés immédiates).

• Opérations sur les applications linéaires. Les espaces vectoriels $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(E)$.

• Noyau et image d'une application linéaire.

• Application linéaire bijective ou isomorphisme d'espaces vectoriels (définition, propriétés, caractérisations et caractérisation en dimension finie, espaces vectoriels isomorphes). Ensemble $GL(E)$ des automorphismes de E.

• Théorème du rang.

• Projections et projecteurs, symétrie (définition, propriétés, caractérisation).

• Formes linéaires et hyperplans.

• Détermination d'une application linéaire.

SAVOIR FAIRE

• Montrer qu'une application est linéaire.

• Montrer qu'une application est un endomorphisme.

• Utiliser les propriétés des opérations sur les applications linéaires.

• Trouver l'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.

• Définir analytiquement une application linéaire.

• Trouver le noyau et l'image d'une application linéaire.

• Trouver le rang d'une application linéaire.

• Montrer qu'une application linéaire est injective, surjective, bijective.

• Déterminer la réciproque d'une application linéaire bijective.

• Montrer que deux espaces vectoriels sont isomorphes.

• Construire un isomorphisme pour trouver la dimension d'un espace vectoriel.

• Montrer qu'une application linéaire est une projection (resp. symétrie) et trouver ses éléments.

• Définir analytiquement une projection ou une symétrie.

MATRICES

LES NOTIONS ESSENTIELLES

• Définitions et notations usuelles.

• Matrice d'une famille finie de vecteurs.

• Matrice d'une application linéaire. Isomorphisme avec $\mathcal{L}(E,F)$.

• Matrice ligne et forme linéaire.

• L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

• Produit matriciel (définition, propriétés, formule du binôme). Lien avec la composition des applications linéaires.

• Définition analytique d'une application linéaire.

• Rang.

• Matrices inversibles (définition, caractérisations, le cas des matrices triangulaires, aspect pratique, lien avec les isomorphismes, l'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$).

• Inversibilité et inversion des matrices $(2,2)$

• Changement de base, matrice de passage. Matrices semblables.

• Transposée. Transposée d'une somme ou d'un produit. Transposition et inversion. Matrice symétrique.

• Ecriture matricielle d'un système linéaire, structure de l'ensemble des solutions. Système de Cramer.

• Résolution d'un système linéaire par la méthode du Pivot de Gauss.

SAVOIR FAIRE

• Trouver la matrice d'une application linéaire.

• Associer une application linéaire à une matrice.

• Définir analytiquement une application linéaire.
• Utiliser toutes les opérations (et leurs propriétés) sur les matrices.
• Calculer la puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice.
• Trouver le rang d'une matrice.
• Montrer qu'une matrice est inversible. Trouver l'inverse d'une matrice inversible.
• Pratique de l'inversibilité et de l'inversion pour les matrices d'ordre 2.
• Trouver la matrice de passage entre deux bases.
• Utiliser les formules de changement de base.
• Montrer que deux matrices sont semblables.
• Résoudre un système linaire.

RÉDUCTION.

LES NOTIONS ESSENTIELLES
• Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme.
• Les sous-espaces propres sont en somme directe.
• Endomorphisme diagonalisable.
• Le cas des matrices.

SAVOIR FAIRE
• Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres d'un endomorphisme et d'une matrice.
• Construire une base de vecteurs propres.
• Diagonaliser un endomorphisme ou une matrice.
• Calculer la puissance $p^{\text{ème}}$ d'une matrice.
• Trouver les racines $p^{\text{ème}}$ d'une matrice.

POLYNÔMES.

LES NOTIONS ESSENTIELLES
• Opérations sur les polynômes.
• Division euclidienne.
• Racines, ordre de multiplicitéé d'une racine.
• Théorème de d'Alembert-Gauss.

SAVOIR FAIRE
• Trouver le produit de deux polynômes.
• Trouver le degré d'un polynôme. Calculer le terme de plus haut degré d'un polynôme.
• Trouver l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.
• Se servir de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.
• Effectuer la division euclidienne d'un polynôme par un autre.
• Se servir de l'unicité proposée par le théorème de la division euclidienne.
• Factoriser un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ ou de $\mathbb{R}[X]$.
• Etudier une suite de polynômes définie par récurrence.

SUITES RÉELLES.

LES NOTIONS ESSENTIELLES

• Le vocabulaire des suites. Propriétés usuelles.
• Suites convergentes et définition de $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. Unicité de la limite.
• Opérations algébriques sur les suites ayant une limite.
• Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre. Existence d'une limite par encadrement.
• Suites adjacentes.
• Théorème de la limite monotone.
• Tout réel est limite d'une suite de rationnels ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).
• Limite de suites et limite de fonctions.
• Suites négligeables. Suites équivalentes.
• Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.
• Suites vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2.
• Suites définies par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

SAVOIR FAIRE

• Montrer en utilisant la définition et les indications du texte que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
• Utiliser la définition des limites pour obtenir des majorations, des minorations et des encadrements.
• Utiliser correctement le théorème d'encadrement.
• Exploiter toutes les propriétés d'un couple de suites adjacentes.
• Construire une suite en utilisant la dichotomie.
• Trouver une suite simple équivalente à une suite donnée.
• Trouver une suite simple négligeable devant une suite donnée ou l'inverse.
• Travailler avec aisance sur les suites équivalentes (ou négligeables).
• Montrer qu'une fonction n'a pas de limite en utilisant des suites.
• Calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.
• Étudier une suite arithmético-géométrique.
• Étudier une suite définie par une relation linéaire de récurrence d'ordre 2.
• Étudier une suite définie par une relation d'équivalence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
• Calculer u_n à partir de $u_{k+1} - u_k$.
• Utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

SÉRIES.

LES NOTIONS ESSENTIELLES

• Définitions usuelles.
• Convergence. Somme et reste d'une série convergente.
• Comparaison des séries à termes positifs. La CNS de convergence d'une série à termes positifs et les trois critères de comparaison.
• Convergence absolue.
• Séries de Riemann. Séries géométriques. Série exponentielle.

SAVOIR FAIRE

• Calculer des sommes de séries simples.
• Utiliser la C.N.S. de convergence d'une série à termes positifs.

• Utiliser les critères de comparaison des séries à termes positifs.
• Utiliser le fait que la suite de terme général u_n est de même nature que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$
• Trouver la nature et éventuellement la somme d'une combinaison linéaire de séries.
• Faire du "pilotage riemannien".
• Faire du "pilotage géométrique".
• Utiliser des intégrales pour encadrer (ou trouver un équivalent) des sommes partielles d'une série.
• Utiliser des intégrales pour encadrer (ou trouver un équivalent) le reste d'une série convergente.
• Etudier une fonction définie par une série.
• Permuter une somme infinie et une intégrale.
• Traiter des séries alternées.
• Traiter du produit de Cauchy.

LIMITE ET CONTINUITÉ D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE.

NOTIONS ET RÉSULTATS ESSENTIELS

• Vocabulaire et propriétés usuelles sur les fonctions numériques d'une variable réelle.
• Définition de la continuité. Notion de limite. Unicité de la limite.
• Limite à droite et à gauche.
• Caractérisation séquentielle de la limite.
• Opérations algébriques sur les limites et sur les fonctions continues. Limite d'une fonction composée.
• Compatibilité avec la relation d'ordre. Existence d'une limite par encadrement.
• Fonction négligeable devant une autre au voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$.
• Fonctions équivalentes au voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$.
• Comparaison des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes au voisinage de l'infini.
• Comparaison des fonctions puissances et logarithmes en 0.
• Théorème de la limite monotone.
• Théorème des valeurs intermédiaires.
• Image d'un segment par une fonction continue.
• Théorème de la bijection.

SAVOIR FAIRE

• Montrer qu'une fonction a ou n'a pas de limite en un point.
• Utiliser la définition de la notion de limite (ou de continuité) pour obtenir des majorations, des minorations ou des encadrements de fonctions.
• La distinction entre le théorème d'encadrement et le théorème de passage à la limite.
• Utiliser les théorèmes de la limite monotone, des valeurs intermédiaires, de la bijection...
• Trouver un équivalent simple d'une fonction au voisinage d'un point.
• Utiliser la négligeabilité pour trouver une limite ou un équivalent.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

NOTIONS ET RÉSULTATS ESSENTIELS

• Dérivée en un point, développement limité à l'ordre 1 et approximation affine au voisinage d'un point.
• Dérivée à droite et à gauche.
• Opérations algébriques sur les fonctions dérivables. Composition.
• Dérivation des fonctions réciproques.
• Définition et dérivation de la fonction arctan.

• Théorème de Rolle. Égalité et inégalité des accroissements finis.
• Caractérisation des fonctions constantes, des fonctions monotones dérivables.
• Dérivées successives. Opérations algébriques, formule de leïbniz.
• Fonctions convexes (resp. concaves) : définition et caractérisations.

SAVOIR FAIRE

• Montrer en utilisant la définition qu'une fonction est dérivable en un point.
• Calculer la dérivée d'une composée.
• Etudier la dérivabilité et calculer la dérivée de la réciproque d'une fonction.
• Utiliser Rolle pour donner des zéros aux dérivée successives d'une fonction.
• Utiliser le théorème ou l'inégalité des accroissements finis pour obtenir des inégalités.
• Utiliser la formule de leïbniz.
• Calculer les dérivée successives d'un quotient.
• Utiliser la convexité et la concavité pour obtenir des inégalités.
• Utiliser le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$.
• Utiliser les dérivées successives pour trouver l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme

---

CALCUL INTÉGRAL.

NOTIONS ET RÉSULTATS ESSENTIELS

• Intégrale des fonctions en escalier positives. Intégrale des fonctions continues positives. Intégrale des fonctions continues.
• Propriétés usuelles de l'intégrale (linéarité, Chasles, positivité et croissance).
• Sommes de Riemann.
• Intégrale des fonctions continues par morceaux.
• Primitive d'une fonction sur un intervalle.
• L'équation différentielle $f'(x) = a(x)\, f(x)$ ou $y' = a\, y$.
• Prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$.
• Intégration par parties. Changement de variable.
• Formule de Taylor avec reste intégral. Formule de Taylor-Lagrange. Inégalité de Taylor-Lagrange. Formule de Taylor-Young.

SAVOIR FAIRE

• Calculer des intégrales simples.
• Majorer, minorer, encadrer une intégrale.
• Utiliser les variations d'une fonction pour encadrer son intégrale.
• Faire une intégration par parties.
• Faire un changement de variable.
• Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée de $x \to \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$.
• Montrer et utiliser Cauchy-Schwarz. Étudier le cas d'égalité pour des fonctions continues.
• Utiliser des sommes de Riemann.
• Utiliser les différentes formules de Taylor.
• Utiliser le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$.
• Majorer l'erreur dans une méthode de calcul approché d'une intégrale.
• Étudier une fonction définie par une intégrale.
• Dériver sous le signe somme.
• Permuter une somme infinie et une intégrale.

• Montrer et utiliser que, lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\alpha t)\,\mathrm{d}t = 0$.
• Montrer et utiliser que, lorsque f est continue (ou bornée) sur $[0,1]$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t)\,t^n\,\mathrm{d}t = 0$.
• Montrer qu'une fonction est continue par morceaux et calculer son intégrale sur un segment.
• Étudier un endomorphisme défini à l'aide d'une intégrale.
• Encadrer une somme (finie ou infinie) en utilisant des intégrales.
• Maitriser la technique de linéarisation pour calculer des intégrales faisant intervenir des fonctions circulaires.

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS.

NOTIONS ET RÉSULTATS ESSENTIELS
• Définition.
• Somme, produit et composition de développements limités.
• Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.
• Les cinq développements limités du programme.

SAVOIR FAIRE
• Faire une somme, un produit, une composée de développements limités.
• Utiliser la formule de Taylor-Young pour trouver des développements limités.
• Utiliser des développements limités pour trouver un équivalent d'une suite ou d'une fonction au voisinage d'un point.
• Utiliser des développements limités pour trouver la limite d'une suite ou d'une fonction en un point.
• Utiliser des développements limités pour étudier le comportement asymptotique d'une fonction.
• Utiliser l'unicité d'un développement limité.
• Limiter l'utilisation des développements limités !

FONCTIONS NUMÉRIQUES DE DEUX VARIABLES.

NOTIONS ET RÉSULTATS ESSENTIELS
• Droites et segments de $\mathbb{R}^2$.
• Produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^2$ Ingalité de Cauchy-Schwarz. Norme et distance euclidienne.
• Boules, ensembles ouverts, ensembles fermés.
• Parties bornées de $\mathbb{R}^2$. Parties convexes de $\mathbb{R}^2$
• Graphe d'une fonction numérique définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$.
• Continuité d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Opération sur les fonctions continues.
• Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une fonction continue.
• Fonction continue sur un fermé borné.
• Dérivées partielles en un point. Gradient en un point.
• Approximation locale par une fonction affine. Développement limité d'ordre 1 en un point. Fonction affine tangente. Plan tangent.
• Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert.
• Existence d'un développement limité d'ordre 1 en un point pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert.
• Dérivée d'une fonction de la forme $t \to f\big(u(t), v(t)\big)$. Cas particulier de $\mathbf{t} \to \mathbf{f}(\mathbf{A} + \mathbf{t}\,\mathbf{U})$.
• Dérivée directionnelle en un point.

SAVOIR FAIRE
• Montrer qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert (resp. fermé).

- Montrer qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ est convexe.
- Montrer qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ est fermée et bornée.
- Montrer la continuité d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
- Montrer qu'une fonction a ou n'a pas de limite en un point.
- Montrer l'existence de dérivées partielles premières d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
- Calculer des dérivées partielles premières.
- Calculer des dérivées directionnelles.
- Ecrire le gradient en un point d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
- Ecrire un dl1 en un point d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
- Dériver une fonction du type $t \to f\big(u(t), v(t)\big)$.

ALGORITHMIQUE.

NOTIONS ESSENTIELLES

- Variables et types (integer, real, boolean, array).
- Opérations élémentaires (:=, =, >, <, >=, <=, <>, +, −, ∗, /, and, or, not).
- Fonctions usuelles (div, mod, ln, exp, trunc, abs, sqrt, sin, cos).
- Structures de bases (if...then, for...to...do, for...to...downto, while...do, repeat...until).
- Procédures et fonctions.

SAVOIR FAIRE (ici c'est exactement le programme à l'orthographe près)

- Calculs de sommes et de produits.
- Calcul de termes d'une suite récurrente.
- Calculs de valeurs approchées de la somme d'une série.
- Calcul approché de la racine d'une équation du type $f(x) = 0$.
- Mise en œuvre de l'algorithme de dichotomie.
- Écriture et utilisation de fonctions servant pour des dénombrements classiques : n^p, $n!$, $\binom{n}{p}$.
- Calcul de la valeur d'un polynôme de haut degré. Principe et mise en œuvre de l'algorithme d'Hörner. Comparaison de l'efficacité de cet algorithme à ceux utilisant les puissances.
- Utilisation du générateur aléatoire random, random (n) et de l'instruction randomize pour simuler des phénomènes aléatoires.
- Écriture de fonctions PASCAL simulant des variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[\![n_1, n_2]\!]$, une loi de Bernoulli de paramètre p et une loi binomiale de paramètres n et p.

STATISTIQUE DESCRIPTIVE.

NOTIONS ET RÉSULTATS ESSENTIELS

- Notion de population et d'individus, d'échantillon observé.
- Caractère ou variable statistique. Caractère qualitatif, quantitatif.
- Série statistique discrète ou continue associée à un échantillon.
- Description d'une série statistique : effectifs, fréquences, fréquences cumulées.
- Représentations graphiques : diagramme en batôns, histogramme.
- Caractéristiques de position (moyenne, médiane, mode(s))
- Caractéristiques de dispersion (variance, écart-type, quartiles, déciles).

SAVOIR FAIRE

- Regrouper une série statistique en classe.

• Dessiner un diagramme en bâtons ou un histogramme.
• Calculer une moyenne, une médiane, des mode(s), une variance, un ćart-type, des quartiles, des déciles.

DÉNOMBREMENT.

NOTIONS ET RÉSULTATS ESSENTIELS
• Ensembles équipotents.
• Ensemble fini et cardinal d'un ensemble fini.
• Ensemble dénombrable.
• Parties d'un ensemble fini. Parties à p éléments d'un ensemble fini. Formule du binôme de Newton.
• Union, intersection, produit d'ensembles finis.
• p-listes, p-listes d'éléments distincts.
• Applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini, injections, bijections et permutations.
• Formules classiques.

SAVOIR FAIRE
• Utiliser la formule du binôme.
• Utiliser les propriétés des $\binom{n}{p}$.
• Reconnaître les sommes classiques.
• Calculer des sommes classiques.
• Trouver le cardinal d'un ensemble en le mettant en bijection avec un ensemble de cardinal connu.
• Construire une partition d'un ensemble en sous-ensembles simples afin de le dénombrer.
• Etablir (ou démontrer) des formules de récurrence sur les cardinaux.
• Reconnaître des thèmes classiques sous des habillages moins classiques...

PROBABILITÉS.

NOTIONS ET RÉSULTATS ESSENTIELS
• Expérience alétoire. Généralités sur les événements.
• Algèbre d'événements. Algèbre engendrée par une famille d'événements.
• Tribu ou σ-algèbre d'événements et espace probabilisable.
• σ-algèbre engendrée par une famille d'événements
• Probabilité et espace probabilisé.
• Système complet (resp. quasi-complet) d'événements.
• Propriétés d'une probabilité. Probabilité d'une réunion, formule de Pointcaré ou du crible. Limite monotone.
• Probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable. Cas de l'équiprobabilité.
• Ensemble négligeable. Propriété vraie presque sûrement.
• Probabilités conditionnelles : définition, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.
• Indépendance de deux événements.
• σ-algèbres indépendantes.
• Indépendance mutuelle de n événements ou d'une suite infinie d'événements

SAVOIR FAIRE
• Montrer qu'un ensemble de parties est une algèbre ou une σ-algèbre.
• Montrer qu'une application est une probabilité.
• Utiliser la σ-additivité.

- Utiliser la formule du crible.
- Utiliser la limite monotone.
- Définir et exploiter un système complet d'événements.
- Utiliser les formules classiques des probabilités conditionnelles.
- Utiliser l'indépendance d'événements ou de σ-algèbres.
- Montrer l'indépendance d'événements ou de σ-algèbres.
- Montrer qu'un ensemble est négligeable ou qu'une propriété est vraie presque sûrement.

VARIABLES ALÉATOIRES.

NOTIONS ET RÉSULTATS ESSENTIELS

- Notion de variable aléatoire réelle discrète.
- Variable aléatoire réelle discrète finie ou infinie.
- Système complet et σ-algèbre associés à une variable aléatoire réelle discrète.
- Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle discrète.
- Fonction de répartition (définition et propriétés).
- Opérations sur les variables aléatoires réelles discrètes.
- Variable alétoire $Y = g \circ X$.
- Espérance d'une variable aléatoire discrète. Théorème de transfert.
- Moments et moments centrés d'ordre r.
- Variance et écart-type.
- Variable centrée et variable centrée réduite.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Les exemples classiques de variables aléatoires réelles discrètes : loi de Bernoulli, loi binomiale, loi hypergéométrique, loi uniforme, loi géométrique, loi de Poisson.

SAVOIR FAIRE

- Montrer qu'une application est une variable aléatoire.
- Montrer qu'une application est une loi de probabilité.
- Trouver la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète.
- Trouver la loi d'une variable aléatoire réelle discrète.
- Etudier une variable aléatoire du type $Y = g \circ X$.
- Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle discrète finie.
- Justifier l'existence et calculer l'espérance (resp. la variance) d'une variable aléatoire réelle discrète infinie.
- Utiliser le théorème de transfert pour justifier l'existence et calculer une espérance.
- Ecrire une variable aléatoire comme combinaison linéaire de variables de Bernoulli pour calculer son espérance.
- Utiliser la fonction génératrice d'une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ pour calculer son espérance.
- Justifier, au sens des épreuves de concours qu'une application X est bien (!) une variable aléatoire reélle.
- Modifier une variable aléatoire réelle pour se ramener à une variable aléatoire réelle qui suit une loi classique.
- Démontrer Bienaymé-Tchebychev.
- Utiliser Bienaymé-Tchebychev.

VECTEURS ALÉATOIRES.

NOTIONS ET RÉSULTATS ESSENTIELS

- Système complet et σ-algèbre associés au couple (X, Y).

• Loi conjointe, lois marginales et lois conditionnelles.
• Indépendance.
• Loi de $Z = g(X, Y)$. Loi d'une somme et d'un produit.
• Espérance de $Z = g(X, Y)$.
• Linéarité et croissance de l'espérance.
• Covariance de deux variables aléatoires discrètes finies.
• Variance de la somme de deux variables aléatoires discrètes finies. Cas de l'indépendance.
• Indépendance mutuelle d'une suite finie ou infinie de variables aléatoires réelles discrètes.
• Variance de la somme de n variables aléatoires discrètes finies indépendantes.
• Convergence en probabilité.
• Loi faible des grands nombres.
• Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale. Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.

SAVOIR FAIRE
• Déterminer les lois marginales à partir de la loi conjointe.
• Déterminer les lois conditionnelles à partir de la loi conjointe.
• Déterminer la loi conjointe à partir d'une loi et et des lois conditionnelles de l'autre loi.
• Utiliser l'indépendance de variables aléatoires.
• Montrer l'indépendance de variables aléatoires.
• Trouver la loi d'une somme et son espérance.
• Trouver la loi d'un produit et son espérance.
• Trouver la loi de $Z = g(X, Y)$ et son espérance.
• Calculer une covariance.
• Calculer la variance d'une somme.
• Écrire une variable aléatoire comme somme ou combinaison linéaire de variables de Bernoulli pour en calculer l'espérance (resp. la variance).
• Utiliser les propriétés de la covariance.
• Approximer une loi hypergéométrique par une loi binomiale. Approximer une loi binomiale par une loi de Poisson.

ANALYSE

Q.1 **Valeur absolue d'un réel.**

Q.2 **Partie entière d'un réel.**

Q.3 **Suite convergente.**

Q.4 **Suites adjacentes.**

Q.5 **Construction de suites adjacentes par dichotomie.**

Q.6 **Borne supérieure et inférieure pour une partie non vide de $\mathbb{R}$ (resp. pour une fonction numérique.)**

Q.7 **Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.**

Q.8 **Notion de limite (suites et fonctions).**

Q.9 **Existence de limite par encadrement (suites et fonctions)**

Q.10 **Suite vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2.**

Q.11 **Suite négligeable devant une autre suite.**

Q.12 **Suites équivalentes.**

Q.13 **Négligeablilités usuelles (suites et fonctions).**

Q.14 **Équivalents usuels (suites et fonctions).**

Q.15 **Suites $u_{n+1} = f(u_n)$.**

Q.16 **CNS de convergence pour une série à termes positifs.**

Q.17 **Reste d'une série convergente.**

Q.18 **Comparaison des séries à termes positifs.**

Q.19 **L'absolue convergence.**

Q.20 **Les séries du programme.**

Q.21 **La notion de limite pour une fonction numérique d'une ou plusieurs variables.**

Q.22 **La notion de continuité pour une fonction numérique d'une ou plusieurs variables.**

Q.23 **Limite à droite, à gauche.**

Q.24 **La limite monotone (suites, fonctions et proba)**

Q.25 **Caractérisation séquentielle de la notion de limite.**

Q.26 **Composition des fonctions continues pour les fonctions d'une ou plusieurs variables.**

Q.27 **Limite d'une composée pour les fonctions d'une ou plusieurs variables.**

Q.28 **Fonction négligeable devant une autre au voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$.**

Q.29 **Fonctions équivalentes au voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$.**

Q.30 **Théorème des valeurs intermédiaires.**

Q.31 **Image d'un segment par une fonction continue.**

Q.32 **Théorème de la bijection.**

Q.33 Dérivée en un point, développement limité à l'ordre 1 **et approximation affine au voisinage d'un point.**

Q.34 Composition des fonctions dérivables, D^p, $\mathcal{C}^p$ **et** $\mathcal{C}^\infty$.

Q.35 Dérivation et réciproque. ★

Q.36 Formule de Leïbniz.

Q.37 Théorème de Rolle.

Q.38 Égalité et inégalité des accroissements finis.

Q.39 Définition et dérivation de la fonction arctan.

Q.40 Prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ **(resp.** $\mathcal{C}^p$**)**

Q.41 Théorème de la limite de la dérivée.

Q.42 Fonctions convexes (resp. concaves) : définitions et caractérisations.

Q.43 Formule$\boxed{\text{s}}$ de Taylor. Inégalité de Taylor-Lagrange.

Q.44 Intégrale d'une fonction en escalier positive. Intégrale d'une fonction continue positive. Intégrale d'une fonction continue.

Q.45 Propriétés de l'intégrale.

Q.46 Notion de primitive.

Q.47 Le théorème de changement de variable. ★

Q.48 Sommes de Riemann.

Q.49 Fonction continue par morceaux ; intégrale d'une fonction continue par morceaux. ★

Q.50 L'équation différentielle $y' + a\,y = 0$.

Q.51 Développements limités : définition, somme, produit et composition.

Q.52 Les 5 développements limités du programme.

Q.53 Formule de Taylor-Young.

Q.54 Droites, segments, convexes, parties bornées de $\mathbb{R}^2$.

Q.55 Produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^2$ **; inégalité de Cauchy-Schwarz, norme et distance euclidienne.**

Q.56 Boules, ouverts, fermés de $\mathbb{R}^2$.

Q.57 Graphe d'une fonction de plusieurs variables.

Q.58 Ensembles de niveau d'une fonction de plusieurs variables.

Q.59 Notion de continuité (resp. de limite) pour une fonction de $\mathbb{R}^2$ **dans** $\mathbb{R}$.

Q.60 Opération sur les fonctions continues ; composition à gauche par une fonction continue d'une variable.

Q.61 Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé de $\mathbb{R}^2$ **par une application continue de** $\mathbb{R}^2$ **dans** $\mathbb{R}$.

Q.62 Fonction continue sur un fermé borné.

Q.63 Dérivées partielles premières. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Q.64 Notion de gradient.

Q.65 Dérivée d'une fonction de la forme $t \to f\big(u(t), v(t)\big)$. **Cas particulier de** $t \to f(\mathbf{A} + t\,\mathbf{U})$.

Q.66 Dérivées directionnelles premières.

Q.67 Approximation locale par une fonction affine. Développement limité d'ordre 1. Le cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Q.68 Fonction affine tangente ; plan affine tangent.

ALGÈBRE

Q.69 Application injective, surjective et bijective.

Q.70 Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble : définition et utilité

Q.71 Formule$\boxed{\text{s}}$ du binôme.

Q.72 Formules d'Euler et de Moivre.

Q.73 Formules trigonométriques.

Q.74 Racines $n^{\text{ème}}$ d'un complexe.

Q.75 Produit de deux polynômes.

Q.76 Ordre de multiplicité d'une racine.

Q.77 Division euclidienne.

Q.78 Théorème de d'Alembert.

Q.79 Algorithme d'Horner.

Q.80 Notion de sous-espace vectoriel.

Q.81 Famille libre, liée, génératrice.

Q.82 Bases. Dimension.

Q.83 Caractérisation des bases en dimension finie.

Q.84 Théorème de la base incomplète.

Q.85 Somme directe de 2 sous-espaces.

Q.86 Sous-espaces supplémentaires.

Q.87 Théorème (ou formule) du rang.

Q.88 Projection, projecteur.

Q.89 Symétrie.

Q.90 Isomorphisme. Caractérisation des isomorphismes.

Q.91 Notion de rang.

Q.92 Forme linéaire et hyperplan.

Q.93 GL(E) et $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$.

Q.94 Notion de matrice.

Q.95 Le produit matriciel.

Q.96 Matrice inversible.

Q.97 **Changement de base, matrice de passage.**

Q.98 **Matrices semblables.**

Q.99 **Eléments propres.**

Q.100 **Définition d'un endomorphisme (resp d'une matrice) diagonalisable. Caractérisations.**

Q.101 **Interprétation matricielle d'un système linéaire.**

Q.102 **Méthode du pivot de Gauss.**

DÉNOMBREMENT, PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Q.103 **Parties d'un ensemble à n éléments.**

Q.104 **Parties à p éléments d'un ensemble à n éléments. Formule du binôme. Triangle de Pascal.**

Q.105 **p-liste d'un ensemble à n éléments. Occurrences d'un élément dans une p-liste.**

Q.106 **p-liste sans répétition d'un ensemble à n éléments. Permutation.**

Q.107 **Algèbre d'événements. Algèbre engendrée par une famille d'événements.**

Q.108 **Espace probabilisable, espace probabilisé.**

Q.109 **Tribu ou σ-algèbre engendrée par une famille d'événements.**

Q.110 **Système complet d'événements. Tribu ou σ-algèbre engendrée par un système complet d'événements.**

Q.111 **Formule du crible ou de Poincaré.**

Q.112 **Limite monotone.**

Q.113 **Ensemble négligeable, propriété vraie presque sûrement.**

Q.114 **Probabilités conditionnelles : définition et formules usuelles.**

Q.115 **σ-algèbres indépendantes.**

Q.116 **Indépendance mutuelle de n événement ou d'une suite d'événements.** ★

Q.117 **Variable aléatoire discrète : définition, caractérisation, propriétés.**

Q.118 **Fonction indicatrice d'une partie, d'un événement. Opérations.**

Q.119 **Opérations usuelles sur les variables aléatoires discrètes.**

Q.120 **Système complet et σ-algèbre associés à une variable aléatoire discrète.**

Q.121 **Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète.**

Q.122 **Loi de probabilité.**

Q.123 **Espérance, variance, moment d'ordre r moment centré d'ordre r d'une variable aléatoire discrète.**

Q.124 **Loi de $\mathbf{Z} = \mathbf{g}(\mathbf{X})$. Théorème de transfert.**

Q.125 **Les lois discrètes usuelles.**

Q.126 **Loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles d'un couple de variables aléatoires discrètes.**

Q.127 Système complet et σ-algèbre associés à un couple de variables aléatoires discrètes.

Q.128 Loi de $\mathbf{Z} = \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$; cas de la somme et du produit.

Q.129 Espérance de $\mathbf{Z} = \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ et théorème de transfert. Cas de la somme et du produit ★

Q.130 Linéarité et croissance de l'espérance.

Q.131 Covariance : définition et propriétés.

Q.132 Variance d'une somme.

Q.133 Indépendance mutuelle de n variables aléatoires ou d'une suite de variables aléatoires. Le cas discret. ★

Q.134 Inégalité Bienaymé-Tchebychev.

Q.135 Convergence en probabilité. Loi faible des grands nombres.

Q.136 Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale. Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.

Q.137 Notions de population, d'individus, d'échantillon de caractère.

Q.138 Série statistique. Description d'une série statistique (effectifs, fréquences, fréquences cumulées). Représentation d'une série statistique (diagramme en bâtons, histogramme).

Q.139 Caractéristiques de position d'une série statistique : moyenne, médiane, mode(s).

Caractéristiques de dispersion : variance, écart-type, quartiles, déciles.

ALGORITHMIQUE

Q.140 Variables et types (integer, real, boolean, array).

Q.141 Opérations élémentaires ($:=$, $=$, $>$, $<$, $>=$, $<=$, $<>$, $+$, $-$, $*$, $/$, and, or, not).

Q.142 Fonctions usuelles (div, mod, ln, exp, trunc, abs, sqrt, sin, cos).

Q.143 Structures de bases (if...then, for...to...do, for...to...downto, while...do, repeat...until).

Q.144 Procédures et fonctions.

Q.145 Passage des paramètres en valeur et en variable. Notion de variables locales et globales.

Q.146 Fonctions et procédures récursives.

Q.147 Calculs de sommes et de produits. Calcul de termes d'une suite récurrente. Calculs de valeurs approchées de la somme d'une série. Calcul approché de la racine d'une équation du type $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Mise en œuvre de l'algorithme de dichotomie. Comparaison de cet algorithme à ceux utilisant la puissance.

Q.148 Écriture et utilisation de fonctions servant pour des dénombrements classiques : n^p, $n!$, $\binom{n}{p}$.

Q.149 Calcul de la valeur d'un polynôme de haut degré. Principe et mise en œuvre de l'algorithme d'Hörner.

Q.150 Utilisation du générateur aléatoire random, random (n) et de l'instruction randomize pour simuler des phénomènes aléatoires. Écriture de fonctions PASCAL simulant des variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[\![n_1, n_2]\!]$, une loi de Bernoulli de paramètre p et une loi binomiale de paramètres n et p, une loi uniforme sur $[a, b]$.

À compléter...
